Peter Spreij
Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Universiteit van Amsterdam
Plantage Muidergracht 24, 1018 TV Amsterdam
spreij@science.uva.nl

De Ito-formule zonder stochastische integralen

De verzegelde brief die Wolfgang Doeblin in februari 1940 van het front naar de Académie des Sciences in Parijs zond bevatte een wiskundig manuscript waarin ondermeer een versie van de Itô-integraalvergelijking te herkennen valt. Doeblin was zijn tijd ver vooruit. Peter Spreij geeft een korte toelichting op de wiskundige inhoud en gaat ook in op de verschillen tussen de benaderingen van Doeblin en van Itô.

Het wonderbaarlijke aan het manuscript van Wolfgang Doeblin, dat jarenlang als verzegelde envelop (*pli cacheté*) bij de Académie des sciences aan de belangstelling van de buitenwereld onttrokken was, is de rijkdom van de inhoud. Is verreweg het grootste deel van de aldaar gedeponeerde verzegelde enveloppen de moeite van het openen nauwelijks waard, in het geval van Doeblins manuscript bleken er tal van wiskundige resultaten in te staan waaruit bleek dat de auteur zich ook aan het wetenschappelijke front van zijn tijd bevond. In het korte bestek van deze bijdrage is het ondoenlijk om op alle aspecten in te gaan, maar beperken we ons tot een van de meest spectaculaire vondsten, te weten een versie van de Itô-formule. Opmerkelijk hieraan is dat we deze formule nu kennen in de taal van de stochastische calculus, in het bijzonder in termen van stochastische integralen. Deze zijn door de Japanse wiskundige Itô in de jaren veertig van de vorige eeuw geïntroduceerd, dus na het verscheiden van Doeblin, terwijl wat nu bekend staat als de Itô-formule pas in het begin van de jaren vijftig werd gepubliceerd.

We gaan eerst in op de titel van zijn manuscript, *Sur l'équation de Kolmogoroff*. Eerder had Doeblin al twee bijdragen in de *Comptes rendus* onder dezelfde titel gepubliceerd, alleen is het niet direct duidelijk op welke vergelijking de titel van de verzegelde envelop slaat. Eén mogelijkheid, de eerste vergelijking in het manuscript van Doeblin, is (we permitteren ons hier en ook verder notatie die soms afwijkt van de originele versie)

$$F(x,y,s,t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(z,y,u,t)F(x,dz,s,u),\ s < u < t. \tag{1}$$

Geven we nu met $X(t)$ de plaats op tijdstip t aan van een deeltje dat zich in $\mathbf{R}$ stochastisch als een Markov-proces beweegt, dan is interpretatie van $F(x,y,s,t)$ de voorwaardelijke kans $\mathbf{P}(X(t) \leq y \mid X(s) = x)$. Vergelijking (1) heet ook wel de Chapman- of Chapman-Kolmogorov-vergelijking. In het artikel van Doeblin wordt op F een aantal condities gelegd, waarvan we alleen het bestaan van de limieten, voor geschikte functies a en σ,

$$\lim_{t\to s} \frac{1}{t-s} \int_{|y-x|<1} (y-x)F(x,dy,s,t) = a(x,s),$$
$$\lim_{t\to s} \frac{1}{t-s} \int_{|y-x|<1} (y-x)^2 F(x,dy,s,t) = \sigma^2(x,s)$$

reproduceren. Deze functies noemen we in het vervolg de lokale karakteristieken. We veronderstellen voorts dat X continu verandert.

Behalve dat F voldoet aan vergelijking (1) geldt tevens dat F een oplossing is van de partiële differentiaalvergelijking (met s en x als variabelen, y en t als vaste parameters)

$$Lu := u_s + au_x + \tfrac{1}{2}\sigma^2 u_{xx} = 0. \tag{2}$$

Vergelijking (2) staat bekend als Kolmogorovs (achterwaartse) partiële differentiaalvergelijking, kortweg ook aangeduid als Kolmogorovs vergelijking. De titel lijkt op deze vergelijking, die overigens in het artikel niet te vinden is, betrekking te hebben. Voor het vervolg is het niet van belang of de titel slaat op (1) dan wel (2), gezien het verband tussen beide vergelijkingen.

Wat bekend staat als het probleem van Kolmogorov is het bij gegeven lokale karakteristieken construeren van een stochastisch proces X waarvan de bijbehorende functie F voldoet aan (1), en het analyseren van dit proces. Aan dit probleem is in de jaren dertig door vele wiskundigen gewerkt via een analytische aanpak (methoden uit de theorie der partiële differentiaalvergelijkingen).

