UWC Universitaire Wiskunde Competitie

De Universitaire Wiskunde Competitie (UWC) is een ladderwedstrijd voor studenten, georganiseerd in samenwerking met de Vlaamse Wiskunde Olympiade. De opgaven worden tevens gepubliceerd op de internetpagina http://academics.its.tudelft.nl/uwc

Ieder nummer bevat de ladderopgaven A, B, en C waarvoor respectievelijk 30, 40 en 50 punten kunnen worden behaald. Daarnaast zijn er respectievelijk 6, 8 en 10 extra punten te winnen voor elegantie en generalisatie. Per nummer worden twee prijzen van 100 Euro toegekend: één aan de aanvoerder van de ladder (die daarna weer onderaan begint), en één aan de inzender van de oplossing die de meeste punten behaald heeft (die dan geen punten voor de ladder krijgt). Daarnaast zal twee maal per jaar een ster-opgave worden aangeboden waarvan de redactie geen oplossing bekend is. Voor de eerst ontvangen correcte oplossing van deze ster-opgave wordt eveneens 100 Euro toegekend. Groepsinzendingen zijn toegestaan. Elektronische inzending in LaTeX wordt op prijs gesteld. De inzendtermijn voor de oplossingen sluit op 1 februari 2002. Voor een ster-opgave geldt een inzendtermijn van een jaar.

*Eindredactie: Jan van Neerven
Redactieadres: Universitaire Wiskunde Competitie
Vakgroep Toegepaste Wiskundige Analyse
Technische Universiteit Delft
Mekelweg 4 (HB 04.030), 2628 CD Delft
j.vanneerven@its.tudelft.nl*

De Universitaire Wiskunde Competitie wordt gesponsord door Optiver Derivatives Trading en wordt tevens ondersteund door bijdragen van de Nederlandse Onderwijs Commissie voor Wiskunde en de Vereniging voor Studie- en Studentenbelangen te Delft.

Opgave A

Zij $a > 0$ een positief reëel getal. Een *maximaal termproduct* van a is een product van reële getallen $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$ zo dat

$$\begin{cases} a_i > 0 \text{ voor alle } i = 1, \ldots, n, \\ a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a, \\ a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \text{ is zo groot mogelijk.} \end{cases}$$

Welke $a > 0$ hebben meer dan één maximaal termproduct?

Opgave B

Zij $x_1 = 1$ en definieer inductief:

$$x_{n+1} = x_n + \sqrt{x_n} \qquad (n \geq 1).$$

Ga na voor welke reële $p > 0$ de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n^p}$ convergeert.

Opgave C

Zij p een oneven priemgetal. Een polynoom f met geheeltallige coëfficiënten heeft graad kleiner dan $p - 1$ en heeft de eigenschap dat

$$\{f(1), f(2), \ldots, f(p-1)\} = \{1, 2, \ldots, p-1\}.$$

Toon aan dat $f(0)$ een geheel veelvoud is van p.

Editie 2001/2

Op de ronde 2001/2 ontvingen we 4 inzendingen.

Opgave 2001/2-A

Teken in een cirkel een regelmatige zeshoek. Beschrijf met de hoekpunten van deze zeshoek als middelpunten zes cirkels met een straal gelijk aan de straal van de eerste cirkel. Binnen de eerste cirkel ontstaat een bloemetje. Buiten de eerste cirkel ontstaan zes snijpunten van de getrokken cirkels. Kies deze zes hoekpunten weer als middelpunten van nieuwe cirkels, weer met dezelfde straal en teken weer de betreffende veelhoek. Zet dit procédé voort en beredeneer de structuur van de figuur die ontstaat.

Oplossing De bedoelde snijpunten van cirkels en dus hoekpunten van veelhoeken zijn in het vlak te beschrijven met een coördinatenstelsel met assen onder 60^o. De coördinaten van de punten zijn dan gehele getallen (m, n). Het kwadraat van de afstand tot de oorsprong (het middelpunt van de cirkel) is gelijk aan $m^2 - mn + n^2$. Het aantal punten op de cirkels is dus het aantal geheeltallige oplossingen van de vergelijking $m^2 - mn + n^2 = N$. Elementaire overwegingen laten zien dat dit aantal gelijk is aan $6 \sum_{d|N} \varepsilon(d)$, met

$$\begin{aligned} \varepsilon(d) &= 0, & d &\equiv 0 \bmod 3; \\ \varepsilon(d) &= 1, & d &\equiv 1 \bmod 3; \\ \varepsilon(d) &= -1, & d &\equiv 2 \bmod 3. \end{aligned}$$

