

Klaas Landsman

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde

Universiteit van Amsterdam

Plantage Muidergracht 24, 1018 TV Amsterdam

npl@science.uva.nl

Inaugurale rede

Wiskunde aan de grenzen

Kort na de ontdekking van de quantummechanica in 1925 door Heisenberg en Schrödinger voorzag Von Neumann haar van een wiskundige structuur. Vervolgens ontwikkelde hij hier een verregaande generalisatie van: de theorie van operator-algebra's. Deze blijkt afdoende om het mysterieuze verband tussen de klassieke en de quantummechanica te beschrijven. Een klassieke fysische theorie kan singulariteiten hebben, zoals de oerknal, terwijl dit voor een quantumtheorie niet zo is. Niet-commutatieve meetkunde speelt hierbij een belangrijke rol. Hieronder volgt de tekst van de oratie uitgesproken bij de aanvaarding van het ambt van hoogleraar in de Mathematische Fysica aan de Universiteit van Amsterdam op maandag 15 oktober 2001.

Vorig jaar werd Albert Einstein door *Time Magazine* gekozen tot *Person of the 20th Century*.¹ De redactie ging daarmee voorbij aan de voorkeur van hun lezers, die Elvis Presley hadden gekozen, met daarna Yitzhak Rabin, Adolf Hitler, en Billy Graham, en pas op de vijfde plaats Einstein. Ook in de keuze van hun nummers twee en drie trokken de redacteurs zich niets van hun lezers aan, want daar plaatsten ze, zeer politiek correct, Franklin Roosevelt en Mohandas Gandhi.

Een interessant en voor zijn uitverkiezing zonder twijfel beslissend aspect van Einstein is dat hij enerzijds, als de grootste geleerde sinds Newton en meer in het algemeen als nobel denker, als een parel van de mensheid in de 20e eeuw geldt, maar anderzijds ook direct met het leed van die eeuw wordt geassocieerd. Want de atoombom had niet kunnen worden gebouwd zonder zowel Einsteins beroemde formule $E = mc^2$, als zijn cruciale

bijdragen aan de quantummechanica. Bovendien wordt er dikwijls op gewezen dat hij in 1939 een brief aan Roosevelt schreef, waarin hij aandrong op onderzoek naar de mogelijkheid van atoomwapens. Dit zou nodig zijn vanwege de Duitse bedreiging in dezen. Deze brief had lang niet de invloed die hem vaak wordt toegemeten en speelde in feite nauwelijks een rol bij de besluitvorming die tot het Manhattan Project leidde.² Maartoch: *Der Pazifist und die Bombe*.³

John von Neumann

Mijn keuze als *Person of the 20th Century* is iemand die bij *Time Magazine* niet eens voorkomt op de lijst van 100 kandidaten, maar die zonder twijfel nóg meer invloed op de twintigste eeuw heeft gehad dan Einstein of wie dan ook in de speciale categorie *Scientists and Thinkers*. Het meest overtuigende argument om mijn kandidaat te verkopen is de

opmerking dat we overal om ons heen computers zien, dat vrijwel geen enkel aspect van ons leven, tot en met het bakken van brood, plaatsvindt zonder tussenkomst van computers en dat bijna al deze machines zijn gebouwd volgens de zogenaamde *Von Neumann architectuur*.⁴ Het minst overtuigende argument is om te zeggen dat John von Neumann (1903–1957) als vader van de mathematische fysica van de 20e eeuw en meer in het algemeen als een van de grootste en meest veelzijdige wiskundigen van die eeuw de uitverkiezing uiteraard verdient. Dat is overigens wel de reden dat hij in deze oratie optreedt. Een tussenliggend argument is dat Von Neumann als een van de eersten de gevaren van het roken inzag.

Naast zijn beslissende rol in de bouw van de eerste moderne computers was Von Neumann vermoedelijk de meest invloedrijke adviseur op militair gebied die de achtereenvolgende presidenten Roosevelt, Truman, en Eisenhower hadden.⁵ In eerste instantie trad Von Neumann op als consulent in Los Alamos, waar hij het impliesiemechanisme van plutoniumbommen bedacht. Dit werd niet alleen gebruikt in de bom die boven Nagasaki werd afgeworpen, maar zit vermoedelijk tot de dag van vandaag achter alle latere atoomwapens. Als lid van het *target committee* bepaalde Von Neumann mede waar en met hoeveel slacht-



Klaas Landsman

van de natuurkunde

offers de twee in augustus 1945 afgeworpen atoombomben hun verwoestingen aan zouden richten. Hij leverde belangrijke bijdragen aan de ontwikkeling van de waterstofbom, en tenslotte was hij in hoge mate verantwoordelijk voor het concept van de wederzijdse nucleaire afschrikking, waarop veertig jaar lang de wereldpolitiek gebaseerd is geweest.

Maar vandaag wil ik Von Neumann verder alleen nog als wiskundige en mathematisch fysicus zien. Tot die gebieden leverde hij prachtige en beslissende bijdragen, die net als Einsteins relativiteitstheorie parels van de menselijke beschaving zijn.⁶ Zoals uit de bovenstaande opsomming blijkt, is het contrast tussen Von Neumanns bijdragen aan het Goede en aan het Kwade dan ook veel geprononceerder dan bij Einstein, wat hem in mijn ogen dan ook tot een nóg interessantere figuur maakt. Overigens is lang niet iedereen het er over eens dat Von Neumanns werk aan kernwapens en zijn extreem havikachtige, op militaire oplossingen gerichte politieke ideeën überhaupt negatief beoordeeld moeten worden.⁷ Waarschijnlijk is wel dat hij hiervoor met zijn leven moest boeten; hij overleed op 53-jarige leeftijd aan botkanker, vermoedelijk opgedaan door het veelvuldig bijwonen van nucleaire tests.

Vanwege zijn vele andere activiteiten bestreek de zuiver wiskundige loopbaan van

Von Neumann eigenlijk alleen de jaren 1920–1940. Na 1940 vond hij tussen zijn politieke activiteiten door ook nog wel tijd voor de wiskunde, maar die was vaak van zeer toegepaste aard, bijvoorbeeld op het gebied van de numerieke wiskunde en de weersvoorspelling. In directe samenhang daarmee valt ook Von Neumanns werk aan computers in de naoorlogse tijd.

Als voormalig wonderkind schreef hij zijn eerste artikel reeds op zeventienjarige leeftijd, maar zijn wiskundige productie in die eerste twintig jaar zou ook zonder dit vroege begin uitzonderlijk zijn geweest. Zijn legendarische intelligentie speelde hierbij zeker een rol, maar tevens moet opgemerkt worden dat Von Neumann geen enkele bijdrage tot het huishouden leverde. Toen zijn tweede echtgenote een keer ziek was en hem om een glas water vroeg, bleek Johnny niet te weten waar de glazen stonden. Zijn eerste echtgenote pleegde overigens zelfmoord.

