Boekbesprekingen

Book Reviews

Alle in de vijfde serie van het NAW verschenen boekbesprekingen zijn te vinden op onderstaande webpagina. Tevens staat daar een lijst met ter recensie aangeboden congresverslagen en eventueel andere boeken. Indien u er prijs op stelt een van deze verslagen te bespreken, meld dit dan binnen een maand na verschijnen van dit nummer (bij voorkeur per e-mail) op onderstaand adres.

Eindredactie: Jaap Top
Redactieadres: Boekbesprekingen WG
Instituut voor wiskunde en informatica
Postbus 800, 9700 AV Groningen
Webpagina: http://www.math.rug.nl/revwg/
E-mail: revwg@math.rug.nl

C.J. Scriba en P. Schreiber
5000 Jahre Geometrie: Geschichte, Kulturen, Menschen
Berlijn: Springer-Verlag, 2001
596 p., prijs DM 69,–
ISBN 3-540-67924-3

De twee schrijvers presenteren in dit boek een aantrekkelijk overzicht van meetkunde van het oude Egypte tot en met de twintigste eeuw. Het boek is voor een tamelijk breed publiek bedoeld, en de auteurs vatten het begrip meetkunde ruim op. Zij besteden speciale aandacht aan 'onbewuste wiskunde', die niet in boeken is beschreven maar wel te zien is in kunstwerken.

Het gedeelte tot en met de middeleeuwen wordt grotendeels behandeld door de eerste auteur, emeritus-hoogleraar geschiedenis van de wiskunde te Hamburg. De nadruk ligt hierbij op praktische toepassingen en ook op cultuurgebieden die vaak niet met meetkunde worden geassocieerd, zoals Rome, China, India en Japan. Dit gedeelte van het boek is kennelijk niet bedoeld als compleet overzicht; zo wordt de herkomst van de verdeling van de cirkel in 360 graden niet uitgelegd, en ook de bepaling van de oppervlakte van de bol door Archimedes komt merkwaardigerwijze niet aan de orde. In een intermezzo van de hand van de tweede auteur wordt Euclides als held en pionier opgevoerd, hoewel vaststaat dat hij in de Elementen qua inhoud en vorm veel aan eerdere wiskundigen heeft ontleend.

In de tweede helft van het boek geeft de tweede auteur, hoogleraar meetkunde en grondslagen van de wiskunde, een met veel inzicht geschreven overzicht van de geschiedenis van de meetkunde van 1450 tot en met de twintigste eeuw. In een recensie van deze omvang kunnen we uiteraard maar enkele voorbeelden bespreken. Schreiber heeft een speciale interesse voor de relatie tussen wiskunde en kunst in de Renaissance, en hij heeft zijn betoog met prachtige platen geïllustreerd. Over dit grensgebied met onbewuste wiskunde is nog veel te ontdekken, Schreiber noemt onder andere op bladzijde 269 het 'wetenschapshistorische wonder' van de afbeelding van een niet-convex regelmatig icosaëder op de vloer van de San-Marco kathedraal te Venetië. Als voorbeeld van de vele interessante visies van Schreiber noemen we hier zijn beschrijving van de ontwikkeling van de niet-Euclidische meetkunde tussen 1790 en 1900. Aan het eind van de achttiende eeuw worstelden diverse wiskundigen met het parallellenpostulaat, en op de pagina's 343–345 verbindt Schreiber het 'psychische lijden' van de diverse betrokkenen met het nieuwe dat aan het licht wil komen, namelijk een totaal nieuwe opvatting van wiskunde. Schreiber verbindt de ontdekking van modellen van de niet-Euclidische (hyperbolische) meetkunde door Beltrami (1868), Klein (1871) en Poincaré (1881) met de ontwikkeling van de wiskunde van een quasi-natuurwetenschap in de 18e eeuw tot een wetenschap van formele structuren in het begin van de 20e eeuw. Omstreeks 1880 was deze ontwikkeling nog niet afgesloten, en de modellen konden toen daarom nog niet als *model* in de moderne zin worden geïnterpreteerd maar alleen als *Versinnlichung* (pagina 401), dat wil zeggen in termen van hun mogelijke geldigheid in de fysieke ruimte. Vandaar de — voor een modern gevoel overdreven — aandacht voor trigonometrische formules en hun geldigheid.

Het is ondoenlijk de geschiedenis van de wiskunde van de twintigste eeuw te beschrijven zonder in technische kwesties te verzeilen die voor een breed publiek ontoegankelijk zijn. Schreiber lost dit dilemma op door de nadruk te leggen op de relaties van de meetkunde met andere gebieden: natuurwetenschappen, techniek, informatica en kunst. Abstracte wiskunde is volgens Schreiber tegenwoordig niet meer hoofdzaak. Hij schrijft: “Es ist jedoch unübersehbar, dass diejenigen Richtungen, die relativ arm an Algorithmen sind, vielmehr die Feststellung von oft tiefliegenden Sachverhalten zum Gegenstand hatten, heute ihre Hochkonjunktur hinter sich haben.”

In het gedeelte over meetkunde en kunst komt uiteraard Maurits Escher aan de orde. Deze was op de middelbare school middelmatig in wiskunde, en Schreiber concludeert “Dies zeigt nur, dass üblicher Mathematikunterricht wenig geeignet ist, Ausnahmebegabungen zu entdecken und zu fördern, und dass die landläufige Vorstellung von sogar vieler Mathematiker von dem, was Mathematik ist, dringend einer Korrektur hinsichtlich dessen bedarf, was schon in der Einleitung dieses Buches als ‘unbewusste Mathematik’ ausgesprochen wurde.” Schreiber merkt op dat diverse prenten van Escher tegenwoordig net zo bekend zijn als de Mona Lisa, en dat hierdoor brede lagen van de maatschappij met een soort wiskunde in contact komen die zij helaas op school niet hebben gehad.

Het boek eindigt met een hoofdstuk over het belang van spelen in het wiskundeonderwijs, en met een oproep aan de lezer om zelf leuke dingen in de aanschouwelijke meetkunde te ontdekken. Het boek biedt hiertoe ruimschoots aanleiding in de opgaven aan het eind van de hoofdstukken en ook in de prachtige platen. Uw recensent vond het archimedische veelvlak, dat volgens Schreiber op blz. 443–444 in 1930 door Miller ontdekt is, op het schilderij uit 1495 dat op blz. 257 is gereproduceerd.

Dit rijke en inspirerende boek is interessant voor wiskundigen, wiskundeleraren, wiskundestudenten, en anderen met minimaal 1 à 2 jaar wiskunde na VWO-niveau en een goede leesvaardigheid in het Duits.

J. Hogendijk

D. Haskell, A. Pillay and C. Steinhorn (eds.)

Model theory, algebra and geometry

Cambridge: Cambridge University Press, 2000
227 p., prijs £30
ISBN 0-521-78068-3

Abstracte modeltheorie zit in de lift. Dat ligt zeker aan het feit dat schijnbaar exotische constructen als stabiliteitstheorie plotseling toepassingen hebben gekregen in de arithmetische meetkunde: zie Hrushovski’s bewijs van de vermoedens van Mordell-Lang en Manin-Mumford. Wie het eerste bewijs wil leren kennen kan terecht bij *Model theory and algebraic geometry. An introduction to E. Hrushovski’s proof of the geometric Mordell-Lang conjecture* (Springer Lecture Notes in Mathematics nr. 1696, E. Bouscaren (ed.)) — waarin echter het artikel van Zilber misschien net iets te steil gaat.

Het werk dat hier besproken wordt is tevens een overzichtsvolume over de modeltheorie van velden, maar heeft een iets breder objectief: het bevat ook inleidingen tot o-minimaliteit, Manin-Mumford, subanalytische meetkunde en lokale zeta-functies. De auteurs (D. Marker, L. van den Dries, Z. Chatzidakis, D. MacPherson, B. Hart, E. Bierstone, P. Milman, J. Denef en B. Mazur) zijn stuk voor stuk experts, maar trappen toch niet in de val van het technisch schrijven. Het is een plezier voor de lezer te zien hoe elk van hen zijn best doet zoveel mogelijk voorbeelden aan te halen die de (algebraïsch) meetkundige aanspreken.

Dit uitstekend uitgegeven volume lijkt de ideale inleiding tot dit relatief nieuwe gebied.

G. Cornelissen

K. Rubin

Euler systems

(Annals of Mathematics Studies; 147)
Princeton: Princeton University Press, 2000
227 p., prijs $ 24.95
ISBN 0-691-05076-7

De theorie van Eulersystemen vindt zijn oorsprong in werk van Thaine en van Kolyvagin. Gedoeld wordt op een techniek van Thaine om klassengroepen van reële abelse uitbreidingen van $\mathbf{Q}$ te begrenzen en op werk van Kolyvagin dat resulteert in het begrenzen van Selmergroepen van elliptische krommen. De ideeën hierachter hebben geleid tot de introductie van abstracte Eulersystemen voor p-adische representaties zoals deze in dit boek worden behandeld. Om de hoofdlijnen te schetsen is het nodig iets meer in detail te treden.

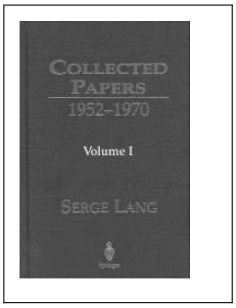
Stel K is een getallenlichaam, G_K de absolute Galoisgroep van K en T een p-adische representatie van G_K (dat wil zeggen een vrij $\mathbf{Z}_p$-moduul met continue G_K-actie). Een Eulersysteem voor T is een verzameling cohomologieklassen $c_F \in \mathrm{H}^1(G_F, T)$, geïndexeerd door een collectie abelse uitbreidingen F van K, die aan bepaalde compatibiliteitseisen voldoet. Zij $W = T \otimes (\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p)$ en definieer, voor een eindige verzameling Σ van plaatsen van K, de Selmergroep $S_\Sigma(K, W) \subset \mathrm{H}^1(G_F, W)$ als de verzameling klassen die locaal triviaal zijn bij de plaatsen in Σ en die bij de overige plaatsen een regulariteitsconditie vervullen. De hoofdstelling van dit boek geeft een afschatting van de ordes van bepaalde Selmergroepen (en dus tegelijk een eindigheidsstelling). Dit laatste zowel over K als over bepaalde $\mathbf{Z}_p^d$-uitbreidingen K_∞ van K.