UWC oplossingen

Opgave 2001/2-B
Zij $\mathbf{Q}[X_1, \ldots, X_n]$ de ring van polynomen met rationale coëfficiënten in de onbekenden $X_1, \ldots, X_n$. We noemen $p \in \mathbf{Q}[X_1, \ldots, X_n]$ *homogeen van graad* $m \geq 1$ als

$$p(tX_1, \ldots, tX_n) = t^m p(X_1, \ldots, X_n)$$

voor alle $t \in \mathbf{Q}$. De deelverzameling van alle polynomen die homogeen zijn van graad m noteren we als $\mathbf{Q}^{(m)}[X_1, \ldots, X_n]$.
Uit de identiteit

$$X_1 X_2 = \tfrac{1}{2}(X_1 + X_2)^2 - \tfrac{1}{2}X_1^2 - \tfrac{1}{2}X_2^2$$

volgt meteen dat ieder polynoom $p \in \mathbf{Q}^{(2)}[X_1, X_2]$ geschreven kan worden als een $\mathbf{Q}$-lineaire combinatie van kwadraten van polynomen in $\mathbf{Q}^{(1)}[X_1, X_2]$.
Toon aan: voor alle $m, n \geq 1$ kan ieder polynoom $p \in \mathbf{Q}^{(m)}[X_1, \ldots, X_n]$ geschreven kan worden als een $\mathbf{Q}$-lineaire combinatie van m-de machten van polynomen in $\mathbf{Q}^{(1)}[X_1, \ldots, X_n]$.

Oplossing De volgende uitwerking is gebaseerd op de oplossing van Filip De Smet.
We bewijzen eerst het geval $n = 2$. Zij V de $(m+1)$-dimensionale vectorruimte van alle m-homogene polynomen in X_1 en X_2; een basis voor V wordt gegeven door door de polynomen $p_j = \binom{m}{j} X_1^{m-j} X_2^j$ $(j = 0, \ldots, m)$. Zij W de deelruimte van V opgespannen door de m-homogene polynomen

$$P_k = (X_1 + a_k X_2)^m = \sum_{j=0}^{m} a_k^j p_j \qquad (k = 0, \ldots, m),$$

waarbij $a_1, \ldots, a_m$ vast gekozen, onderling verschillende gehele getallen zijn. We willen aantonen dat $W = V$. Rekenend in de coordinaten behorend bij de basis $\{p_0, \ldots, p_m\}$ moeten we laten zien dat het lineaire opspansel van de vectoren $\mathbf{a}_k = (1, a_k, a_k^2, \ldots, a_k^m)^T$ alle eenheidsvectoren $\mathbf{e}_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^T$ (met de 1 op de j-de plaats) bevat. Dit is precies dan het geval wanneer de matrix $A = (\mathbf{a}_0, \ldots, \mathbf{a}_m)$ inverteerbaar is. Nu is

$$\det A = \prod_{i<j} (a_j - a_i),$$

en omdat de a_k alle verschillend zijn is inderdaad $\det A \neq 0$.
Het geval $n \geq 3$ volgt nu met inductie. Stel dat de bewering just is voor $n = 2, \ldots, N$. We laten zien dat het $m-$homogene polynoom $X_1^{j_1} \cdot \ldots \cdot X_N^{j_N} \cdot X_{N+1}^{j_{N+1}}$, met $j_1 + \ldots + j_N + j_{N+1} = m$, een lineaire combinatie is van $1-$homogene polynomen in de variabelen $X_1, \ldots, X_N, X_{N+1}$.
Uit de inductieveronderstelling (met $n = N$) volgt dat

$$X_1^{j_1} \cdot \ldots \cdot X_N^{j_N} = \sum_{k=1}^{K} b_k \, p_k^{j_1 + \ldots + j_N}(X_1, \ldots, X_N),$$

voor zekere $b_k \in \mathbf{Q}$ en $p_k \in \mathbf{Q}^{(1)}[X_1, \ldots, X_N]$. Eveneens uit de inductieveronderstelling (met $n = 2$) volgt dat

$$Y^{j_1 + \ldots + j_N} X_{N+1}^{j_{N+1}} = \sum_{l=1}^{L} c_l \, q_l^m(Y, X_{N+1}),$$

voor zekere $c_l \in \mathbf{Q}$ en $q_l \in \mathbf{Q}^{(1)}[Y, X_{N+1}]$. Maar dan vinden we

$$\begin{aligned} X_1^{j_1} \cdot \ldots \cdot X_N^{j_N} \cdot X_{N+1}^{j_{N+1}} &= \sum_{k=1}^{K} b_k \, p_k^{j_1 + \ldots + j_N}(X_1, \ldots, X_N) \cdot X_{N+1}^{j_{N+1}} \\ &= \sum_{k=1}^{K} \sum_{l=1}^{L} b_k c_l \, q_l^m\big(p_k(X_1, \ldots, X_N), X_{N+1}\big). \end{aligned}$$

UWC
oplossingen

Uit
$$\begin{aligned} q_l\left(p_k(tX_1,\ldots,tX_N),tX_{N+1}\right) &= q_l\left(t\,p_k(X_1,\ldots,X_N),tX_{N+1}\right) \\ &= t\,q_l\left(p_k(X_1,\ldots,X_N),X_{N+1}\right), \end{aligned}$$
volgt dat $q_l\left(p_k(X_1,\ldots,X_N),X_{N+1}\right) \in \mathbf{Q}^{(1)}[X_1,\ldots,X_N,X_{N+1}]$. Dit bewijst de bewering voor $n = N+1$.
Tenslotte vermelden we dat Steven Lippens zonder bewijs een expliciete formule geeft voor de representatie van het polynoom $X_1^{j_1}\cdot\ldots\cdot X_n^{j_n}$, met $j_1+\ldots+j_n = m$, als $\mathbf{Q}$-lineaire combinatie van m-de machten van polynomen in $\mathbf{Q}^{(1)}[X_1,\ldots,X_n]$.