Tot sommige gebieden van de wiskunde leverde Von Neumann belangrijke bijdragen; van andere behoorde hij tot de grondleggers. In de eerste categorie valt zijn werk aan verzamelingenleer en logica, waarmee hij zijn loopbaan begon, de theorie van tralies, maattheorie en ergodentheorie, alsmede andere bijdragen tot de reële analyse. Tot de tweede categorie mogen we rekenen de speltheorie en

in samenhang daarmee de moderne wiskundige economie, de continue meetkunde, en de functionaalanalyse. Dit laatste gebied bestaat voornamelijk uit twee onderdelen, namelijk de studie van Banach-ruimten en van de meer algemene lokaal-convexe ruimten. Deze laatste ruimten werden door Von Neumann ingevoerd, en de belangrijkste voorbeelden van de eerste zijn de zogenaamde Hilbert-ruimten, waarbij Von Neumann eveneens de beslissende figuur is geweest. Daar kom ik nu in meer detail over te spreken, want juist zijn werk op dit gebied is bepalend voor mijn wiskundige aanpak. Het is zelfs zo dat na mijn familie Von Neumann de persoon is aan wie ik het meeste denk.

Quantummechanica

Von Neumann toog in de herfst van 1926 naar Göttingen, destijds het centrum van de wiskundige wereld, om daar samen te werken met David Hilbert, de toonaangevende wiskundige van zijn tijd. Von Neumann voelde zich in eerste instantie tot Hilbert aangetrokken vanwege diens werk in de logica, maar in 1926 was Hilbert vooral gefascineerd door de opkomende quantummechanica. Deze theorie beschrijft moleculen, atomen, kernen, elementaire deeltjes, en meer in het algemeen de microscopische natuur. Daartegenover staat de klassieke mechanica,



Von Neumann met zijn vrouw Kari en hun hond Inverse

die de macroscopische wereld voor haar rekening neemt. Vanaf 1900 werd met vallen en opstaan ingezien dat de klassieke fysica niet de hele natuur kan beschrijven, en in 1925 werd de klassieke mechanica definitief opzij gezet ten gunste van de quantummechanica. Deze theorie werd onafhankelijk en vrijwel tegelijkertijd ontdekt door Erwin Schrödinger en Werner Heisenberg.⁸

Schrödinger was een bon vivant, die naar het schijnt vooral tijdens amoureuze escapades tot zijn inzichten kwam.⁹ Heisenberg daarentegen was een hele serieuze jongen die de quantummechanica aan zich zag verschijnen tijdens een kort verblijf op het Duitse eilandje Helgoland in de Noordzee, waar hij in opperste eenzaamheid herstelde van een ernstige aanval van hooikoorts.¹⁰ Hij zag met name in dat de fysische variabelen voortaan niet meer mochten commuteren; ik kom hier straks nog op terug. Het is overigens juist deze Heisenberg die later de geallieerden de schrik op het lijf zou jagen met zijn werk aan het atoom-programma van Nazi-Duitsland.¹¹ Enigszins overdreven kunnen we zelfs zeggen dat de angst voor het genie van Heisenberg de Amerikanen er toe aanzetten met het Manhattan Project het atoombomtijdperk in te luiden.¹²

Heisenberg bevond zich destijds in Göttingen, waar hij samenwerkte met Max Born. Born was een goede kennis van Hilbert, die al langer vanuit wiskundig standpunt in de natuurkunde was geïnteresseerd, en dus vooral

wilde weten hoe het met de quantummechanica zat. Hij kwam daar zelf niet uit, maar zijn jonge assistent Von Neumann doorzag de wiskundige structuur van de quantummechanica vrijwel onmiddellijk en volledig. Deze uitzonderlijke prestatie kan worden vergeleken met die van Isaac Newton, die eind zeventiende eeuw niet alleen de wiskundige formulering van de klassieke mechanica ontdekte, maar ook de daartoe benodigde wiskunde grotendeels zelf ontwikkelde. Zo ook Von Neumann, maar dan voor de quantummechanica.

Hij zag dat de structuur die nu als Hilbertruimte bekend staat, maar die destijds alleen in een paar voorbeelden bekend was, aan de quantummechanica ten grondslag lag. Hij ontwikkelde deze structuur tot wat het vandaag de dag nog steeds zonder enige wijziging is en gaf precies aan hoe de quantummechanica, nauwelijks een jaar oud, hierdoor naadloos kon worden beschreven. In het bijzonder liet hij zien dat de aanpak van Schrödinger equivalent was met die van Heisenberg, hoe totaal verschillend ze er in eerste instantie ook uitzagen. Von Neumann schreef zijn ideeën in drie artikelen in 1927 op; de definitieve versie hiervan verscheen in 1932 als het boek *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*.

Afgezien van de virtueuze wiskunde komt in dit boek ook heel wat echte fysica aan bod. Zo geeft Von Neumann een nog steeds gebruikte uitdrukking voor de entropie van een quan-

tummechanische toestand, en legt hij ook de basis voor alle latere discussies van het zogenaamde meetprobleem. Ik zie dit boek als het hoogtepunt van de mathematische fysica van de 20e eeuw.

Mijn (gebrek aan) visie

In dit laatste oordeel uiten mijn beperkingen zich. In het bijzonder houd ik me uitsluitend bezig met mathematische fysica die in directe relatie staat tot de quantummechanica. In Engeland wordt de gehele stromingsleer tot de mathematische fysica gerekend, en in een kort geleden verschenen rapport over de wiskunde in Nederland¹³ staan onder het kopje *Mathematische Fysica* vijf namen van hoogleraren, vier waarvan ik nog nooit had gehoord. Voor zover naspeurbaar blijken ze actief te zijn in de scheepsbouw. In een pas drie jaar geleden vervangen wervingsbrochure vermeldt de Universiteit van Amsterdam de Deltawerken als motivatie voor de mathematische fysica. Daar weet ik allemaal niets van, hoewel ik de Stormvloedkering Oosterschelde als toerist met bewondering heb bezocht. Ook binnen de quantummechanica gebeurt van alles waar ik geen benul van heb. Deze onwetendheid strekt zich uit van transportverschijnselen in metalen tot stringtheorie, zo ongeveer de hele quantumfysica dus.

In sommige dingen ben ik niet geïnteresseerd omdat ik er niet in geloof, zoals stringtheorie. Het lijkt me niet plausibel dat op de lengteschaal waar stringtheorie relevant zou moeten zijn, zowel de quantummechanica als de relativiteitstheorie nog gelden. Van deze veronderstelling gaat de stringtheorie evenwel uit. Maar als je de quantummechanica een beetje anders axiomatiseert dan Von Neumann dat deed, zie je dat er één volkomen willekeurig postulaat in zit,¹⁴ hetgeen sterk suggereert dat er nog weer een nieuwe mechanica ontdekt moet worden die dit postulaat verklaart. Daar is een nieuwe Galilei of Heisenberg voor nodig. De diepe invloed van de stringtheorie op de wiskunde blijft uiteraard ook bij fysische irrelevantie onverlet.

Andere zaken hebben mijn aandacht niet omdat ik ze als een laf soort mathematische fysica zie. Van veel verschijnselen is de fysica geheel begrepen, en is wiskundig gesproken het formalisme van Newton of dat van Von Neumann toepasbaar, naar gelang het verschijnsel klassiek of quanteus is. Daar kan dan natuurlijk wiskundig nog weer van alles over gezegd worden, en vaak gaat het dan

Foto rechts. De op 11 augustus 1945 afgeworpen atoombom boven Nagasaki.