De definitie van een Eulersysteem en de bovenstaande stellingen worden behandeld in het tweede hoofdstuk, het eerste is gewijd aan de nodige voorkennis betreffende de cohomologie van p-adische Galoisrepresentaties. In het derde hoofdstuk volgen enige belangrijke toepassingen van de stellingen uit hoofdstuk 2. Daarbij gaat het onder andere om de grenzen van Mazur–Wiles voor de ordes van de klassengroepen van cyclische uitbreidingen van $\mathbf{Q}$ en om werk van Kato met betrekking tot Shafarevich–Tate groepen van elliptische krommen.

In de hoofdstukken 4–7 komen de bewijzen van de resultaten uit hoofdstuk 2 aan de orde. In hoofdstuk 8 vinden we een overzicht van werk (en vermoedens) van Perrin-Riou over de relatie tussen Eulersystemen en p-adische L-functies. In het laatste hoofdstuk worden enige varianten op de theorie belicht. Ten slotte volgen vier appendices met benodigde voorkennis die in de hoofdtekst niet thuishoorde.

Samenvattend vind ik dat dit boek een zeer aangename en complete behandeling geeft van de theorie van Eulersystemen. Als zodanig is het warm aan te bevelen aan elke onderzoeker, vanaf het niveau van promovendus, die zich in dit onderwerp wil verdiepen.

R. Noot



S. Lang

Collected papers (I, II, III, IV, V)

Berlijn: Springer-Verlag, 2000-2001
525+590+393+471+492 p., prijs 4 × DM 159,- plus DM 179,-
ISBN 0-387-98802-5, ...-98803-3, ...-98800-9, ...-98804-1, ...-95030-3

Serge Lang is well-known for the numerous books which he has written on mathematics, books on subjects ranging from the most elementary and basic level like textbooks for undergraduates and graduates to books reaching the most advanced borders of our present knowledge (Lang was awarded the 1999 Steele prize of the AMS for his mathematical expositions). However Lang is also a first-class research mathematician himself, he has made many original contributions and many of them are fundamental and outstanding. These research papers, together with his numerous survey papers, reviews and some other writings have now been published by Springer Verlag as "Collected papers". They consist of five volumes and run over the period 1952–1999. The collected papers contain most, but not all, of Lang's papers on mathematics. Not included are for instance most of his seminar talks, like his Bourbaki talks, and also not the papers that orginated from his regular Zurich lectures. On the other hand two books are included which were out of print, namely his *Introduction to transcendental numbers* from 1966 and the English version of *Rapport sur la cohomologie des groups* which originally also appeared in 1966. Moreover, most of his Springer LNM — maybe with the exception of the one on Nevanlinna theory (see below) — are included; in fact these are essentially research papers anyhow.

The work is presented in chronological order, but as Lang remarks himself in the introduction, the papers group themselves around various themes reflecting, during the different periods, the main focus of interest of the author (with from time to time a jump back to an earlier period). Most of the papers are in English but there are also several papers in French . Each of the volumes contains a complete bibliography (till 1999). In Volume I there is the foreword of the author and a curriculum vitae, moreover in the first four volumes there are also some pictures of the author at various periods. Lang was a student of Emil Artin in Princeton and in his foreword to the collected papers he expresses again his appreciation for his teacher. From Lang's work, especially from the first period of that work, it is clear that Lang was also strongly influenced by AndréWeil; during 1953-1955 Lang was instructor at the University of Chicago and Weil was a professor there.

The work of Lang ranges over a broad spectrum of mathematics: papers on number theory (both algebraic and analytic) and on algebraic geometry, with an emphasis on geometric class field theory and abelian varieties, many papers on diophantine equations and diophantine approximations, studies on modular curves and modular units, studies on complex hyperbolic spaces, on Nevanlinna theory, on Arakelov theory and during the later period a series of papers (together with Jay Jorgenson) on so-called regularized products.

Let us take a closer look to the different volumes. First of all I should make clear that already because of lack of space, but even more so because of the limitations of your reviewer, we can only take a grasp out of the rich content of these volumes.

Volume I covers the period 1952-70. The first paper is the author's Ph.D. thesis from Princeton. The thesis is on quasi algebraic closure of fields, this is a concept which was introduced by E. Artin to measure — in some sense — how far the field is away from (or how close it is to) being algebraically closed. After some related papers to the above, from 1954 onwards starts a series of beautiful papers on algebraic geometry, most of them either with an arithmetic flavor or dealing with varieties over finite fields. In this series we find, among others, the fundamental paper on unramified class field theory over function fields in several variables (for this paper Lang was awarded the 1959 Cole Prize of the AMS). This paper, and many of the other papers in this series, depend heavily on the theory of abelian varieties as developed by Weil and supplemented later by works of Chow and Matsusaka. There are also (always among many others!) the joint paper with Serre on non-ramified coverings of algebraic varieties and the joint paper with Tate on homogeneous spaces over abelian varieties. Then after 1960 Lang's main interest gradually shifts to diophantine equations and diophantine approximation and also to transcendental theory. In his 1960 paper on integral points on curves we find already his famous conjecture on the integral points in a subvariety of an abelian variety (or of a torus), a conjecture including Mordell's conjecture and later fully proved by Faltings. Volume I contains also the above mentioned reproduction of the book on transcendental numbers. Finally we mention in this volume the interesting review by Lang of Grothendiek's *Eléments de géométrie algébrique*.

In Volume II (1971–1977) we see a continuation of Lang's interest in diophantine questions. We find here (for instance) a survey paper on transcendental numbers and diophantine approximation. Here Lang discusses the theory on transcendental numbers from Hermite to the work of Baker; for the diophantine approximation he starts with Dirichlet and leads up to the works of Roth, Schmidt and others. Also there is a paper on higher dimensional diophantine problems containing generalizations of Mordell's conjecture for curves and of Siegel's theorem on integral points on curves. (Of course this paper is written before Falting's fundamental work!) Trying to unify the various conjectures Lang turns to the study of hyperbolicity of manifolds (in the sense of Kobayashi), a theme which will return again many times later. In this volume there is also the beginning of a long series of papers jointly with Kubert on units on modular curves. Such 'modular units' are meromorphic functions on the modular curve $X(N)$ which have only zeros and poles in the cusps, and again they are studied for applications to diophantine questions on certain curves! A synthesis of this series of papers can be found in the book of Kubert-Lang on Modular Units in Springer's Grundlehren Series, vol. 244. Finally we mention that in this Volume II there is also reproduced the joint paper, with Trotter, on Frobenius distributions in $\mathrm{GL}(2)$-extensions which originally appeared as a Springer LNM.

Volume III (1978-1990). First there is the continuation of the papers with Kubert mentioned above. Then there is an interesting paper, together with N. Katz, on finiteness theorems in geometric class field theory. (This is a jump back into his 'algebraic geometry period'!) Next we mention in this volume the beautiful paper on *Units and class groups in number theory and algebraic geometry*, this is the written (but expanded) version of Lang's Colloquium

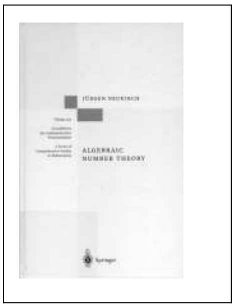
Lectures for the summer meeting of the AMS in 1981. In a paper entitled *hyperbolic and diophantine analysis* Lang returns to the interplay between diophantine problems and hyperbolic manifolds (note that in the meantime Faltings has proved Mordell's conjecture!). In that period Lang also starts to work on Nevanlinna theory (on which more in the next volume). The volume concludes again with a very interesting article on diophantine problems, a paper in which Lang discusses four conjectures and the relations beteen these: the Fermat conjecture (proved in the meantime by Wiles!), the *abc*-conjecture, the Vojta conjecture and the generalized Szpiro conjecture.

Volume IV (1990–1996). In this volume we find the reproduction of two books. *Lectures on Nevanlinna theory*, written jointly with W. Cherry. It appeared earlier as a Springer LNM. It gives a self-contained account of Nevanlinna theory, but a special feature is that the authors pay particular attention to the error term in Nevanlinna's main theorem , the reason being the relation with diophantine geometry. The other book is a translation and extension of Lang's *Rapport sur la cohomologie des groupes*. It is certainly a good thing that this book is again available in this way. This volume contains also two papers on 'history' of mathematics. One is on Mordell's and Siegel's attitude towards the developments in 20th century mathematics and the other one is entitled *Some history of the Shimura-Taniyama conjecture*. Of course both these articles contain controversial issues, but irrespectively whether one agrees with the author or not, they are interesting. Moreover, there is Lang's letter to the Notices of the AMS on *The Kirscher article and HIV*, a letter which was refused for publication. Finally we mention in this volume the symphatic and excellent paper by Lang entitled *Comments on Chow's work* which appeared in the Notices in a series of memorial papers for W.-L. Chow.

Volume V (1993–1999; together with Jay Jorgenson). This volume contains a series of papers written together with Jay Jorgenson (some appeared as Springer LNM , but they are all research papers). They are on so-called regularized products. The general idea behind these papers is to extend results from classical analytic number theory to a broader class of functions admitting generalized Euler products and functional equations. In these papers the authors lay connections between analytic number theory and theory of spectral theory of certain operators. There are relations with Lie groups, differential geometry, symmetric spaces, heat kernels and many other things!

The reviewer hopes that the above gives some idea how extensive and broad the scope of Lang's work is. His work connects many different areas of mathematics, but one thing is clear: Lang's love and passion for diophantine questions runs as a thread through most of his work. I am fully aware that the above brief summing-up of (some of) the contents of the volumes does not give at all justice to the depth of Lang's work. Lang has a special talent for seeing what is important, for seeing the main lines. His own work is fundamental and pioneering at many places; moreover his deep insights and his — often daring — conjectures have been very stimulating for others. Both by virtue of his own original work and by the merits of his extraordinary work in mathematical exposition Lang occupies an important and outstanding place in 20th century mathematics! It is therefore very pleasant and very valuable that now Lang's mathematical work has been put together.