Opgave 2001/2-C
Toon aan dat de volgende functie
$$f(x) \;=\; \frac{1}{x}\ln\left(\frac{\ln(1+e^x)}{\ln(1+e^{-x})}\right)$$
strikt dalend is op $(0,\infty)$.

Oplossing We geven de oplossing van Mark Veraar.
Er geldt
$$f(x) = -\frac{g(x)}{x}, \quad \text{met } g(x) = \ln\left(1-\frac{x}{\ln\left(e^x+1\right)}\right).$$
Differentiëren geeft
$$f'(x) = -\frac{g'(x)}{x}+\frac{g(x)}{x^2} = \frac{-xg'(x)+g(x)}{x^2}.$$
Om aan te tonen dat f strikt daalt volstaat het te laten zien dat $G(x) := -xg'(x)+g(x) < 0$ voor alle $x>0$. Wegens $G(0)=0$ is het genoeg te laten zien dat $G'(x) = g''(x) < 0$ voor alle $x > 0$.
Voor $y > 1$ definiëren we $h(y) = g'(\ln y)$. Elementair rekenwerk geeft
$$\frac{g''(\ln(y))}{y} = h'(y) = \frac{k(y)}{y(y+1)^2\ln^2(y+1)\ln^2\left(\frac{y+1}{y}\right)}$$
waarbij
$$k(y) = y\ln(y+1)\ln(y)\ln\left(\frac{y+1}{y}\right)+y^2\ln^2\left(\frac{y+1}{y}\right)-\ln^2(y+1).$$
Omdat de noemer van (1) strikt positief is, volstaat het te bewijzen dat $k(y) > 0$ voor alle $y > 1$. Omdat $k(1) = 0$ volgt dat het volstaat te bewijzen dat $k'(y) > 0$ voor alle $y > 1$.
Differentiëren en herschrijven geeft
$$k'(y) = \eta_1(y)\zeta_1(y)+\frac{\eta_2(y)\zeta_2(y)}{y+1},$$
waarbij
$$\begin{aligned} \eta_1(y) &= \ln(y+1)\ln(y), \\ \eta_2(y) &= \ln(y+1)+y\ln\left(\frac{y+1}{y}\right), \\ \zeta_1(y) &= \ln\left(\frac{y+1}{y}\right)-\frac{1}{y+1}, \\ \zeta_2(y) &= 2y\ln\left(\frac{y+1}{y}\right)+\ln\left(\frac{y+1}{y}\right)-2. \end{aligned}$$
Het is duidelijk dat $\eta_1(y) > 0$ en $\eta_2(y) > 0$ voor alle $y > 1$. We laten vervolgens zien dat ook $\zeta_1(y) > 0$ en $\zeta_2(y) > 0$ voor alle $y > 1$. Dan volgt dat $k'(y) > 0$ voor $y > 1$ en zijn we klaar.
Voor alle $y > 1$ is $\zeta_1'(y) < 0$ en dus is ζ_1 strikt dalend. Bovendien geldt $\zeta_1(1) > 0$ en $\lim_{y\to\infty}\zeta_1(y) = 0$. Dus is $\zeta_1(y) > 0$ voor alle $y > 1$.

UWC oplossingen

Tenslotte tonen we aan dat $\zeta_2(y) > 0$ voor alle $y > 1$. Voor $y > 1$ geldt

$$\ln\left(\frac{y+1}{y}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{y}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{ny^n}.$$

Dit levert

$$\zeta_2(y) = \sum_{n=1}^{\infty} s(n,y), \quad \text{met } s(n,y) = (-1)^n \frac{n-1}{n(n+1)}\frac{1}{y^n}.$$

Deze reeks absoluut convergeert voor iedere $y > 1$. Nu is

$$s(2n,y) + s(2n+1,y) = \frac{4n^2(y-1)+(2n-2)y}{2n(2n+1)(2n+2)y^{2n+1}} > 0.$$

Dus geldt ook $\zeta_2(y) > 0$ voor alle $y > 1$.

Uitslag Editie 2001/2

De weging van de opgaven is 3 : 4 : 5.

	Naam	A	B	C	*Totaal*
1.	Mark Veraar (Delft)	8	9	8	100
2.	Hendrik Hubrechts e.a. (Leuven)	7	6	8	85
3.	Filip De Smet (Gent)	-	8	3	47
4.	Steven Lippens (Gent)	8	4	1	45

Ladderstand Universitaire Wiskunde Competitie na vier ronden

We vermelden alleen de top 5.

De complete ladderstand is te vinden op de UWC-homepage.

	Naam	*Punten*
1.	Hendrik Hubrechts e.a.	357
2.	Steven Lippens	301
3.	Herbert Beltman	198
4.	Joeri Van der Veken e.a.	185
5.	Stijn Symens	143