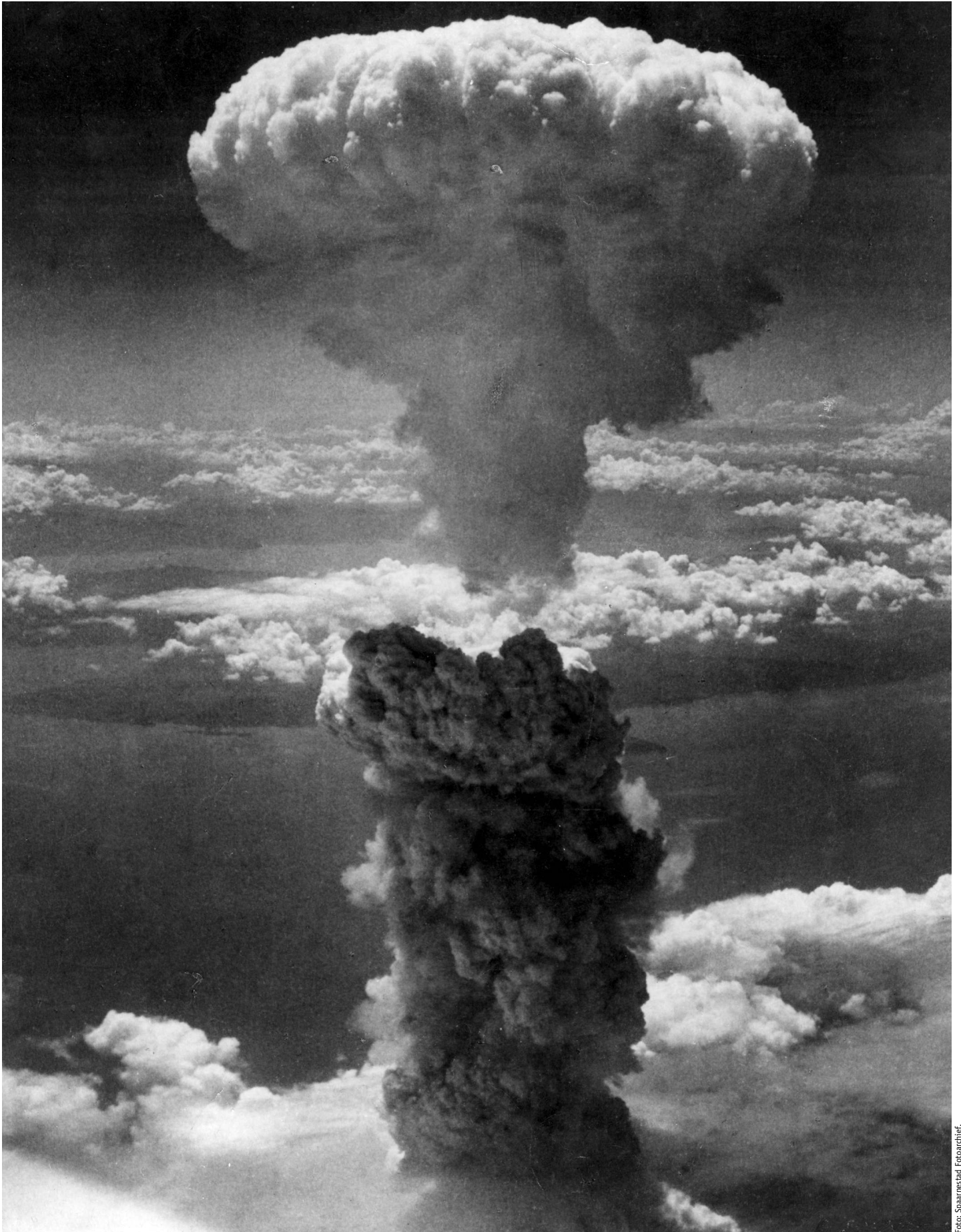


Foto: Spaarvestal Fotoarchief.

om ware technische *Tours de Force* die zowel diepgaand fysisch inzicht als wiskundige virtuositeit vereisen. Maar ik vind dat soort werk laf, omdat de fysische noch de wiskundige uitgangspunten ter discussie staan. Er kan eigenlijk niets mis gaan, en het is vooral een wedstrijd wie de slimste is. Zulke mathematisch fysici hebben ook altijd alles gedaan om ontwikkelingen die zij als *avontuurlijk*, of, wat als een nog ergere belediging is bedoeld, *heuristisch* zien, tegen te houden of dood te zwijgen.

Waar mijn hart dan wel ligt? Ik ben geïnteresseerd in fysische wetten aan de grenzen van hun toepasbaarheid. Juist daar raak je door de janboerenfluitjeswiskunde die aan de natuurkunde eigen is, en die zich verder uitstekend houdt, in de war. Aan de rand van een theorie ontstaat de noodzaak voor serieuze, en vaak ook nieuwe wiskunde. Een prachtig voorbeeld is het werk van Stephen Hawking in de jaren 60, toen hij nog geen kermisattractie was. De algemene relativiteitstheorie van onze man van de 20e eeuw, Einstein dus, heeft oplossingen die zogenaamde singulariteiten bevatten. Dat zijn punten waar de theorie geen zeggingskracht meer heeft omdat bepaalde grootheden oneindig zijn. De oerknal is een voorbeeld, maar ook zwarte gaten zijn met singulariteiten verbonden.

Begin jaren zestig was de wiskunde die in de algemene relativiteitstheorie werd gebruikt vanuit modern oogpunt zeer primitief, hoewel zij vergeleken bij de genoemde janboerenfluitjeswiskunde bepaald geavanceerd aandoet. Met die wiskunde kon vrijwel niets zinnigs over singulariteiten in het heelal worden gezegd. Maar samen met Roger Penrose, een ander voorbeeld van iemand die aan zijn overigens terecht verkregen roem is bezweken en een potsierlijke figuur is geworden, ontwikkelde Hawking wiskundige technieken die hem, gecombineerd met zijn nog steeds onovertroffen fysische inzicht in de zwaartekracht, in staat stelde precies te zeggen wat singulariteiten zijn en wanneer ze optreden.

Het antwoord op de laatste vraag is: vrijwel altijd. Dit was een revolutionair inzicht over het heelal, dat zonder diepe wiskundige technieken nooit met enige plausibiliteit geopperd had kunnen worden. Net als Von Neumann schreef Hawking zijn werk op jonge leeftijd neer in een schitterend boek: *The Large Scale Structure of Space-Time* (met G.F.R. Ellis), ook ongetwijfeld een klassieker van de 20e eeuwse mathematische fysica.

Een ander voorbeeld van de grens van een fysische theorie, waar overigens bijna

al mijn werk van de afgelopen tien jaar over gaat, is het verband tussen de klassieke en de quantummechanica. Heisenberg, Schrödinger, Einstein, Von Neumann, Bohr, allemaal zagen ze vrijwel onmiddellijk in dat dit verband problematisch is. De juiste manier om er naar te kijken is om de klassieke mechanica als een soort *rand* van de quantummechanica te zien.¹⁴ Maar om dit wiskundig uit te kunnen drukken is het formalisme dat Von Neumann voor de quantummechanica ontwikkelde niet afdoende.

U hoopt nu misschien dat ik, hierdoor gedwongen, eindelijk eens ophou over die man, maar niets is minder waar. Ik ben zelfs van plan na mijn emeritaat een wiskundige biografie van hem te gaan schrijven, want die bestaat nog niet.