J.P. Murre



J. Neukirch
Algebraic number theory
(Grundlehren der mathematischen Wissenschaften; 322)
Berlin: Springer-Verlag, 1999
571 p., prijs DM 179,–
ISBN 3-540-65399-6

Grofweg tot aan de Tweede Wereldoorlog werd het gebouw van de algebraïsche getaltheorie in overwegende mate opgetrokken door Duitse wiskundigen. De kwadratische reciprociteit van Gauss, de eenhedenstelling van Dirichlet, Kummer-theorie en de theorie van Minkowski, Riemanns zeta functie en die van Dedekind, de stelling van Kronecker-Weber, het klassenlichaam van Hilbert, de p-adiek van Hensel, het Hasse-Prinzip, L-reeksen van Dirichlet, Hecke en Artin, Artin reciprociteit: wie zou zonder willen?

In wezen bespreekt dit boek deze klassieke theorie. Auteurs uit het stamland heten 'wiskundigen', bij die van elders wordt de nationaliteit toegevoegd. Jongere ontwikkelingen worden met mate meegenomen. Zo worden in de klassenlichamentheorie wel gebruikt ideles en formele groepen àla Lubin-Tate, maar geen cohomologie. Tate's toegang tot de L-reeksen via harmonische analyse wordt niet in stelling gebracht, maar de oorspronkelijke aanpak van Hecke wordt modern gepolijst.

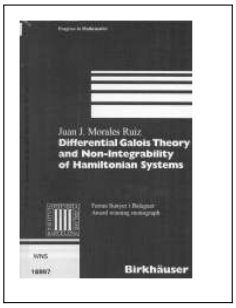
In hoofdstuk 1 worden de algebraïsche getallenlichamen ingevoerd en fundamentele stellingen afgeleid. Lokale lichamen en hun discrete valuaties vormen het thema van hoofdstuk 2. Verschillende meetkundige aspecten worden naar voren gebracht om de analogie met functielichamen te verduidelijken.

In het derde hoofdstuk worden Arakelov divisoren van een getallenlichaam ingevoerd zonder ze zo te noemen. Meetkundige overwegingen gaan zo ver als Riemann-Roch en Chernkarakters. De uitgesproken bedoeling is om de lezer vertrouwd te maken met de meetkundige beschouwingswijze op reeds bekend terrein, zodat deze straks naadloos kan worden voortgezet in de aritmetische algebraïsche meetkunde, heden ten dage zo prominent. Mij lijkt dit een verhelderend exposé.

De volgende drie hoofdstukken ontwikkelen op gedegen wijze de theorie van klassenlichamen en hun verband met reciprociteitswetten. Wat de ultieme Artin reciprociteit betreft, verwijs ik graag naar het aardige artikel van H.W. Lenstra en P. Stevenhagen in het allereerste nummer van serie 5 van het tijdschrift waarin u nu leest.

In het laatste hoofdstuk worden de zeta functies en de L-reeksen behandeld met traditionele methoden, echter wel op eigentijdse manier. Een machtig landschap, waarin algebra, getaltheorie en analyse onontwarbaar verweven zijn. Hier en daar wordt vooruit gewezen naar naoorlogse resultaten die het bewezene in een ruimer kader plaatsen. Wat maakt dit boek zo aantrekkelijk? De Springer-uitvoering met evenwichtige bladspiegels? De vele voorbeelden? De ruime dosis opgaven, variërend van routine oefening tot resultaten die men uit de literatuur dient op te diepen? De meestal trefzekere uitleg? Dit alles, welzeker. Maar bovenal de geestdrift van de schrijver voor zijn vak, die in soms lyrische bewoordingen motivering aandraagt, verbanden schetst, vergezichten opent.

Dit boek is een toegewijde vertaling door N. Schappacher van het Duitse origineel, dat in 1992 bij Springer verscheen, en dat naar het schijnt indertijd niet in de Mededelingen is besproken. Een klein aantal correcties is aangebracht en het 'erhaben' Duits van Jürgen Neukirch, begin 1997 overleden, is afgevlakt. *J.R. Strooker*



J.J. Morales Ruiz

Differential galois theory and non-integrability of hamiltonian systems

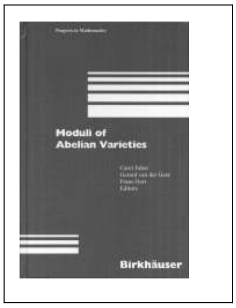
(Progress in mathematics; 179)
Basel: Birkhäuser, 1999
184 p., prijs DM 116,–
ISBN 3-7643-6078-X

It is well-known that the zeros of a polynomial $p(x)$ with rational coefficients need not be rational numbers. Usually these zeros lie in a field extension of $\mathbf{Q}$. The smallest field containing all zeros of $p(x)$ is called the splitting field of $p(x)$. Let us call it L. In beginning algebra courses one learns that to such a field L one associates the Galois group, a finite group which encodes the possible relations over $\mathbf{Q}$ that exist between the zeros of $p(x)$.

Similarly we can start with a linear differential equation $Ly = 0$ of order n with coefficients in a given field, usually $\mathbf{C}(z)$. We then consider the smallest extension of $\mathbf{C}(z)$ containing all solutions of $Ly = 0$ and their derivatives. This is called the Picard-Vessiot extension of the differential equation. It is ususally an infinite extension, but the transcendence degree is finite. To such a Picard-Vessiot extension one associates the so-called differential Galois group, an algebraic subgroup of $GL(n, \mathbf{C})$. In many aspects there is a very strong parallel between Galois groups for polynomials and differential Galois group for differential equations. To a linear differential equation one can also associate a monodromy group. In many cases this monodromy group determines the differential Galois group, in many others it does not. There exist several techniques to compute differential Galois groups.

The present book studies the application of differential Galois theory to the question of complete integrability of Hamiltonian systems. A Hamiltonian system with Hamiltonian $H(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n)$ is said to be completely rationally integrable if there exist n constants of motion $f_i(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n)$, $i = 1, \ldots, n$, which are rational functions and whose Poisson-brackets all vanish. Extending earlier ideas of Poincaré, Lerman and Ziglin, the author of the book together with J.P. Ramis and C. Simo have shown together with that if a Hamiltonian system is completely integrable, then the differential Galois group of a normal variation equation has a connected component which is abelian. The normal variation equation is a symplectic reduction of the linearisation along a known trajectory of the Hamiltonian system. Thus it is possible to check non-complete integrability of Hamiltonian systems by computing differential Galois groups. And this is precisely what these authors have done.

In the present book a complete exposition is given of what is summarised above, together with many applications to well-known Hamiltonian systems such as Hénon-Heiles, Bianchi IX, Sitnikov's 3-body problem. Needless to say that this book is a must for anyone with an interest in this field. In addition, this book has won the annual 'Ferran Sunyer i Balaguer' prize for expository writing. *F. Beukers*



C. Faber, G. van der Geer en F. Oort (eds.)

Moduli of abelian varieties

(Progress in mathematics; 195)
Berlin: Birkhäuser, 2000
518 p., prijs DM 196,–
ISBN 3-7643-6517-X

De moduliruimten van abelse variëteiten verheugen zich al meer dan 150 jaar in een grote belangstelling. Deze belangstelling is nog gegroeid met de komst, in de jaren 1960, van de moderne algebraïsche meetkunde en met name het baanbrekende werk van David Mumford. Met het werk van Mazur en Katz met betrekking tot modulaire krommen en dat van Faltings en Chai betreffende moduli van abelse variëteiten van willekeurige dimensie, is de interesse voor de aritmetische aspecten van deze theorie steeds groter geworden.

In 1999 organiseerden de redacteuren van deze proceedings een succesvolle conferentie over dit onderwerp op het eiland Texel. Die conferentie heeft geleid tot dit boek. Niet elke voordracht van de conferentie is echter in het boek opgenomen en er zijn ook nog een aantal artikelen niet afkomstig van de conferentie. Het onderwerp en niveau van de conferentie zijn echter gerespecteerd, met indrukwekkend resultaat. Men kan daarom alleen maar hopen dat de inmiddels ontstane traditie van Texel-conferenties en bijbehorende proceedings in de toekomst zal worden voortgezet. *R. Noot*

H. Inassaridze

Non-abelian homological algebra and its applications

(Mathematics and its applications; 421)
Dordrecht: Kluwer, 1997
265 p., prijs NLG 240,-
ISBN 0-7923-4719-8

In het begin van de jaren 70 was er veel activiteit in verband met de hogere K-functoren. Er was de K_0 van Grothendieck, de K_1 van Bass en de K_2 van Milnor. Naast elkaar vonden toen een paar ontwikkelingen plaats: de plus-constructie van Quillen, de Q-constructie van Quillen en een aanpak via afgeleide functoren. Deze laatste aanpak, van Swan, Gersten en mijzelf, is de basis van dit boek. De gedachte was de K-functoren te zien als afgeleiden van GL, de algemene lineaire groep. De theorie van afgeleiden die ik toen opzette was een rechtstreekse generalisatie van het gewone abelse geval waarin bijvoorbeeld functoren Tor-afgeleiden zijn van het tensorproduct. Simpliciale objecten nemen daarbij de rol over van complexen en homotopiegroepen die van homologiegroepen. Dit was vrij algemeen en niet alleen van toepassing op de K-theorie, maar ook op bijvoorbeeld homologie van groepen.

Een paar jaar later is dit alles nog eens overgedaan en verder uitgebreid door Inassaridze, maar dan alleen voor functoren met waarden in de categorie der groepen. Door die extra structuur kunnen sommige dingen korter. De winst zit in het gebruik van pseudosimpliciale in plaats van simpliciale objecten, een winst die betrekkelijk is: de meetkundige betekenis is minder duidelijk en verder moeten wel heel veel begrippen van het voorvoegsel pseudo worden voorzien.

Hoe dit alles wordt toegepast in de algebraïsche K-theorie heeft de schrijver uitvoerig uit de doeken gedaan in zijn in 1995 eveneens bij Kluwer verschenen *Algebraic K-Theory*. Ook in dit boek is daar een hoofdstuk aan gewijd. Andere toepassingen betreffen de cohomologie van monoïden, de (co)homologie van ringen en de niet-abelse homologie van groepen, die trouwens ook voor de K-theorie van betekenis is.

