Wim Veldman
Subfaculteit Wiskunde, Katholieke Universiteit Nijmegen
Postbus 9010, 6500 GL Nijmegen
veldman@sci.kun.nl

Overzichtsartikel

Bijna de waaier

Voor L.E.J. Brouwer is elke functie die $[0,1]$ afbeeldt in $\mathbf{R}$ uniform continu. In dit artikel wordt geschetst hoe hij zich van de juistheid van deze stelling overtuigde. De auteur maakt melding van kanttekeningen die Kleene en Bishop bij Brouwers bewijs maakten en noemt enkele conclusies die Brouwer ook had kunnen trekken. Dit artikel is een herziene versie van [23], dat verscheen in het Liber Amicorum, uitgebracht ter gelegenheid van de vijfenzestigste verjaardag van Arnoud van Rooij.

De uniforme-continuïteitsstelling is een hoeksteen van de reële analyse, en een juweel.

Stelling. *Zij f een functie van het reële gesloten segment $[0,1]$ naar de verzameling $\mathbf{R}$ van de reële getallen, en zij m een natuurlijk getal. Als er voor elke x in $[0,1]$ een natuurlijk getal n bestaat zó, dat voor alle y in $[0,1]$, als $|x-y| < \frac{1}{2^n}$, dan $|f(x)-f(y)| < \frac{1}{2^{m+1}}$, dan bestaat er een natuurlijk getal n zó, dat voor alle x, y in $[0,1]$, als $|x-y| < \frac{1}{2^n}$, dan $|f(x)-f(y)| < \frac{1}{2^m}$. Dus: als f in elk punt van $[0,1]$ continu is, dan is f gelijkmatig (uniform) continu op $[0,1]$.*

Het bewijs wordt meestal uit het ongerijmde gegeven, bijvoorbeeld als volgt.

Neem eens aan dat we, onder de gegeven omstandigheden, voor zekere m geen geschikte n kunnen vinden. We maken twee rijen $x_0, x_1, \ldots$ en $y_0, y_1, \ldots$ van punten van $[0,1]$ zó, dat, voor elke i, $|x_i - y_i| < \frac{1}{2^i}$ en $|f(x_i) - f(y_i)| \geq \frac{1}{2^m}$. Dan zoeken we een punt x van $[0,1]$ waar de rij $x_0, x_1, x_2, \ldots$ zich ophoopt, dat wil zeggen voor elke p bestaat i zó, dat $i > p$ en $|x - x_i| < \frac{1}{2^p}$. Vervolgens bepalen we n zó, dat voor alle y in $[0,1]$, als $|x-y| < \frac{1}{2^n}$, dan $|f(x)-f(y)| < \frac{1}{2^{m+1}}$. Tenslotte berekenen we i zó, dat $i > n$ en $|x - x_i| < \frac{1}{2^{n+1}}$. We zien nu: $|x - y_i| < |x - x_i| + |x_i - y_i| < \frac{1}{2^n}$ dus: $|f(x_i) - f(y_i)| < |f(x_i) - f(x)| + |f(y_i) - f(x)| < \frac{1}{2^m}$. Tegenspraak. □

Deze fascinerende redenering biedt geen spoor van een aanwijzing hoe we te werk moeten gaan wanneer we, bij gegeven m, daadwerkelijk een passende n willen vinden. We leren alleen dat de veronderstelling dat zo'n getal niet bestaat tot tegenspraak voert. Bij nader toezien slaagt het bewijs niet eens in deze bescheiden opzet. Het doet een beroep op de stelling van Bolzano-Weierstrass die zegt dat elke begrensde rij reële getallen een ophopingspunt heeft.