Operator-algebra's

Von Neumann zelf werd, om een aantal redenen die los staan van de problemen met de klassieke limiet, al snel ontevreden over zijn Hilbert-ruimte formalisme van de quantummechanica.¹⁵ Zijn eerste reden was dat hij op grond van zijn werk aan entropie, en meer in het algemeen van zijn ideeën over de grondslagen van de kansrekening, van mening was dat ieder fysisch systeem een a priori toestand van maximale wanorde moet bezitten. Dat bleek voor een quantumstelsel met oneindig veel energieniveaus, hetgeen het fysisch relevante geval is, in zijn oorspronkelijke formalisme niet zo te zijn.

Een ogenschijnlijk geheel ander argument, dat uiteindelijk tot dezelfde conclusie zou leiden, was dat Von Neumann als eerste het diepe verband tussen quantummechanica en projectieve meetkunde op waarde schatte. Hij zag in die context in, dat een Hilbert-ruimte niet het juiste oneindig-dimensionale analogon van een Euclidische ruimte is. Tevens ontdekte hij op grond van zijn eerdere werk aan de logica de mogelijkheid om ieder positief reëel getal als dimensie van een gegeneraliseerde projectieve meetkunde op te laten treden.¹⁶

Deze motivatie, die nog werd versterkt door zijn inzicht in de moeilijkheden die bij de decompositie van unitaire representaties van niet-kompakte groepen op kunnen treden, bracht Von Neumann ertoe de theorie van operator-algebra's op Hilbert-ruimten te ontwikkelen. Hij deed dit, gedeeltelijk samen met zijn assistent Murray, van 1935–1940.¹⁷ Om de loftrampet maar weer op te steken: dit werk is wel beschreven als 'perhaps the most original major work in mathematics in the twentieth century.'¹⁸ Vele wiskundige ideeën

van Von Neumann, zelfs die uit de logica, maar in het bijzonder die aangaande de quantummechanica, komen in deze theorie terug.

In ieder geval is gebleken dat, afgezien van hun intrinsieke wiskundige waarde, deze *von Neumann algebra's*, zoals ze tegenwoordig heten, precies het technisch apparaat leveren om de grenzen en randen van de quantummechanica te kunnen onderzoeken. Een kleine wijziging in Von Neumanns definitie, die in 1943 door Gelfand en Neumark werd voorgesteld,¹⁹ leidt tot de zogenaamde *C*-algebra's*, welke in dergelijk onderzoek eveneens een hoofdrol spelen. Ik zal hier vandaag verder geen onderscheid tussen maken, en over beide als operator-algebra's spreken.

Waar tienduizenden wiskundigen en mathematisch fysici het oorspronkelijke Hilbert-ruimte formalisme van Von Neumann dagelijks gebruiken, behoren de klanten van de operator-algebra's tot een kleine sekte, die nog geen 100 leden heeft. Direct na het werk van Von Neumann zelf werkte jarenlang zelfs helemaal niemand aan dit onderwerp, maar na 1945 krabbelde het aantal operator-algebraïci, vooral vanwege de formidabele reputatie van Von Neumann, langzaam omhoog.²⁰

De huidige sekteleider is de Franse wiskundige Alain Connes, die als wiskundige minstens zo virtuoos is als Von Neumann, maar zich politiek gelukkig afzijdig houdt. Dit is, zoals hij eens vertelde, vanwege de geweldige afkeer die hij eind zestiger jaren tegen zijn collega Grothendieck en diens omgeving van Parijse intellectuelen en andere communistische poseurs had.²¹ Connes, die zelf uit de omgeving van Marseille komt als zoon van een reclasseringsambtenaar, probeerde als student dan ook een onderwerp te vinden dat zo ver mogelijk van de algebraïsche meetkunde en getaltheorie van Grothendieck vandaan lag. Dit leidde hem tot de operator-algebra's, een zegening waar het gebied nog steeds op drijft. Zijn uitzonderlijke talent werd in 1982 met de Fields Medal, de hoogste prijs in de wiskunde, beloond.²²

We hebben dus nu de operator-algebra's, waarmee men de diepere aspecten, en in het bijzonder de randverschijnselen van de quantummechanica kan beschrijven. Behalve de klassieke limiet valt daar ook de beschrijving van systemen met oneindig veel vrijheidsgraden onder, zoals quantumveldentheorieën en oneindig grote thermodynamische systemen.²³ Met pogingen die twee te combineren is overigens mijn loopbaan als wetenschappelijk onderzoeker begonnen.²⁴

Maar wat speelt in de klassieke mechanica

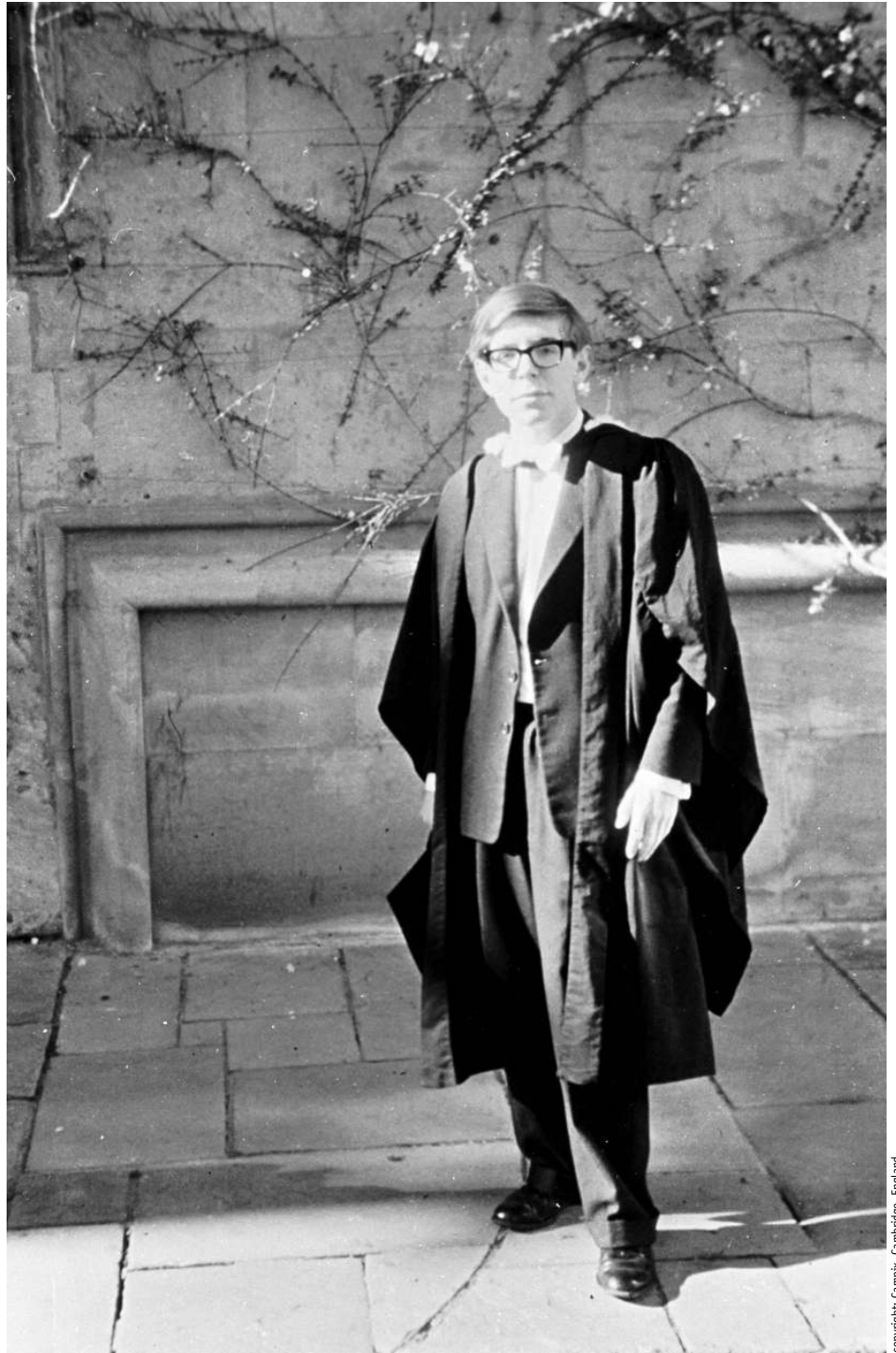
de rol van een operator-algebra? De klassieke mechanica is ongeveer 250 jaar ouder dan de quantummechanica, dus je zou verwachten dat de betreffende structuur ook wel ouder zal zijn dan Von Neumanns quantummechanische operator-algebra's. Dat is tot op zekere hoogte ook het geval, want Poisson vermeldt de naar hem genoemde haakjes al in 1811 in zijn beroemde werk *Traité de Mécanique*. En Dirac zag al in 1926 in dat het klassieke analogon van de algebraïsche structuur van de quantummechanica precies door deze Poisson-haakjes wordt beschreven.²⁵ Maar pas in 1976 formuleerden Kirillov en Lichnerowicz onafhankelijk de juiste definitie van klassieke operator-algebra's, die nu als *Poisson-algebra's* bekend staan.²⁶