Dit is een boek in de serie *Mathematics and its applications*. Het soort toepassingen waar hier van sprake is, is de toepassing van een zeer abstracte theorie op andere abstracte theorieën. De schrijver heeft er een overzichtelijk werk van gemaakt, waar geïnteresseerden de weg in kunnen vinden. Maar, hoeveel geïnteresseerden zijn er?

F.J. Keune

S.G. Krantz and H.R. Park

The geometry of domains in space

(Birkhäuser advanced Texts)

Boston: Birkhäuser, 1999
308 p., prijs DM 108,-
ISBN 3-7643-4097-5

Many of us cherish the experience of talking math over lunch to a bright young student who doesn't know much of the field yet. The student innocently comes up with, for example, his version of the isoperimetric inequality and you spend the rest of the lunch sketching proofs, telling the history and explaining the difficulties.

The book under review appears to be an attempt to capture such conversations in print. In my opinion the authors have succeeded in bringing together a number of interesting stories around domains in $\mathbf{R}^n$.

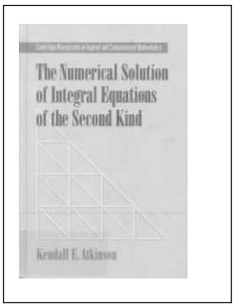
An introductory chapter deals with smooth functions and defining functions; it also recalls basic measure theory without proofs. Next a chapter with a differential geometric flavor, that culminates in surfaces with constant mean curvature. Chapter 3 and 7 are best characterized as an introduction to geometric measure theory. Chapter 3 works up to the area and co-area formulas. The area formula is an extension of the usual change of variables theorem from calculus in the sense that the map can be *any* Lipschitz map from $\mathbf{R}^n$ to $\mathbf{R}^{n+k}$. The co-area formula is an extension of Fubini's theorem, where the orthogonal projection from $\mathbf{R}^{n+k}$ to $\mathbf{R}^n$ may again be replaced by any Lipschitz map. Chapter 7 deals with Steiner symmetrization and its application to (for instance) the isoperimetric inequality.

Other chapters are 'Sobolev Spaces', 'Smooth Mappings', treating Stokes theorem as well as Whitney extension and Sard's theorem, 'Convexity', and finally 'Topics Related to Complex Analysis' about quasiconformal mappings and Weyl's theorem estimating the eigenvalues of the Dirichlet problem $-\Delta u = \lambda u$, $u|_{\partial\Omega=0}$ on a domain Ω in terms of the volume of Ω.

The authors surely have an interesting taste and an enthusiastic way of bringing their stories forward. I really enjoyed reading the book. Still, it takes more to write a good *text*book as was one of their aims. My major objection is that the required mathematical background and maturity oscillate too rapidly throughout the book. Also I think that the topics are too much dispersed to allow the book to be used as a main source for an advanced Dutch undergraduate course. However, education is changing; often students work on projects. Most chapters will serve excellently as a source for a project in analysis.

One final remark: the only error I found is the very first proof, which is quite wrong.

J. Wiegerinck



K.E. Atkinson

The numerical solution of integral equations of the second kind

(Monographs in applied and computational mathematics)

Cambridge: Cambridge University Press, 1997
568 p., prijs NLG 174,–
ISBN 0-521-58391-8

Het behoeft geen betoog dat in de mathematische fysica de bestudering van integraalvergelijkingen een voorname plaats inneemt. Als standaardvoorbeeld ter ondersteuning van deze bewering wordt vaak de Laplace vergelijking $\Delta u = 0$ aangehaald, waarbij de inhomogene randwaarden van Von Neumann, Dirichlet of gemengd type aanleiding geven tot een randwaarde integraalvergelijking met quasi-singuliere kern. Ook in dit boek heeft de schrijver er niet aan willen ontkomen met dergelijke klassieke voorbeelden zijn theorie te illustreren. Dit zou de suggestie kunnen wekken dat slechts in de potentiaaltheorie driftig gebruik wordt gemaakt van de algemene theorie van integraalvergelijkingen, meer in het bijzonder van Fredholmvergelijkingen van het eerste en tweede soort. Echter, het mathematisch-fysisch toepassingsgebied levert een scala aan problemen die door integraalvergelijkingen beschreven zijn. Het is jammer dat de schrijver zich dit niet heeft gerealiseerd.

Dit boek behandelt voornamelijk integraalvergelijkingen van de tweede soort waarbij de integraalkern ten hoogste zwak singulier is, maar ook wordt enige aandacht besteed aan integraalvergelijkingen van de eerste soort. In functionaalanalytische zin is dus voornamelijk sprake van een Fredholmvergelijking van de tweede soort. De eerste hoofdstukken van dit boek zijn gewijd aan de klassieke functionaal analytische concepten. Ze doen een beroep op de standaardwerken op dit terrein zoals van Mikhlin, Kantorovich en Akilov, en Krylov. Daarna wordt ingegaan op de diverse methoden waarmee integraalvergelijkingen numeriek kunnen worden opgelost. Deze methoden zijn in feite alle gebaseerd op een benadering van een compacte operator door een eindige rang operator. De integraalvergelijking wordt derhalve vervangen door een matrixvergelijking waarbij de (vierkante) matrix de integraalkern representeert, een vector van overeenkomstige lengte het bekende rechterlid en de oplossingsvector de gezochte oplossing van de integraalvergelijking beschrijft.

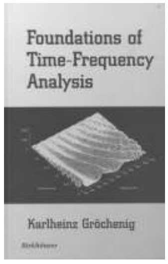
Er vanuit gaande dat het oplossen van een matrixvergelijking een numeriek opgelost probleem is, rest het probleem hoe nauwkeurig door de gekozen methode de compacte operator (integraalkern) wordt benaderd door de eindige rangoperator (matrix). De schrijver onderscheidt drie methoden: de collocatiemethode, de Galerkinmethode en de Nyströmmethode. Zowel in de collocatiemethode als in de Galerkinmethode is er sprake van een residue functie r_n die geminimaliseerd moet worden. De gezochte oplossing wordt benaderd door een lineaire combinatie van n basisfuncties met te bepalen coëfficiënten. Deze coëfficiënten vormen de te bepalen oplossingsvector. In geval van een collocatiemethode wordt geëist dat de residuefunctie nul is in n te kiezen knooppunten en in geval van een Galerkinmethode dat de residuefunctie tot het orthoplement behoort van het opspansel van de basisfuncties. Een Galerkinmethode wordt dus altijd in een inproductruimte toegepast. Het moge duidelijk zijn dat voor beide methoden de keuze van de basisfuncties essentieel is, maar in geval van de collocatiemethode tevens de keuze van de knooppunten en in het geval van de Galerkinmethode tevens de keuze van het inproduct. Ze moeten immers leiden tot een numeriek goed geconditioneerd probleem waarbij bovendien sprake zal zijn van een accurate benadering van de integraalvergelijking. Voor de hand liggende keuzes voor de basisfuncties zijn lineaire en hogere orde splines. In een Nyströmmethode wordt de integraal geheel (bij reguliere kernen) of gedeeltelijk (bij zwaksinguliere kernen) vervangen door een som met behulp van een kwadraatregel. De knooppunten van de kwadraatregel induceren een matrixvergelijking met als onbekende de vector die ontstaat door de te bepalen functie te evalueren in de knooppunten. In de Nyströmmethode wordt dus expliciet uitgegaan van een benadering van een integraal door een kwadraatregel, terwijl in de ander twee methoden de berekening van de bijbehorende integralen niet expliciet in de methode wordt vervat. Voor de hand liggend combineren van bovengenoemde methodes leidt tot de productmethode, de discrete collocatiemethode en de discrete Galerkinmethode.

Nadat de numerieke methodieken zijn besproken worden in opeenvolgende hoofdstukken integraalvergelijkingen behandeld die onderscheiden zijn door het onderliggende compacte integratiedomein. Zo wordt natuurlijk eerst als integratiedomein een begrensd interval gekozen en daarmee integraalvergelijkingen voor functies van één reële variabele. Daarna komt het meerdere variabelen geval aan de orde, waarbij polygonale gebieden in het platte vlak als integratiedomein worden beschouwd. Triangulatie van deze gebieden met bijbehorende lineaire interpolatie worden nauwkeurig beschreven. Tenslotte wordt de stap gezet naar begrensde oppervlakken in de driedimensionale ruimte die een eindige vereniging zijn van gladde oppervlakken elk beschreven door een polygonale parameterruimte.

Het boek bestaat uit twee gedeelten. In het eerste gedeelte, dat zes hoofdstukken beslaat, geeft Atkinson een inleiding tot het numeriek oplossen van integraalvergelijkingen voor functies van één en twee variabelen. Het tweede gedeelte is gewijd aan het numeriek oplossen van randwaarde integraalvergelijkingen die een herformulering zijn van de Laplace vergelijking voor een begrensd gebied in het platte vlak of de driedimensionale ruimte. Het tweede gedeelte beslaat drie hoofdstukken. Ieder hoofdstuk wordt besloten met een uitvoerige discussie van de meest recente literatuur, waardoor een zeer uitvoerige literatuurlijst is ontstaan die dit boek ook tot een uitstekend naslagwerk maakt.

De schrijver is er mijns inziens alleszins in geslaagd een manuscript te produceren dat door zijn aandacht voor leesbaarheid en zorgvuldige opbouw op een groot lezerspubliek mag rekenen. De boodschap die dit boek uitdraagt naast de vele technische aspecten waaraan ruim aandacht wordt gegeven luidt: kennis van functionaalanalyse is een noodzakelijke voorwaarde om op een wiskundig zindelijke manier numeriek om te gaan met integraalvergelijkingen. Ik onderschrijf deze boodschap van harte.