Doeblin volgde daarentegen (ook al in eerdere publicaties) een probabilistische aanpak door zich te richten op het onderliggende proces X en daar ook expliciet mee te werken. Voor processen X met continue paden en $X(0) = 0$ bewees hij onder meer dat het proces Z gedefinieerd door $Z(t) = X(t) - \int_0^t a(X(s),s)\,ds$

evenals het proces gegeven door $Z(t)^2 - H(t)$ met $H(t) = \int_0^t \sigma^2(X(s),s)\,ds$ een *martingaal* is, hoewel deze terminologie in het manuscript niet voorkomt en het martingaalbegrip in die tijd nog nauwelijks ontwikkeld was. Doeblin bewees, wat meer in detail, de representatie $Z(t) = \beta(H(t))$, waarbij β een Brownse beweging voorstelt. Of liever, hij laat zien dat $Z(\theta(\cdot))$ een Brownse beweging is, waarbij θ de inverse afbeelding is van H. Dit resultaat staat sinds 1965 in algemenere vorm bekend als de Dubins-Schwarz-Dambis representatie: elke continue martingaal is op te vatten als een Brownse beweging geïndiceerd door een zekere stochastische klok. Samenvattend kunnen we nu schrijven

$$X(t) = \beta\big(H(t)\big) + \int_0^t a(X(s),s)\,ds. \tag{3}$$

Een van de volgende problemen die Doeblin zich stelde, was het vinden van de lokale karakteristieken van een proces Y dat gedefinieerd wordt door $Y(t) = \phi(X(t),t)$ voor een functie $\phi \in C^{2,1}(\mathbf{R},\mathbf{R}^+)$, die monotoon is in de eerste variabele. De meest verrassende ontdekking in het artikel van Doeblin is dat de lokale karakteristieken van Y, $\bar{a}$ en $\bar{\sigma}$, kunnen worden geschreven als

$$\begin{aligned}\bar{a}(x,s) &= L\phi(x,s)\\ \bar{\sigma}(x,s) &= \sigma(x,s)\phi_x(x,s).\end{aligned}$$

Als gevolg hiervan kunnen we het proces Y beschrijven door

$$Y(t) = Y(0) + \delta\big(\bar{H}(t)\big) + \int_0^t \bar{a}(X(s),s)\,ds, \tag{4}$$

met $\bar{H}(t) = \int_0^t \bar{\sigma}^2(X(s),s)\,ds$ en δ een Brownse beweging.

We beschouwen nu de aanpak en de resultaten van Itô. Hij representeerde het proces X dat we hierboven tegenkwamen als oplossing van de *stochastische integraalvergelijking*

$$X(t) = \int_0^t \sigma(X(s),s)\,dB(s) + \int_0^t a(X(s),s)\,ds, \tag{5}$$

waarin B een Brownse beweging voorstelt. In deze vergelijking is de eerste integraal een *stochastische integraal*, een concept, zoals hierboven reeds genoemd, dat Itô in de veertiger jaren introduceerde en verder ontwikkelde. Met een functie $\phi \in C^{2,1}(\mathbf{R},\mathbf{R}^+)$ verkreeg Itô voor het proces Y de representatie

$$Y(t) = Y(0) + \int_0^t \bar{\sigma}(X(s),s)\,dB(s) + \int_0^t \bar{a}(X(s),s)\,ds. \tag{6}$$

Hiermee zien we dus de overeenkomsten en verschillen tussen de resultaten van Doeblin en van Itô. De representaties zijn equivalent (vergelijk (3) met (5) en (4) met (6)), maar terwijl Itô zijn bevindingen publiceerde in termen van stochastische integralen, gebruikte Doeblin Brownse bewegingen met een stochastische tijdsparameter. De importantie van de Itô-formule werd pas in de loop van de jaren zestig algemeen geaccepteerd, onder meer als onmisbaar technisch gereedschap bij de ontwikkeling van de stochastische analyse en het toepassen van stochastische differentiaalvergelijkingen, bijvoorbeeld in de technische wetenschappen vanaf de jaren zestig en de financiële wiskunde vanaf de jaren tachtig.

foto: collectie Beaujot

Wolfgang Doeblin, telegrafist in Sécheval

Referenties

1 B. Bru, M. Yor, Some comments on the Pli cacheté n°11.668 by W. Doeblin: Sur l'équation de Kolmoroff, *Prépublication du Laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires* n°672 (2001)

2 *Comptes rendus de l'Académie des sciences, Série I*, tome 331 (2000).