Er zijn echter oneindige rijen van punten van $[0,1]$ waarbij het bepalen van de plaats van een ophopingspunt een onbegonnen zaak is. Hier is een voorbeeld. Laat $d : \mathbf{N} \longrightarrow \{0,1,\ldots,9\}$ de decimaalontwikkeling van π zijn, dus: $\pi = 3 + \sum_{n=1}^{\infty} d(n) \cdot 10^{-n}$. We definiëren nu een rij $x_0, x_1, \ldots$ van punten van $[0,1]$. Voor iedere n, als er geen $i < n$ bestaat zó, dat $d(i) = d(i+1) = \cdots = d(i+9) = 9$, dan $x_n := 0$, en als dat wel zo is, dan $x_n := 1$. Wie met nauwkeurigheid < 1 een ophopingspunt van deze rij kan aangeven, weet óf, als zijn punt groter is dan 0, dat er een aaneengesloten blok van tien negens in de decimaalontwikkeling van π optreedt, óf, als zijn punt kleiner is dan 1, dat dat niet zo is.

Zo iemand kan dus een tot nu toe onopgeloste vraag beantwoorden. Mocht die vraag morgen beslist worden, doordat zo'n blok gevonden wordt, dan verliest het voorbeeld niets aan kracht. We kunnen het immers eindeloos variëren: is er een blok van elf negens in de decimaalontwikkeling van π? Is er een blok van

stelling

twaalf negens in de decimaalontwikkeling van π? Enzovoort. Een voorbeeld als dit — Brouwer maakt er tientallen, tegen allerlei klassieke resultaten — laat zien dat de aangevochten stelling onjuist en ongegrond is wanneer we de mededeling die zij doet constructief opvatten, maar (nog) niet dat zij, indien zo begrepen, tot tegenspraak voert; wie de stelling blijft volhouden is, om een woord van Johan de Iongh te gebruiken, *vermetel*: zijn moed is roekeloosheid.

Het feit dat een klassieke stelling geen constructieve lezing toelaat is van groot belang, ook voor wie zich door Brouwer onheus behandeld voelt en zegt: "Maar ik had de stelling zo niet bedoeld". De vraag hoe je de stelling dan wel bedoeld zou kunnen hebben is niet eenvoudig te beantwoorden.

Zolang we niet beschikken over een constructief steekhoudend bewijs van de uniforme-continuïteitsstelling moeten we vrezen dat ook deze stelling door een geschikt tegenvoorbeeld aan het wankelen kan worden gebracht.

De schatkamer van de analyse bevat meer edelstenen, zoals de stelling van de hoogste waarde:

Stelling. *Zij f een functie van $[0,1]$ naar $\mathbf{R}$ die in elk punt van $[0,1]$ continu is. Er bestaat x in $[0,1]$ zodat voor alle y in $[0,1]$, $f(y) \leq f(x)$.*

De stelling kan, net als de stelling van Bolzano-Weierstrass, worden bewezen met de vaak toepasbare methode van voortgaande tweedeling.

We definiëren $x_0 := 0$, en voor elk natuurlijk getal n, als er voor elke y in $[x_n + \frac{1}{2^{n+1}}, x_n + \frac{1}{2^n}]$ een z in $[x_n, x_n + \frac{1}{2^{n+1}}]$ bestaat zó, dat $f(y) < f(z)$, dan $x_{n+1} := x_n$ en als dat niet zo is, dan $x_{n+1} := x_n + \frac{1}{2^{n+1}}$. We stellen eerst vast dat voor elke n, voor elke y in $[x_n, x_n + \frac{1}{2^n}]$ een z in $[x_{n+1}, x_{n+1} + \frac{1}{2^{n+1}}]$ bestaat zó, dat $f(y) \leq f(z)$, en dan, inductief, dat er voor elke y in $[0,1]$, voor elke n een z in $[x_n, x_n + \frac{1}{2^n}]$ bestaat zó, dat $f(y) \leq f(z)$.