S.J.L. van Eijndhoven



K. Gröchenig

Foundations of time-frequency analysis

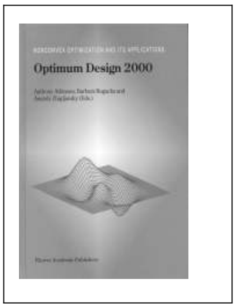
Applied and numerical harmonic analysis)
Boston: Birkhäuser, 2001
359 p., prijs DM 148,–
ISBN 0-8176-4022-3

Wiskundige tijd-frequentie analyse houdt zich bezig met de analyse, beschrijving en representatie van functies en operatoren in termen van tijd-frequentie verschuivingsoperatoren (Weyl-Heisenberg-groep). Sinds het ontstaan van dit vakgebied, eind jaren zeventig, is het zwaartepunt van het onderzoek verschoven van signaalanalyse met behulp van tijd-frequentie verdelingsfuncties (zoals de Wigner distributie) naar het bestuderen van signaalrepresentaties door middel van reeksen met termen die over een rooster van tijd-frequentiepunten verschoven kopieën van een prototypesignaal bevatten (Gabor-representaties). De grote motor achter deze ontwikkeling was de toenemende behoefte uit de hoek van de digitale signaalbewerking aan een arsenaal aan efficiente signaalrepresentatiemethodes. Min of meer in het kielzog van de op wavelets gebaseerde methodes, is in de jaren negentig de Gabor-analyse tot volle bloei gekomen. Er zijn nu naar schatting over de wereld enige honderden beoefenaren die (voor wat de wiskunde betreft) komen uit disciplines als Fourieranalyse, complexe en klassieke analyse, abstracte harmonische analyse, functionaalanalyse, numerieke wiskunde, lineaire algebra.

In dit boek wordt relatief veel aandacht besteed (ongeveer de helft van het aantal pagina's) aan de diverse aspecten van de moderne Gabor-analyse. Niettemin komen de wat klassiekere thema's — zoals onzekerheidsprincipes, kwadratische tijd-frequentie verdelingsfuncties en pseudo-differentiaaloperatoren — ruimschoots aan bod; er is ook een kort hoofdstuk gewijd aan wavelets. Doordat het boek zo uitvoerig de moderne Gabortheorie behandelt en op dit punt geheel up-to-date is, lijkt het mij een standaardreferentie te worden voor de beoefenaren van het vak. De auteur mikt bewust wat lager dan de doelgroep van Follands standaardwerk *Harmonic Analysis in Phase Space* dat verscheen voordat de nieuwe ontwikkelingen in Gabor-theorie plaatsvonden. Dit blijkt onder meer uit de gedetailleerde betoogtrant, waarin de 'it is easy to see'-frases zorgvuldig zijn gemeden. Voordeel hiervan is dat het boek ook te gebruiken is voor Tweede-Fasestudenten met een goede achtergrond in (Fourier)analyse en Hilbertruimtetheorie. Er zijn evenwel geen opgaves en hierdoor oogt het boek nogal technisch. Dit geldt met name voor de hoofdstukken waarin modulatieruimtes behandeld worden (hierbij moet men in verband met de vele indices, accenten en sub- en superscripten over goede ogen beschikken).

Het vakgebied Gabor-analyse is nog volop in beweging. Terwijl de structuur van de Gabor-frameoperatoren, waaraan een fraai hoofdstuk wordt gewijd, nu wel grotendeels begrepen is, zijn er nog heel wat fundamentele vragen die ook in dit boek onbeantwoord blijven. Dit geldt met name wat betreft het aangeven van niet-triviale klassen van prototype signalen, met bijbehorende roosterparameters, die aanleiding geven tot Gabor-frames. Een ander openstaand probleem — over het bestaan van algemene resultaten van het Wiener $1/f$-type voor de inverses van Gabor frame operatoren — is door de auteur zelf (met M. Leinert) ongeveer ten tijde van het verschijnen van het boek opgelost. Hierbij worden methodes uit de abstracte harmonische analyse gebruikt die wellicht een nieuwe wending geven aan het onderzoek aan Gabor systemen. Voor deze en andere nieuwe ontwikkelingen in het vakgebied is dit boek een ideaal uitgangspunt.

Een minpuntje: het belangrijke artikel van N.G. de Bruijn uit 1973 in Nieuw Archief voor Wiskunde (over Wigner-distributies en Weyl-correspondentie) dat voor een aantal werkers een grote inspiratiebron is geweest, wordt niet vermeld. *A.J.E.M. Janssen*



A. Atkinson, B. Bogacka en A. Zhigljavsky

Optimum design 2000

(Nonconvex optimization and its applications)

Dordrecht: Kluwer, 1998

306 p., prijs NLG 352,–

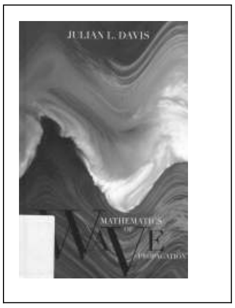
ISBN 0-7923-6798-7

Dit boek is opgedragen aan Valeri Fedorov, die met zijn werk *Theory of optimal experiments* een grote impact heeft gehad op het optimaal ontwerp van experimenten. Het boek bevat 25 artikelen, die op de conferentie *Optimum Design 2000: Prospects for the New Millennium* te Cardiff gepresenteerd werden.

De artikelen in het eerste deel van het boek handelen over theoretische aspecten van het optimaal ontwerp van experimenten. Onderwerpen die in dit deel aan bod komen zijn het optimaal ontwerp van experimenten voor Bayesiaanse predictie, voor het evalueren van een extreem punt, het schatten van polynomiale modellen en voor gepaarde vergelijkingen, optimale sequentiële testen, en het optimaal ontwerp onder beperkingen. Daarnaast wordt ook aandacht besteed aan experimenten met systematische fouten, Gröbnerbasis methoden, het ontwerp van fractionele factoriële ontwerpen, de toepassing van een optimisatiebenadering in de maattheorie op het optimaal ontwerp van experimenten, de efficiëntie van gebalanceerde ontwerpen die met behulp van restricted maximum likelihood geanalyseerd worden en het verband tussen betrouwbaarheidsellipsoïden en Elfving sets.

Het tweede deel van het boek bevat een brede waaier van toepassingen van het optimaal ontwerp. Vooral worden enkele ontwerpproblemen uit de medische en farmaceutische sfeer behandeld. Daarnaast bevat het tweede deel artikelen over de planning van bio-assays met behulp van bootstrapping, het ontwerp van geblokte experimenten voor de vergelijking van twee behandelingen met een controlebehandeling, optimale sampling ontwerpen, het optimaal ontwerp voor het schatten van binaire regressiemodellen, het optimaal ontwerp van experimenten met mengsels, het kostenefficiënt en trend-robuust ontwerp, het optimaal ontwerp bij flexibele modellen en het ontwerpen van experimenten die het experimenteel gebied zo uniform mogelijk bedekken.

Het boek is bedoeld voor lezers die reeds vertrouwd zijn met de basisprincipes van het optimaal ontwerp. Het geeft de lezer een goed idee van het brede toepassingsgebied van het optimaal ontwerp, en het biedt een overzicht van een aantal ontwerpproblemen die op de drempel van het nieuwe millennium onderzocht worden. Omwille van de theoretische aard van het merendeel van de artikelen is het boek niet geschikt als handleiding voor de praktijk, maar eerder voor academici en theoretische statistici. Bovendien zullen, gezien de diversiteit van de behandelde onderwerpen, voor de meeste lezers hoogstens enkele artikelen relevant zijn. *P. Goos*



J.L. Davis

Mathematics of wave propagation

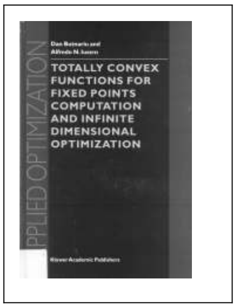
Princeton: Princeton University Press, 2000

395 p., prijs £31,–

ISBN 0-691-02643-2

In dit boek wordt een wiskundige beschrijving van een groot aantal golfverschijnselen gegeven. Deze betreffen golven in een stromende vloeistof (zonder en met viscositeit), golven in elastische, visco-elastische en thermo-elastische media en tenslotte oppervlaktegolven. De basisvergelijkingen zoals die van Navier-Stokes, van Navier en de generalisaties voor visco- en thermo-elastische media worden uit de bekende behoudswetten afgeleid. Dit belangrijke deel van de tekst wordt voorafgegaan door een eenvoudige inleiding in de fysica van eendimensionale golfvoortplanting, een hoofdstuk over karakteristiekentheorie en ten slotte door een derde hoofdstuk met een aantal oplossingsmethoden voor begin- en randwaardeproblemen voor de golfvergelijking in een, twee en drie dimensies. Het boek besluit met een aardig hoofdstuk over het gebruik van variationele methoden in de mechanica, de bewegingsvergelijkingen van Hamilton, en de Hamilton-Jacobitheorie met toepassing op golfvoortplanting.

Elk hoofdstuk wordt met een aantal vraagstukken afgesloten. Golven in electromagnetische media worden hier niet behandeld omdat de auteur over dit onderwerp reeds een boek gepubliceerd heeft; *Wave Propagation in Electromagnetic Media*, Springer, 1990. Deze tekst is een inleidend leerboek voor gevorderde studenten in de ingenieurswetenschappen en is tevens te gebruiken door toegepast wiskundigen die fysische achtergrondinformatie nodig hebben. Een verdienste van dit boek is ongetwijfeld het brede scala van golfverschijnselen. Het is echter spijtig dat wegens onnodige slordigheid veel triviale fouten voorkomen in allerlei formules en dat de notatie hier en daar verwarrend is. Ook een aantal wiskundige fouten, die niet een gevolg van slordigheid zijn, ontsieren de tekst. *E.M. de Jager*



D. Butnariu and A.N. Iusem

Totally convex functions for fixed points computation and infinite dimensional optimization

Dordrecht: Kluwer, 2000
202 p., prijs NLG 172,–
ISBN 0-7923-6287-X

This book has a promising title for economists. It links the three most important mathematical concepts for them: convexity, fixed points and infinite dimensional optimization. Convexity is the default assumption in economics both because it is realistic in a great number of cases and because it makes optimization a lot easier. Fixed point arguments are used to prove the existence of equilibria (like Nash equilibria in game theory). Finally, infinite dimensional optimization is used in models of saving and consumer spending over time and mechanism design problems (like deriving the optimal income tax schedule or designing optimal auctions — a theory unknown to the Dutch government).