Singulariteiten

Een operator-algebra leeft natuurlijkerwijze op een Hilbert-ruimte; dat was het uitgangspunt van Von Neumann, en een latere stelling van Gelfand en Neumark zegt dat je operator-algebra's inderdaad altijd op die manier kunt realiseren.⁴⁹ Analooft leeft een Poisson-algebra in eerste instantie op een zogenaamde Poisson-variëteit. De gebruikelijke fase-ruimtes van de klassieke mechanica zijn daar voorbeelden van. Maar er is een cruciaal verschil tussen de klassieke en de quanteuze situatie: niet alle Poisson-algebra's kunnen worden gerealiseerd als algebra's van differentiëerbare functies op een gladde variëteit. Dat dit niet altijd kan heeft te maken met het mogelijk voorkomen van singulariteiten in klassieke systemen. Deze hebben geen analogon in de quantummechanica.

Hoe belangrijk zijn singulariteiten in de klassieke mechanica? Hoewel het hier technisch gesproken om een iets andere situatie gaat, breng ik in herinnering dat Hawking en Penrose bewezen dat in de algemene relativiteitstheorie singulariteiten niet uitzonderlijk zijn, zoals voorheen werd gedacht, maar generiek. Zo is het ook in de klassieke mechanica, waar ik de veldentheorie gemakshalve bij reken. Dit komt door het optreden van symmetrie. Symmetrie wordt vaak als het hoogste en schoonste in de natuur gezien, maar in de klassieke mechanica geldt: hoe meer symmetrie, hoe meer singulariteiten.²⁷

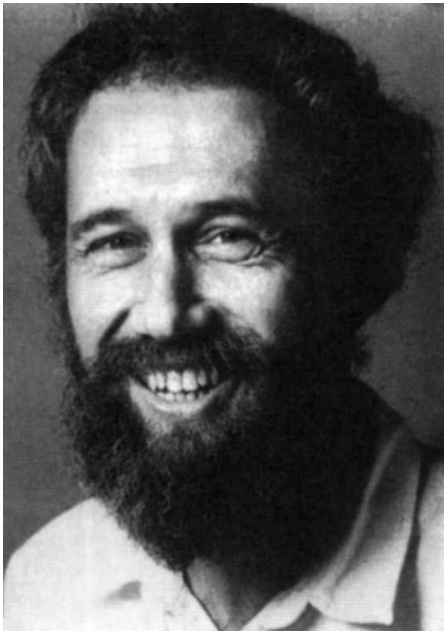
Dit heeft te maken met een opmerkelijk aspect van de wiskundige beschrijving van de natuur. Een theorie met veel symmetrie beschrijft namelijk vaak een fysisch systeem waarvan de 'observeerbare' grootheden juist invariant zijn onder de symmetrie. De observablen vormen aldus equivalentieklassen, en de ruimte van dergelijke klassen is meestal



Stephen Hawking ten tijde van zijn van zijn promotie aan de universiteit van Oxford

singulier, zelfs als de oorspronkelijke theorie van alle variabelen dat niet was. In de natuurkunde treedt iets dergelijks op in alle belangrijke theorieën, zoals de algemene relativiteitstheorie en de Yang-Mills theorie (dat wil zeggen een niet-abelse ijktheorie).²⁷ Singulariteiten als de oerknal en zwarte gaten hebben hier indirect mee te maken: een pseudo-Riemannse metriek die een singuliere ruimte-tijd beschrijft is zelf een singulier punt in een geschikte ruimte van equivalentieklassen van dergelijke metrieken.

Zowel in de algemene relativiteitstheorie als in andere klassieke systemen is het in singuliere punten niet meer duidelijk wat de theorie betekent. Aan de andere kant is de natuur quantummechanisch, zodat een realistisch klassiek model altijd de klassieke rand van een quantumtheorie zou moeten zijn. Ik heb al opgemerkt dat quantumsystemen geen singulariteiten kunnen hebben, zodat de klassieke singulariteiten het gevolg moeten zijn



Alain Connes

van het nemen van de klassieke limiet. Op die manier zou de oerknal dus ook niet echt hebben kunnen plaatsvinden; het is een soort illusie die optreedt wanneer we door een klassieke bril naar een bepaalde quantumtheorie kijken. Een ook de singulariteit in het centrum van een zwart gat zou in de quantumgravitatie moeten zijn weggewassen. De quantummechanica geeft in principe een volledige beschrijving van het systeem, die in de klassieke limiet onvolledig wordt.

Om het ontstaan van klassieke singulariteiten vanuit de quantummechanica te kunnen begrijpen moeten we eerst weten wat de quantumtheorie is die een gegeven klassiek model met singulariteiten als klassieke rand heeft. Deze vraag is al moeilijk genoeg zonder singulariteiten; het is het onderwerp van de zogenaamde kwantisatie-theorie.¹⁴ Die theorie is zowel wiskundig als fysisch bijzonder interessant, en vormt dus een mooi onderzoeksgebied voor een mathematisch fysisch. In mijn geval komt hier nog bij dat ik, zoals al gezegd, wil werken aan situaties waarin de fysica haar grenzen heeft bereikt en daardoor de noodzaak tot een diepere wiskundige beschrijving ontstaat. De kwantisatietheorie van klassieke systemen met singulariteiten vormt voor mij dan ook een ideaal terrein.