Although the title is attractive to economists, the reader should bear in mind that an economist may not be in the set of the book's intended audience, described as "researchers in nonlinear analysis and applied mathematicians dealing with numerical solution of integral equations, equilibrium problems, image reconstruction, optimal control, etcetera". The aim of the book is "to present in a unified approach a series of results concerning totally convex functions on Banach spaces and their applications to building iterative algorithms for computing common fixed points of measurable families of operators and optimization methods in infinite dimensional settings".

Chapter 1 introduces a number of concepts that are used later on in the book. An important one is the Bregman distance. The idea is, to choose a convex function f which maps a real Banach space into the real line. A way to measure the distance between two points x and y is to consider the extent to which $f(y)$ differs from the linear approximation of $f(y)$ starting at x. This distance is denoted $Df(x, y)$. It is straightforward to see that for this approach to work, the function f should satisfy additional properties such as total convexity. Roughly speaking, f is totally convex at a point x if the distance between $f(y)$ and the linear approximation of $f(y)$ starting at x is positive for all $y > x$. The function f is totally convex if this holds for all x in the interior of the domain of f. A number of properties (most of these are used later on in the book) are derived for this way of measuring distance using totally convex functions f.

Chapter 2 is devoted to the computation of fixed points. An important concept here is a sequencially consistent Bregman function f, which, among other things, is totally convex and differentiable. The advantage of these type of functions is that a well chosen Bregman function can reduce the requirements needed for convergence as compared to using a norm as distance measure. The first result in this chapter is that if two sequences converge with respect to $Df(x, y)$ (where f is a sequentially consistent Bregman function) then the sequences also converge with respect to the norm. Let T_w ($w \in W$) denote a measurable family of operators. The authors derive conditions under which the sequences $x_{k+1} = T_w(x_k)$ converge to an almost common fixed point x^*, in the sense that $T_w(x^*) = x^*$ for almost all w. The chapter concludes with some applications where these results are used including the problem of finding Nash equilibria in zero sum n player games.

Chapter 3 on infinite dimensional optimization starts off with the proximal point method which is used to find the minimum of a function g. This method is extended to find the solution to the problem min $g(x)$ subject to $x \in C$ where C is a nonempty, convex and closed subset of the reflexive separable Banach space B (not necessarily Hilbertian as required by earlier results). A proximal point method to solve this problem is now constructed. This proximal point method is then applied to augmented Lagrangian methods in infinite dimensional spaces.

All in all, the book is written in a clear style and each of the results is presented in a transparant way. My main problem with the book is that the authors do not invest much effort in motivating results. More than once I got the sense that 'this result may well be true, but why do I need to know it?'. The authors have a tendency to motivate results by saying that they are generalizations of previous results, but — at least to me — that does not make a result interesting. Further, some of the results in chapter 1 are derived for their own interest, not because they are needed later on. The organization of the results would improve if this were labelled more clearly. It would allow readers with a particular interest to skip parts. Finally, some of the examples given in the book did not really appeal to me. To illustrate, the results on Nash equilibria in zero sum games are not that interesting as most economists would say that zero sum games are largely irrelevant in the real world. But clearly, what may be interesting for mathematicians may not be very exciting for economists (and the other way around). It is an interesting book, but as an economist I would probably expect more entertainment for its price. *J. Boone*

M.L. Wilkins

Computer simulation of dynamic phenomena

Berlijn: Springer-Verlag, 1999
246 p., prijs DM 138,–
ISBN 3-540-63070-8

In dit boek beschrijft Wilkins eindige differentieschema's in een, twee en drie dimensies voor het oplossen van de drie basisvergelijkingen van de mechanica (behoud van massa, impuls en energie). Modellen die het materiaal beschrijven completeren de basisvergelijkingen voor toepassingen in de compressibele stromingsleer en materiaalkunde. Door het gebruik van Lagrange-coördinaten kan de locatie van de massa-deeltjes gevolgd worden wanneer door plasticiteit en externe krachten de materiaaleigenschappen veranderen. De modellering van breuk wordt beschreven. De detonatie van explosieven wordt behandeld met behulp van de Chapman-Jouget theorie en experimenteel bepaalde toestandsvergelijkingen. Er wordt een bibliotheek van toestandsvergelijkingen voor materialen en explosieven gepresenteerd, tezamen met theoretische modellen en experimentele data, evenals verscheidene numerieke resultaten.

Hoewel de titel een breed exposé doet vermoeden, behandelt dit boek het werk dat de auteur van 1952 tot 1985 verricht heeft aan de Lawrence Livermore National Laboratory. De auteur verwacht dat de lezer een gedegen voorkennis van onderwerpen als elasticiteit en plasticiteit heeft: de nadruk ligt voornamelijk op de numerieke algoritmen (eindige differenties, tijdsafhankelijke grids). Het boek is geschreven in een telegramstijl, met weinig uitweidingen of discussie over eventuele alternatieve aanpakken. Kortom, een boek voor experts op het gebied van materiaaldeformatie, maar zeker geen boek om eens te proeven van numerieke technieken binnen de materiaalkunde. *I. Wenneker*

N. Higson and J. Roe
Analytic K-homology
(Oxford mathematical monographs)
Oxford: Oxford University Press, 2000
424 p., prijs £65
ISBN 0-19-851176-0

Het onderwerp van dit boek ligt op het raakvlak van de functionaalanalyse (in het bijzonder de theorie van lineaire operatoren op Hilbert-ruimten) en de algebraïsche topologie. Tevens past het geheel in de filosofie van de niet-commutatieve meetkunde. De constructie van analytische K-homologie komt voort uit twee ogenschijnlijk ongerelateerde problemen.

Het eerste lijkt een puur operator-theoretische vraag, gesteld aan het eind van de jaren zestig door Brown, Douglas, en Fillmore: beschrijf de equivalentieklassen van begrensde essentieel normale operatoren op een Hilbertruimte. Een operator T heet normaal als $T^*T = TT^*$, en essentieel normaal als deze gelijkheid geldt modulo een compacte operator. Twee zulke operatoren heten equivalent als ze samenhangen door een unitaire transformatie, opnieuw modulo een compacte operator. Als we ook nog aannemen dat $T = T^*$, dan heeft dit probleem een eenvoudige oplossing, gegeven door een klassieke stelling van Weyl en Von Neumann: twee zelfgeadjungeerde operatoren zijn equivalent in bovengenoemde zin dan en slechts dan als ze hetzelfde essentiele spectrum hebben.

Maar de algemene vraag blijkt zeer veel moeilijker te zijn: het antwoord dat bovengenoemd trio in 1973 gaf was dat twee essentieel normale operatoren T_1 en T_2 equivalent zijn dan en slechts dan als ze hetzelfde essentiele spectrum X hebben, *en* voor alle $\lambda \in \mathbf{C}\backslash X$ de (Fredholm) index van $T_1 - \lambda I$ gelijk is aan die van $T_2 - \lambda I$. Om dit te bewijzen waren niet alleen diepe resultaten uit de theorie van C^*-algebra's nodig, maar werden ook, voor het eerst, technieken uit de algebraïsche topologie in dit gebied toegepast. Zo zag men in dat de ruimte $\mathrm{Ext}(X)$ van equivalentieklassen van essentieel normale operatoren met essentieel spectrum X een abelse groep is, die gepaard kan worden met de groep $K^1(X)$ uit de topologische K-theorie van Atiyah en Hirzebruch. Aldus biedt $\mathrm{Ext}(X)$ een concrete realisatie van $K_1(X)$, de oneven K-homologie groep van X (in de zin dat K-theorie als gegeneraliseerde cohomologietheorie een duale homologietheorie heeft). Tevens is $\mathrm{Ext}(X)$ de structuur die uitbreidingen van de compacte operatoren met $C(X)$ beschrijft. Voor willekeurige compacte Hausdorffruimten X kan men dit laatste ook als uigangspunt nemen.

Het tweede probleem dat tot analytische K-homologie heeft geleid is het beter begrijpen en generaliseren van de index-stelling van Atiyah en Singer uit 1968. Ook hier speelt topologische K-theorie een belangrijke rol, en het beslissende inzicht dat later tot de analytische realisatie van de K-homologie groep $K_0(X)$ (duaal aan de K-theorie groep $K^0(X)$) in termen van gegeneraliseerde elliptische operatoren op vectorbundels over X leidde was dan ook afkomstig van Atiyah zelf. De technische realisatie van Atiyah's idee werd met name gegeven door Kasparov. Opmerkelijk genoeg kunnen zowel topologische K-theorie als analytische K-homologie voor willekeurige C^*-algebras A gedefinieerd worden; het commutatieve geval $A = C(X)$ reproduceert dan de oorspronkelijke theorie. De klap op de vuurpijl is de KK-theorie van Kasparov, die topologische K-theorie en analytische K-homologie combineert in een bivariante functor. De duale paring tussen K-theorie en K-homologie is dan een speciaal geval van het intersectieproduct in KK-theorie, dat in het commutatieve geval alle mogelijke operaties uit de algebraïsche topologie als speciaal geval bevat.

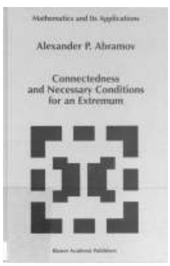
Het onderhavige boek geeft in zekere zin een inleiding tot al deze zaken, waarin de auteurs ophouden waar KK-theorie begint. Een flinke voorkennis op het gebied van C^*-algebra's en enige kennis van de algebraïsche topologie is evenwel vereist, en verder moet de lezer regelmatig diep nadenken wat wordt bedoeld (zo kostten resultaten die volgens de auteurs onmiddellijk zouden moeten volgen de recensent vaak een hele treinreis Nijmegen-Amsterdam). Ook is het nauwelijks mogelijk dit boek op waarde te schatten als men niet al eens een andere, elementaire aanpak van index-theorie heeft gezien. Aldus begint het boek niet bij het begin, maar het eindigt ook niet aan het front, want zoals gezegd wordt KK-theorie niet behandeld (laat staan de opvolger daarvan, de nog krachtigere E-theorie van Connes en Higson). Met al deze proviso's kunnen we toch spreken van een prachtig boek van twee jonge auteurs die in het opkomende gebied van de 'geometrische functionaalanalyse' een vooraanstaande rol spelen. *K. Landsman*

H. Frenk, K. Roos et al. (eds.)
High performance optimization
(Applied optimization; 33)
Dordrecht: Kluwer, 2000
473 p., prijs NLG 395,–
ISBN 0-7923-6013-3

The book contains papers on fundamentals and recent results in linear, quadratic and semi-definite optimization. The field evolved rather slowly before the seminal work by Karmarkar, which started a breakthrough in 1984. A rich scientific literature is available nowadays. The considered collection of papers distinguishes itself from other books by its focus on problem structures, and implementations of the considered methods using high performance computers.

The first part, making nearly half of the book, is written by J. Sturm. Its subject is theory and algorithms of semi-definite programming. An introduction into the theory (mathematical backgrounds, duality, polynomiality) is presented as well as an analysis of the most popular interior point methods for semi-definite problems: path following, self-dual embedding, primal-dual central path, and central region. The rates of local and global convergence are estimated, implementation problems are discussed, and solution examples are presented. The second part *Linear, quadratic, semi-definite programming and beyond* contains the papers on correctness, implementation, complexity, and efficiency of different interior point algorithms. Problems of linear complementarity, the parallel branch and bound approach to nonlinear mixed-integer programming using non-linear relaxation, and minimization of multivariate polynomials are treated in a unified way. The application efficiency of interior point algorithms is discussed and demonstrated in the multi-stage portfolio modelling, in problems of linear ordering, and in the finite element solution of parabolic inverse problems. The strength of interior point algorithms is their ability to solve large classes of essentially nonlinear problems with an efficiency similar to solution methods for linear problems. The book concludes with a paper by R. Freund and S. Mizuno on synopsis of major developments in the last thirteen years, current state of the art, and future directions of research in interior point methods.

The book will be interesting to researchers in optimization as well as to experts in applied fields intending to solve large- scale real world problems. Because of its novel presentation of some topics of semi-definite programming the book may also be useful as a textbook. *A. Zilinskas*



A.P. Abramov

Connectedness en necessary conditions for an extremum

Dordrecht: Kluwer, 1998

199 p., prijs NLG 175,-

ISBN 0-7923-4910-5

This book is a thoroughly revised English version of the author's original Russian book (1996) with the same title.

The first chapter introduces the classical Dybrovitskii-Milyutin results in linear topological spaces. This chapter is closed by presenting Lusternik's theorem. Chapter 2 studies alternative conditions for extrema in nonlinear programming where the functions might be non-smooth. An economic interpretation of the results is presented as well. The third chapter considers extrema in optimal control problems. Finally, the case of measured spaces, especially in Frechet space, is considered. The main tool here is the use of informational functionals.

The book is more a monograph than a text book. It gives a quite extensive discussion of the necessary conditions for an extremum from the point of view of new topological connectivity. The author's starting point is the classical Dybrovitskii-Milyutin approach and functional analysis tools are combined with topological methods. One of the key results is the so-called alternative condition of an extremum for a variety of problems.

The monograph links the abstract theory of necessary conditions to the widely used Karush-Kuhn-Tucker conditions and gives a candid insight into the question why inequality constraints induce sign restricted Lagrange multipliers while equality constraints imply unrestricted (free) Lagrange multipliers.

The alternative conditions are illustrated by using some examples from mathematical economics and static equilibrium problems from mechanics. The inherent relation between these virtually distant applications is shown as well.

The book is well written. Mathematically educated readers should be able to follow the argumentations without much difficulty. However, some more explanations and discussions would facilitate the readability.

Abramov's book is a useful reference book for researchers in optimal control, theoretical optimization and mathematical economics. Advanced graduate students in applied mathematics are among the target audience as well. *T. Terlaky*

D.E. Evans and Y. Kawahigashi

Quantum symmetries on operator algebras

(Oxford mathematical monographs)

Oxford: Clarendon Press, 1998

829 p., prijs £105

ISBN 0-19-851175-2

De scheidslijn tussen wiskunde en theoretische natuurkunde is niet altijd even gemakkelijk te trekken. Een mooi voorbeeld hiervan is de ontwikkeling van de quantummechanica. Door experimenteel natuurkundigen werden fenomenen waargenomen, die zich niet lieten verklaren vanuit de klassieke mechanica. Met het begrip foton werd een denkbeeldig deeltje geïntroduceerd, dat als verklaring moest dienen voor de waargenomen effecten. Daarmee werd de aanzet gegeven tot een verdere verwiskundiging van de fysica. Niet langer maakten natuurkundigen louter gebruik van de klassiek wiskundige hulpmiddelen uit de theorie van differentiaal- en integraalvergelijkingen. Nieuwe wiskunde moest worden gegenereerd. Dirac's *The Principles of Quantum Mechanics* is even revolutionair voor de natuurkunde als voor de wiskunde. Immers door dit boek initieerde Dirac de theorie der Hilbertruimten, maat- en integratietheorie en de theorie der gegeneraliseerde functies. Dat Dirac als wetenschapper zich zowel een natuurkundige als een wiskundige betoonde is natuurlijk kenmerkend voor de echte groten als Pascal, Newton, Gauss, Euler, Lagrange, Jacobi, Hamilton en Riemann. Het moge duidelijk zijn dat ik vind dat Dirac in dit rijtje thuis hoort, maar daar gaat het me hier natuurlijk niet om. Ik wil slechts benadrukken dat de natuurkunde reeds eeuwenlang de motor is van veel wiskundig innovatief onderzoek. Zo is de natuurkundige inspiratiebron die geleid heeft tot de wiskunde die in dit boek beschreven staat, de statistische mechanica en (quantum)veldentheorie.

In het voorwoord van dit boek staat dat de doelgroep onderzoekers bestaat uit op het gebied van operatorenalgebra's, statistische mechanica en algebraïsche, topologische en conforme veldentheorie. Het boek is gebaseerd op lezingen en cursussen die de auteurs verzorgden aan de universiteiten van Kyoto en Tokyo en van Warwick en Swansea in de periode van 1985 tot 1995. De titel van het boek, met name de kreet "quantum symmetry" suggereert een relatie met de (quantum)fysica. Die is er natuurlijk ook. Maar een buitenstaander zoals ik schrikt toch even als hij, dit boek bestuderend, moet vaststellen welke wiskundige diepzinnigheden vereist zijn om de taal van de moderne fysica te doorgronden.

Deze taal en bijbehorende imaginaties lijken zuiver wiskundig; er is niet langer sprake van een fysisch intuïtieve grondslag. Wiskunde en natuurkunde blijken volledig te worden verweven.

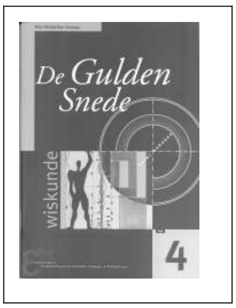
Voor mij ligt een fraai boekwerk dat een wiskundige ontwikkeling weerspiegelt die startte met Von Neumann en Murray- als eersten introduceerden zij de theorie van operatoralgebra's als een wiskundig kader voor de quantummechanica-, Bratelli en Robinson, die in hun boeken de niet-commutatieve operatoralgebra's gebruikten in de beschrijving van quantumstatische mechanica, Onsager en Kauffman, die toonden dat niet-commutatieve operator-algebra-theorie ook een kader vormt voor de klassieke statische mechanica en Doplicher, Haag en Roberts, die operator-algebraische concepten gebruikten in de beschrijving van de quantumvelden theorie. Een factor is een Von Neumann-algebra waarvan het centrum triviaal is. Een subfactor is een von Neumann-deelalgebra van een factor, die zelf een factor is. Een inclusie van een subfactor in een factor heeft een rijke combinatorische structuur, die beschreven kan worden door een quantizatie van een symmetriegroep, een quantumsymmetrie. Jones initieerde de theorie van subfactoren. Hij vond dat de minimale algebraïsche structuur die deze quantumsymmetrie realiseerde de Temperley-Lieb-algebra is. Dit boek, één van de eerste op dit gebied, beschouwt deze combinatorisch-algebraïsche ontwikkelingen vanuit het perspectief van de operatoralgebra's.

Ik ben onder de indruk van het brede scala aan onderwerpen dat aan de orde komt. En ook van de heldere en directe manier waarop ze worden geintroduceerd en verder uitgewerkt. Het boek vereist een minimum aan voorkennis, maar gaat wel uit van wiskundige rijpheid van de lezer. Het legt relaties met verscheidene gebieden van zuivere wiskunde en mathematische fysica, in het bijzonder de (quantum) veldentheorie en statistische mechanica. Het boek bevat een zeer uitgebreide literatuurlijst, die als compleet mag worden beschouwd.

De eerste vijf hoofdstukken vormen een gedetailleerde inleiding tot het mathematisch begrippenapparaat: operator-theorie, C*-algebra's, K-theorie, positiviteit, één-parameter semigroepen en Von Neumann-algebra's. De daarop volgende hoofdstukken hebben een specialistischer karakter met thema's de Fermionalgebra (quantumveldentheorie), het Isingmodel (statistische mechanica), conforme veldentheorie (van tralie naar continuum) en subfactortheorie.

Het boek lijkt bij uitstek geschikt als studiemateriaal voor jonge onderzoekers, die zich op dit gebied willen kwalificeren. Voor senioren op dit gebied is het een waardevol naslagwerk en bron van nieuwe ideeën.

S.L.J. van Eijndhoven



W. Kleijne en T. Konings
De gulden snede
(Zebra-reeks; deel 4)
Utrecht: Epsilon, 2000
50 p., prijs NLG 16,75
ISBN 90-5041-058-8

Dit boekje is de vierde uitgave in de Zebra-reeks van Epsilon Uitgaven in samenwerking met de Nederlandse Vereniging voor Wiskundeleraren. Deze Zebra-reeks is geschikt voor het gebruik in het huidige VWO wiskundeprogramma. Dit boekje is daarnaast ook interessant voor alle anderen die belangstelling hebben voor de wiskunde van de gulden snede en haar toepassingen.