Dit wil niet zeggen dat ik op dat gebied tot nu toe ook maar iets gepresteerd heb. Ik ben nog niet verder gekomen dan het organiseren van een conferentie over dit thema,²⁸ en daaruit weet ik dat er überhaupt nog niets belangrijks aan is gedaan. Toch ligt het raadsel van het heelal besloten in dit probleem. Uiteraard weten fysici dit; vrijwel al het latere werk van

Hawking gaat bijvoorbeeld over de kwantisatie van singuliere kosmologische modellen. Maar de wiskunde die hij en zijn volgelingen daarbij gebruiken is, in schril contrast tot wat hij in zijn jeugd deed, zo ver beneden peil dat uit dit werk geen enkele conclusie kan worden getrokken. Aan de andere kant is in de zuivere wiskunde zeer veel gedaan aan de studie van singulariteiten op zich, maar is dergelijk werk niet of nauwelijks in verband gebracht met het kwantisatieprobleem, laat staan met de oerknal of met zwarte gaten.

Niet-commutatieve meetkunde

Ik zal nu als afsluiting een methode schetsen waarmee de kwantisatie van singuliere systemen misschien kan worden aangepakt. In deze methode komen vele componenten van mijn wetenschappelijke belangstelling samen, en ik verheug me er dan ook zeer op, hier aan te gaan werken. Ik heb eerder gezegd dat ik werk in de mathematische fysica, waarbij de fysische noch de wiskundige uitgangspunten controversieel zijn, als laf beschouw. Maar zelf ben ik op een andere manier laf, en wel door een wiskundige methode te gebruiken die bijzonder goed in de markt ligt. Ik doel hier op de *niet-commutatieve meetkunde*.

Ik heb al vermeld dat Alain Connes de sekte-leider van de operator-algebraïci is. Hij werd dat door tussen 1970 en 1980 een aantal uitzonderlijk moeilijke problemen op te lossen, waarvan de formulering in feite tot Von Neumann zelf terug ging. Maar in 1980 gaf Connes de theorie van operator-algebra's, en in feite een veel groter deel van de hedendaagse wiskunde, een geheel nieuwe draai. Wat Heisenberg in 1925 had gedaan voor de klassieke mechanica, deed Connes nu voor de klassieke wiskunde, en wel door deze als het ware te kwantiseren.²² Net als Heisenberg had ook Connes uiteraard voorlopers, met name op het gebied van de K-theorie,²⁹ maar hij was onbetwist degene die dit gebied op de kaart heeft gezet, en tevens met vrijwel alle belangrijke ideeën kwam aanzetten. Dit laatste is overigens nog steeds het geval.

Zijn enthousiasme is kinderlijk, en zijn technisch kunnen bovenmenselijk. Deze combinatie maakt Connes bij zijn collega's zeer geliefd. Voor mij is hij in het bijzonder sympathiek omdat hij twijfelt aan de waarde van zijn wiskundige scheppingen. Ik kwam hem in april toevallig tegen in een broodjeszaak in Berkeley. Hij vertelde toen dat hij de week daarna op bezoek zou gaan bij Ed Witten, de paus van de stringtheorie en met Connes de grote trekker van de mathematische fysica.

Mijn onmiddellijke reactie was dat Witten niet lang geleden openlijk op de Nederlandse televisie had verklaard sinds een bepaald artikel van hemzelf in 1983 geen enkele twijfel meer te hebben aan de geldigheid van de stringtheorie.³⁰ Aangezien Connes daar niet in gelooft, en evenmin in de Grote Unificatie der Natuurkrachten die ook door stringtheorie wordt voorspeld, vroeg ik me aldus hardop af wat de zin van dit bezoek zou zijn. Twee verschillende geesten, beiden briljant, zijn nauwelijks denkbaar.

De vraag is hierbij wat naast dergelijke genieën de rol van het voetvolk in de wetenschap is. Zelf tot de laatste groep behorend, heb ik hier vaak over nagedacht. Het antwoord is dat Newton zich vergiste toen hij schreef dat hij verder had gezien dan anderen omdat hij op de schouders van reuzen had gestaan. Juist is de niet eens als grap bedoelde persiflage op Newton van de fysisch Gell-Mann, die eens opmerkte, dat hij verder had gezien dan anderen omdat hij omringd was door dwergen. Indien we in detail kijken wat Connes of Witten tot stand hebben gebracht, zien we dat zij voortdurend gebruik maken van kleine lemmaatjes, tussenresultaten en inzichten van hun minder begaafde collega's.

Zij zijn mede zo indrukwekkend omdat ze alles volgen en begrijpen. Zelfs bij voordrachten van onbekende figuren kan Connes ademloos op de eerste rij zitten luisteren. Van Bobby Fischer is bekend, dat hij zelfs bereid was met obers te schaken, in de hoop nog een ideetje op te pikken. Als deze omgeving van dwergen weg zou vallen, zou de productie van de reuzen ook opdrogen. Wat ook kan gebeuren is dat de laatsten geen belangstelling meer voor de eersten hebben, een verschijnsel dat men dikwijls ziet bij grote fysici op leeftijd. Die worden dan ook door het voetvolk terecht en zonder pardon op een zijspoor gerangeerd.

De motivatie van Connes bij de ontwikkeling van de niet-commutatieve meetkunde was in eerste instantie helemaal niet het revolutionariseren van de wiskunde, maar lag op een technisch vlak. Vrijwel alle voorbeelden die Von Neumann van zijn operator-algebra's gaf maakten gebruik van ergodentheorie. Connes zag in dat ook foliatietheorie interessante voorbeelden opleverde; als Fransman was hij uiteraard vertrouwd met dit gebied van de wiskunde. Hij kreeg toen het geniale idee om de operator-algebra die hij aan een foliatie toekende te zien als een soort quantummechanische beschrijving van de ruimte van bladen van de foliatie, die als klassieke ruim-

te vaak zeer singulier is. Het quantummechanische licht erin, dat de operator-algebra niet-commutatief is, terwijl de algebra van continue functies, die men naïef aan een klassieke ruimte toevoegt, commutatief is.

In de filosofie van Connes is de niet-commutatieve operator-algebra die hij aan een singuliere ruimte toekent nog altijd een beschrijving van de *klassieke* ruimte. Dit is conceptueel misschien verwarrend, maar wiskundig is het volkomen duidelijk. Mijn doel is daarentegen om bepaalde singuliere ruimtes die in de fysica een rol spelen echt te kwantiseren. Dit betekent dus dat ik de reeds niet-commutatieve algebra's die in de niet-commutatieve meetkunde optreden ook nog eens moet 'kwantiseren.' In de traditionele kwantisatie-theorie is deze situatie paradoxaal, maar als je de klassieke mechanica als de rand van de quantummechanica ziet, is er geen enkel probleem.

Technisch gesproken moet hier een zeer specifieke deformatie-theorie van operator-algebra's worden gebruikt, te weten de E-theorie van Connes en Higson.^{22,29} De string-theoretici beginnen net aan K-theorie te wennen, en daar is E-theorie een soort kwadraat van. Tot nu toe is de vooruitgang in de fysica vaak ontstaan door het nemen van de wortel in plaats van het kwadraat, zoals in de Dirac-vergelijking en in het concept van supersymmetrie, maar daar brengt E-theorie mogelijk verandering in. Ik ben in ieder geval benieuwd hoe het E-theoretisch gedeformeerde niet-commutatieve heelal er uit zal zien!