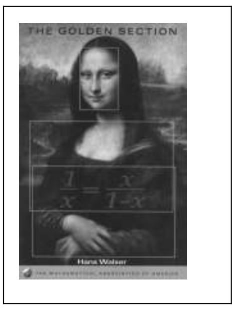
In het eerste gedeelte wordt ingegaan op de theoretische aspecten van de gulden snede, de meetkunde en de algebra van een goddelijke proportie en haar toepassingen in de kunst. Na een algemene inleiding op de gulden snede komen onder andere aan de orde het verhoudingsgetal $f = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$, een aantal constructies van de gulden snede, inclusief een bewijs dat deze constructies kloppen, Lucas-rijen, het verband tussen de rij van Fibonacci en de gulden snede en een constructie van het pentagram.

Door de tekst heen zijn enkele opdrachten opgenomen die bedoeld zijn om de besproken theorie te verdiepen. Bij de opdrachten worden aanwijzingen gegeven die voor de oplossing gebruikt kunnen worden. Aan het einde van het boekje zijn ook de antwoorden van de meeste, maar niet van alle, vragen opgenomen.

Het eerste gedeelte van het boekje is goed door te werken voor leerlingen in de Tweede Fase met een Natuurprofiel. De geschiedenis over de gulden snede en de vele verschillende toepassingen spreken leerlingen aan. De indeling van de tekst en de opgaven had wel wat overzichtelijker gekund en de notaties van met name breuken geven helaas onnodig onduidelijkheid.

De tweede helft van het boekje bevat zeven eindopdrachten uit heel verschillende gebieden, waarin de toepassingen van de gulden snede worden besproken. Nader onderzoek kan worden gedaan op het gebied van bouwkunst, schilderkunst, biologie, scheikunde en pure wiskunde. Elke opdracht begint met een probleemstelling met daarop volgend een verkenning van het probleem. De tekst geeft veel interessante informatie, al is de eindopdracht niet altijd even duidelijk geformuleerd. Het is de bedoeling dat de leerling één opdracht kiest om aan de hand van de gegeven informatie verder uit te werken. Dit moet leiden tot een werkstukje waarin de gekozen eindopdracht wordt verwerkt tot een lopend verhaal of artikel. De meeste opdrachten zijn zo rijk dat ze ook geschikt zijn voor groepjes van twee of drie leerlingen.

I. Gulikers



H. Walser
The golden section
Washington: Math. Assoc. of America
142 p., prijs $26.95
ISBN 0-88385-534-8

De kaft met Da Vinci's Mona Lisa, gevangen in een gulden rechthoek, en de achterkaft met de uitspraak "de Gulden Snede heeft sinds de oudheid een belangrijke rol gespeeld in veel delen van de meetkunde, architectuur, muziek en filosofie", suggereren een inhoud als in de klassieker *The Divine Proportion* (Huntley, Dover 1970). Ook lijkt dat de inhoud van *De ontstelling van Pythagoras, over de geschiedenis van de goddelijke verhouding* (A. van der Schoot, Kok Agora, 1998), waarin bovenstaande uitspraak overtuigend wordt weerlegd, niet doorgedrongen te zijn tot de kaft-maker.

De inhoud van dit boekje betreft echter het voorkomen van de gulden snede alleen in wiskundige context, en het bevat ten opzichte van het boekje van Huntley vele nieuwe onderwerpen. De hoofdonderwerpen zijn: fractals, meetkundige figuren, vouwen met stroken papier en origami, getalreeksen, en veelvlakken. Bij elk onderwerp wordt een eindeloos spel van variatie en generalisatie gespeeld. Het deed me daarbij denken aan het soort spel van *Het wondere onderzoekingsveld der vlakke meetkunde* (Ir. A.E. Bosman, Parcival, 1957). De gulden snede is voor Walser veelal een eerste voorbeeld, een startpunt in een reeks van generalisaties naar een algemeen principe. Elk onderwerp wordt compact beschreven, er blijft voldoende te denken over. Door middel van vragen wordt de lezer aangespoord zelf actief te worden, en antwoorden achterin het boekje geven voldoende steun, maar laten flinke stukken van de oplossingsweg aan de lezer over. De auteur is thuis in de 'gulden snede'-literatuur van de laatste 40 jaar, en geeft voor verdere achtergrondinformatie gerichte verwijzingen.

Het boekje lijkt mij uitdagend voor liefhebbers van 'wiskunderecreatie', voor keuzecursussen of individuele studie-activiteiten in HBO en Universiteit, en de geïnteresseerde en betere leerling in vwo-B. Het graaft aanzienlijk dieper dan boekjes, die recent zijn verschenen ten behoeve van de keuzeonderwerpen voor vwo (*De Gulden Snede*, W. Kleijne en T. Konings, Epsilon, 2000, en *Op een goudschaal*, J. Kuiper, Wolters-Noordhoff, 2000). Het is daarom aan te bevelen als achtergrond voor docenten die deze boekjes gebruiken. Een aanwinst in de literatuur over dit onuitputtelijke en veelzijdige onderwerp.

T. Konings

E.W.A. de Moor

Van vormleer naar realistische meetkunde

(CD-β Wetenschappelijke bibliotheek; 33)
Utrecht: Freudenthal Instituut, 1999
694 p., prijs NLG 70,–
ISBN 90-73346-40-1

Een bespreking van dit veelomvattende en rijke proefschrift van bijna 700 pagina's vraagt om een rigoureuze beperking bij voorbaat. Een samenvatting van de inhoud van de vijf delen zou de maximumlengte van een recensie doen overschrijden, terwijl alleen al een opsomming van de diverse delen, hoofdstukken en paragrafen buitengewoon de moeite waard zou zijn vanwege de encyclopedische waarde van het proefschrift.

Voorbij de beperking dan toch een poging: in Deel A staat de geschiedenis van de vormleer in de negentiende eeuw centraal. Vormleer werd als schoolvak onderwezen aan kinderen op de lagere school. Over inhoud en doel van dit vak bestonden nogal uiteenlopende opvattingen. In 'de leer der vormen' zit een meetkundig aspect; dit bleek slechts één van de elementen van dit vak waarmee men beoogde het leren zien, denken en spreken te stimuleren. Deel B behandelt de ontwikkeling van het meetkundeonderwijs in de twintigste eeuw tot aan 1970. De historische beschrijving van de ontwikkelingen in het meetkundeonderwijs wordt vooral zo interessant door de vele discussies die zich rond dit vak afspeelden. De schrijver is er in geslaagd de talloze feiten en wetenswaardigheden uit deze periode van twee eeuwen boeiend en overzichtelijk te beschrijven. Er is een schat aan informatie te vinden, gebaseerd op primaire en secundaire bronnen; de tekst is verrijkt met citaten uit oefen- en leerboekjes, onderwijsrapporten, tijdschriften en wetteksten waardoor een levendig beeld ontstaat van de jaren van de vormleer en het meetkundeonderwijs van Pestalozzi via onder anderen Fröbel en Versluys tot Freudenthal.

Het derde deel van het boek waarin het ontstaan van de realistische meetkunde beschreven wordt heeft een enigszins ander karakter. De Moor baseert Deel C op literatuur- en archiefonderzoek, op informatie uit enquêtes gehouden onder oudmedewerkers van het Instituut voor de Ontwikkeling van het Wiskunde-Onderwijs (IOWO) èn, niet onbelangrijk, op zijn persoonlijke ervaringen als medewerker van Wiskobas en het IOWO. Dit laatste frappeert en wekt de nieuwsgierigheid; bovendien roept het vragen op over de relatie tussen het doen van onderzoek en de daarvoor benodigde objectiviteit en betrokkenheid. Op pagina 387 schrijft de Moor: "[. . .] kan achteraf gesteld worden dat dit geheel van uitgangspunten een voor die tijd verstandig vertrekpunt is geweest en een gunstige uitwerking heeft gehad op het Nederlandse reken-wiskundeonderwijs." Een opvallend waardeoordeel dat het boek een bijzondere flair geeft. Naar mijn mening is het in een proefschrift echter niet op zijn plaats.

In dit derde deel schetst de Moor een beeld van de Nederlandse onderwijssituatie waarin de New Math beweging in de jaren zestig minder voet aan de grond kreeg dan in andere Europese landen. Wel verdrong het formalistische structuralisme voor enige tijd de Euclidische meetkunde uit het lager en voortgezet onderwijs. In de zeventiger jaren bleek het denken over meetkundeonderwijs op de basisschool weer op gang te komen. Het IOWO deed ontwikkelingswerk naar meetkundeonderwijs en ontwikkelde onder andere het project Waterland. In dit project kwam de toen opgekomen transformatiemeetkunde niet voor, maar werd meetkunde opgevat als het leren begrijpen van ruimtelijke verschijnselen; de directe dagelijkse ervaringen van de kinderen werden als uitgangspunt voor het realistische meetkundeonderwijs gekozen, niet het meetkundige systeem. Over dit Waterland-project voeg ik mijn persoonlijke ervaring toe, in aansluiting op het ten dele persoonlijke karakter van dit deel van het proefschrift: als studente aan de pedagogische academie hing ik (in 1981) op mijn hospiteerschool een grote landkaart van Waterland voor de klas en gebruikte deze om kinderen mee te nemen naar een fictieve, maar herkenbare, wereld waarin allerlei meetkundige en rekenkundige aspecten geoefend werden. Het project was uiterst effectief en de middelen visueel aantrekkelijk. Aan het enthousiasme en de betrokkenheid van de leerlingen bewaar ik zeer goede herinneringen.

Tenslotte vinden we in Deel D de resultaten van de toets en enquêtes van het Pimbo-project uit 1995 naar het niveau van het meetkundeonderwijs aan het einde van de basisschool. En de Moor zou de Moor niet zijn als hij zijn onderzoek niet afsloot met een aanbeveling voor een realistisch meetkundeprogramma voor de basisschool van de toekomst. De lijst met geraadpleegde literatuur en bronnen is indrukwekkend van omvang en voor een ieder die onderwijs-historisch onderzoek doet in zichzelf weer een waardevolle bron. Rest mij deze bespreking te besluiten met een verbastering van Freudenthal's gezegde: "verdiep u in dit indrukwekkende en prettig leesbare werk omdat u zichzelf zoveel moois niet mag onthouden!"

K. Blom