Theoretische versus mathematische fysica

'Wiskunde aan de grenzen van de natuurkunde' het klinkt aardig en ik hoop te hebben uitgelegd wat ik daarmee bedoel. Maar het is zeker niet de enige soort mathematische fysica die ik respecteert. Bij de vraag wat de mathematische fysica respectabel maakt, dringt de vergelijking met de theoretische fysica zich op, het gebied waar ik ooit in ben begonnen. Het grootste verschil tussen de theoretische en de mathematische fysica ligt in het waarheidscriterium. Uitspraken en afleidingen in de theoretische fysica kunnen wiskundig nog zo rammelen, als ze de uitkomst van een experiment correct voorspellen zijn ze waar. De mathematische fysica daarentegen heeft zich het waarheidsbegrip van de wiskunde toegeëigend: een artikel in de mathematische fysica moet fysisch hooguit potentieel relevant zijn, maar wiskundig moet het juist zijn.

Hier wordt overigens door Witten de hand mee gelicht, maar dit recht moet strikt voorbehouden blijven aan dergelijke mensen met

uitzonderlijk inzicht in wat wiskundig mogelijk maar misschien nog niet bewezen is. De fysicus Paul Dirac speelde deze kaart ook met groot succes, en wordt dan ook terecht door zowel fysici als wiskundigen zeer bewonderd.

Zoals onlangs nog benadrukt door Ludwig Faddeev,³¹ zal in ieder geval in de context van de hoge-energie fysica een competitie ontstaan tussen de theoretische en de mathematische fysica. Ik geloof dat de laatste die zal gaan winnen. De wiskundige structuur en correctheid van een fysische theorie zullen bij het opdrogen van experimentele resultaten, dat ons in de hoge-energie fysica vroeg of laat te wachten staat, het belangrijkste criterium zijn om voor die theorie te kiezen. De fysische waarheid van een als finaal bedoelde theorie zullen we evenwel nimmer vast kunnen stellen.

Politiek

Na de bovenstaande speculatie te hebben uitgesproken keer ik nu met beide benen terug op de grond. Een hoogleraar is, of hij het wil of niet, naast wetenschappelijk onderzoeker en docent ook bestuurder. Daar wil ik nu iets over zeggen.

Tot de scheidende minister-president Kok. Als 'landsvader', om een germanisme te gebruiken, verdient u groot respect. Na Rembrandt, Van Gogh, en Cruyff, kunnen we nu als Nederlander in het buitenland weer met iemand voor de dag komen. Het vaak gehoorde verwijt dat u over geen visie zou beschikken is dan ook geheel onjuist. Als geen ander vertegenwoordigt u namelijk de visie dat Nederland een land van *laders en lossers* moet worden. Niet 'Nederland kennisland', een kreet die de nog steeds onder bezuinigingen bloedende universiteiten slechts als affront kunnen beschouwen, maar 'Nederland distributieland!' En zelfs binnen uw visie geniet de overslag van containers klaarblijkelijk de voorkeur boven het openbaar vervoer van personen. Dagelijks is mijn trein te laat, als hij al rijdt. Het achterwege blijven van de noodzakelijke investeringen in het bestaande spoor geschiedde vooral ter financiering van de *Betuwelijn*, het meest waanzinnige infrastructurele project sinds Voorzitter Mao voorstelde om de natuurlijke loop der grote rivieren in China om te keren. Het schitterende landschap tussen Arnhem en Nijmegen, dat mij nu nog dagelijks genoeg verschaft, zal als blijvende herinnering aan u en uw ministers voorgoed worden verwoest.

Tot Collegevoorzitter Noorda. Omdat mijn beoogde trein niet reed, moest ik het begin van uw rede bij de opening van het huidige academisch jaar missen, maar wat ik nog kon horen was mij uit het hart gegrepen. Zeer juist was uw kritiek op de overheid, dat het herverdelen van onderzoeksgelden door middel van trendy stimuleringsprogramma's het tegendeel van *goed* is, namelijk *goed bedoeld*. Hoe merkwaardig in dit licht dat uw eigen College van Bestuur met een cumulatieve jaarlijkse bezuiniging van 2% zeer goed lopende onderzoeksinstituten als het Korteweg-De Vries Instituut voor Wiskunde financieel met de rug tegen de muur zet, met het doel zaken als *Aidsonderzoek* aan de UvA te stimuleren!

Tot dekaan Hoogland. Als student zat ik in alle mogelijke raden die al lang niet meer bestaan en tot voor kort wees ik het *Amsterdamse model* met de haar zo eigen *baasjescultuur* vol ergernis af. Maar mijn benoeming heeft me de ogen geopend voor de noodzaak tot efficiëntie en krachtige besluitvorming, waarbij ik overigens op wil merken dat toch nog twee studenten zijn geraadpleegd. Ik zal mij dan ook verder loyaal opstellen, mede onder het motto: *If you can't beat 'em, join 'em*.

Tot NWO. Uw *Thema's met Talent* bevatten geen enkel wiskundig onderwerp, en afgezien van de modieuze nanotechnologie ook geen fysisch onderzoeksgebied. Ik heb in deze oratie beargumenteerd dat de naar mijn smaak meest invloedrijke man van de 20e eeuw een wiskundige was, terwijl degene die officieel is gekozen het beroep van theoretisch fysicus uitoefende. De belangrijkste technologische ontwikkeling sinds de computer, het internet, komt mede voort uit de hoge-energiefysica. Geeft dit u niet te denken?

Afgezien hiervan heb ik overigens niets dan lof voor NWO en zo mogelijk nog meer voor haar schoondochter de FOM; ik mag dan ook bepaald niet klagen over de steun uit de tweede geldstroom die ik tot nu toe heb mogen ontvangen. Toch geniet ik iedere maand weer als Ad Lagendijk u in de *Volkskrant* weer in uw hemd zet!

Tot de UvA, NWO, en de EC. Alle drie legt u tegenwoordig strategische criteria aan ter verhoging van de kans op, en soms zelfs als enige mogelijkheid tot financiering van onderzoeksvorstellen. De zuivere wiskunde en de mathematische fysica kunnen onmogelijk aan deze criteria voldoen zonder zichzelf uit te verkopen. Deze gebieden staan zo van drie onafhankelijke kanten onder druk. Als de wis-

kunde of de mathematische fysica wél bij de Thema's met Talent of andere strategische onderwerpen had gezeten was ik overigens wel rijker, maar nauwelijks gelukkiger geweest. Of het veld nu vooraf wordt geraadpleegd of niet, het aanwijzen van speciale aandachtsgebieden in de wetenschap heeft tot nu toe met name de atoombom en de vanuit wetenschappelijk oogpunt idiote vluchten naar de maan opgeleverd.

Mijn eerste daad als bestuurder van het FOM-GBE Samenwerkingsverband Mathematische Fysica was het afschaffen van de zogenaamde *Speerpunten*.

Dankwoord

Omdat ik ondanks het zojuist gezegde vandaag in een uitstekende bui ben, wil ik, zo-

als de traditie overigens ook voorschrijft, deze oratie afsluiten met een dankwoord.

De stamvader van het geslacht *Landsman* was de zeerover *Ivandirkie*, die voor zijn bescherming van de Nederlandse koopvaardij-schepen door de overheid werd beloond met een landgoed in het Westfriesse Jisp. Hem zou ik dus voor mijn bestaan en welvaart moeten bedanken. Omdat ik zo nog wel even door zou kunnen gaan, beperk ik mij tot de drie personen die de meest recente fase in mijn loopbaan mogelijk gemaakt dan wel veraangenaamd hebben.

Robbert Dijkgraaf en Tom Koornwinder van het Korteweg de Vries Instituut voor Wiskunde van de Universiteit van Amsterdam wil ik ex aequo noemen. Zij hebben zowel mijn komst van Cambridge naar Amsterdam mogelijk ge-

maakt, overigens ondersteund door een Fellowship van de KNAW, als mijn huidige benoeming geïnitieerd. En dat nog wel ondanks mijn weinig enthousiaste houding ten opzichte van zowel de stringtheorie als een aantal bestuurlijke ontwikkelingen binnen ons instituut. Hier past dus zowel dank als respect.

Omdat vrijwel alle uitspraken van de theoretische natuurkunde logisch gezien contradicties zijn, is het opmerkelijk dat een theoretisch fysicus en een logicus toch zaken kunnen doen. Aan Ieke Moerdijk dank ik het feit dat ik mijn onderzoeksbelangstelling in Nederland tot op zekere hoogte kan delen, waarbij het een bijzonder genoeg was de opkomst van Marius Crainic mee te maken. ☞

Noten

- 1 <http://www.time.com/time/time100/poc>
- 2 R. Rhodes, *The Making of the Atomic Bomb* (Simon and Schuster, New York, 1986).
- 3 A. Fölsing, *Albert Einstein: Eine Biographie*, Hoofdstuk VII (Suhrkamp, Frankfurt, 1993).
- 4 H.H. Goldstine, *The Computer from Pascal to von Neumann* (Princeton University Press, Princeton, 1972) en W. Aspray, *John von Neumann and the Origins of Modern Computing* (MIT Press, Cambridge (MA), 1990).
- 5 S.J. Heims, *John von Neumann and Norbert Wiener: From Mathematics to the Technologies of Life and Death* (MIT Press, Cambridge (MA), 1980) en N. Macrea, *John von Neumann: The Scientific Genius Who Pioneered the Modern Computer, Game Theory, Nuclear Deterrence, and Much More* (Pantheon, New York, 1992). Deze twee boeken nemen diametraal tegenovergestelde standpunten in. Interessant zijn in dit opzicht ook de vele passages over Von Neumann in S. Ulam, *Adventures of a Mathematician* (Charles Scribner and Sons, New York, 1976).
- 6 *Bull. Amer. Math. Soc.* **64**, no. 3, part 2 (1958) is geheel aan het wiskundige werk van Von Neumann gewijd, evenals *The Legacy of John von Neumann* (American Mathematical Society, Providence, RI, 1990).
- 7 Zie met name Macrea, loc. cit.
- 8 J. Mehra and H. Reichenberg, *The Historical Development of Quantum Theory* (Springer, New York, 1982), waarvan Vol. 2 aan het werk van Heisenberg, en Vol. 5 aan dat van Schrödinger is gewijd.
- 9 W. Moore, *Schrödinger: Life and Thought* (Cambridge University Press, New York, 1989).
- 10 D.C. Cassidy, *Uncertainty: the Life and Science of Werner Heisenberg* (Freeman, New York, 1992).
- 11 Zie N.P. Landsman, 'Getting even with Heisenberg,' te verschijnen in *Stud. Hist. Phil. Mod. Phys.* **B**, voor een bespreking van de literatuur over dit onderwerp.
- 12 In het licht hiervan, alsmede van zijn bijdragen aan de theoretische fysica, die niet of nauwelijks onderdoen voor die van Einstein, zou ook Heisenberg een goede kandidaat voor *Person of the 20th Century* zijn.
- 13 *De Toekomst van het Wiskunde-Onderzoek in Nederland*, Verkenningen, deel 1 (KNAW, Amsterdam, 1999), p. 42.
- 14 N.P. Landsman, *Mathematical Topics Between Classical and Quantum Mechanics* (Springer, New York, 1998).
- 15 Zie M. Rédei, 'Why John von Neumann did not like the Hilbert space formalism of quantum mechanics (and what he liked instead),' *Stud. Hist. Philos. Modern Phys.* **27** 493–510 (1997) en J. Bub, 'Hidden variables and quantum mechanics – a sceptical review,' *Erkenntnis* **16**, 275–293 (1981).
- 16 J. von Neumann, *Collected Works, Vol. IV: Continuous Geometry and Other Topics*, ed. A.H. Taub (Pergamon, Oxford, 1962). Zie ook J. von Neumann, 'Continuous geometries with a transition probability,' *Mem. Amer. Math. Soc.* **252**, 1–210 (1981) (ed. I.S. Halperin; manuscript uit 1937).
- 17 J. von Neumann, *Collected Works, Vol. III: Rings of Operators*, ed. A.H. Taub (Pergamon, Oxford, 1962).
- 18 I.E. Segal, 'Review of *Noncommutative Geometry* by A. Connes,' *Bull. Amer. Math. Soc.* **33**, 459–466 (1996).
- 19 I.M. Gelfand and M. Neumark, 'On the imbedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space,' *Math. Sbornik* **12**, 197–213 (1943).
- 20 R.V. Kadison, 'Operator algebras — the first forty years,' *Operator Algebras and Applications, Proc. Symp. Pure Math.* **38(1)**, 1–18 (American Mathematical Society, Providence, 1982).
- 21 Voor de ontmaskering van de Franse intelligentia zie L. van Middelaar, *Politicide: De Moord op de Politiek in de Franse Filosofie* (Van Gennep, Amsterdam, 1999) en A. Sokal en J. Bricmont, *Intellectual Impostures* (Profile Books, London, 1998).
- 22 A. Connes, *Noncommutative Geometry* (Academic Press, San Diego, 1994).
- 23 R. Haag, *Local Quantum Physics*, 2nd ed. (Springer, Berlin, 1996).
- 24 N.P. Landsman, *Concepts in Thermal Field Theory*, Academisch Proefschrift (Universiteit van Amsterdam, 1989).
- 25 P.A.M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics* (Clarendon Press, Oxford, 1930)
- 26 A.A. Kirillov, 'Local Lie algebras,' *Russ. Math. Surv.* **31**, 55–75 (1976) en A. Lichnerowicz, 'Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées,' *J. Diff. Geom.* **12**, 253–300 (1977).
- 27 Dit is met name benadrukt door J.E. Marsden en zijn school; zie zijn voorwoord met A. Weinstein in het in de volgende noot geciteerde boek voor volledige referenties. Zie ook R.H. Cushman and L.M. Bates, *Global Aspects of Integrable Systems* (Birkhäuser, Basel, 1997).
- 28 N.P. Landsman, M. Pflaum, and M. Schlichenmaier (eds.), *Quantization of Singular Symplectic Quotients* (Birkhäuser, Basel, 2001).
- 29 B. Blackadar, *K-theory for Operator Algebras*, 2nd ed. (Cambridge University Press, Cambridge, 1999).
- 30 Zie het interview met Witten in W. Kayzer, *Het Boek van de Schoonheid en de Troost* (Contact, Amsterdam, 2000). Ik neem aan dat Witten hier doelt op L. Alvarez-Gaumé and E. Witten, Gravitational anomalies, *Nucl. Phys.* **B234**, 269–330 (1983). Het zelfde beeld komt naar voren in het onthullende interview met Witten in het algemeen verguisde maar mijns inziens zeer trefende boek van J. Horgan, *The End of Science: Facing the Limits of Knowledge in the Twilight of the Scientific Age* (Broadway Books, New York, 1997).
- 31 L.D. Faddeev, 'Modern Mathematical Physics: What It Should Be,' in *Mathematical Physics 2000*, eds. A. Fokas et al. (Imperial College Press, London, 2000).