De rij $x_0, x_1, \ldots$ is convergent, noem de limiet x. We laten zien dat voor alle y in $[0,1]$, $f(y) \leq f(x)$. Stel dat, voor zekere y in $[0,1]$, $f(y) > f(x)$; f is continu in x en we bepalen n zó, dat voor alle z in $[0,1]$, als $|x - z| < \frac{1}{2^n}$, dan $f(y) > f(z)$. Maar dan voor alle z in $[x_{n+1}, x_{n+1} + \frac{1}{2^{n+1}}]$, $f(y) > f(z)$, terwijl er een z in $[x_{n+1}, x_{n+1} + \frac{1}{2^{n+1}}]$ bestaat zó, dat $f(y) \leq f(z)$. Tegenspraak. □

Het is niet erg dat in het laatste deel van dit bewijs uit het ongerijmde wordt geredeneerd. Wie wil aantonen, voor zekere reële

Maguer, señor Quijote, que sandeces
vos tengan el cerbelo derrumbado,
nunca seréis de alguno reprochado
por home de obras viles y soeces.
Serán vuesas fazañas los joeces,
([9], p. 19)

Hoewel het velen, Don Quichot, moet spijten,
Uw brein omfloerst te zien door dwaze dromen,
Zo zal, dat g' ooit iets laags hebt ondernomen,
Toch zeker nimmer iemand U verwijten.
Uw heldendaden zullen voor u pleiten,
([10], p. 41)

getallen a, b, dat $a \leq b$, kan niet beter doen dan laten zien dat de vooronderstelling dat $b < a$ tot tegenspraak leidt. Het is wel erg dat in het eerste deel een onuitvoerbare constructie wordt beschreven. Wie weet uit te maken of het waar is dat voor elke y in $[\frac{1}{2},1]$ een z in $[0,\frac{1}{2}]$ bestaat met de eigenschap: $f(y) \leq f(z)$? Alleen een Don Quichot zou het wagen deze 'constructie' in het werkelijke leven na te spelen.

De stelling van de hoogste waarde belooft het onmogelijke. Het volgende voorbeeld maakt dit duidelijk. Laten we eerst afspreken dat een *reëel getal* x voor ons niets anders is dan een rij $x(0), x(1), \ldots$ van rationale getallen die aan de voorwaarde van Cauchy voldoet, dat wil zeggen voor elke m bestaat er een n zó, dat voor elke p, $|x(n+p) - x(n)| < \frac{1}{2^m}$. Bekijk opnieuw de decimaalontwikkeling $d : \mathbf{N} \to \{0, 1, \ldots, 9\}$ van π. We maken een reëel getal x als volgt. We definiëren $x(0) := 0$, en voor elke n, als $x(n) = 0$ en $d(n) = d(n+1) = \ldots = d(n+9)$, dan $x(n+1) := (-1)^n \cdot \frac{1}{2^n}$, zo niet, dan $x(n+1) := x(n)$. Het getal x heeft een erg kleine absolute waarde en we kunnen niet uitmaken of het gelijk is aan 0, of groter dan 0, of kleiner dan 0. We zeggen wel dat *x zweeft om* 0. Zij f de functie van $[0, 1]$ naar $\mathbf{R}$ die wordt vastgelegd door de eisen: $f(0) = f(1) = 0$, en $f(\frac{1}{2}) = x$, en f is lineair op het segment $[0, \frac{1}{2}]$ en ook op het segment $[\frac{1}{2}, 1]$. Stel dat f een maximale waarde aanneemt in het punt z. Als $|\frac{1}{2} - z| < \frac{1}{2}$, dan is x niet negatief, en als $|\frac{1}{2} - z| > \frac{1}{4}$, dan is x niet positief. Er is niemand die zo'n punt z met nauwkeurigheid $< \frac{1}{2}$ weet te benaderen.

Tegen de nu gewekte verwachting in heeft Brouwer in 1923 de uniforme-continuïteitsstelling, en zelfs iets meer dan die stelling, op zijn eigen intuïtionistische manier bewezen, zie [5]. Hij werd geleid door het besef dat je veel moet weten voor je met reden kunt zeggen dat een functie van $[0, 1]$ naar $\mathbf{R}$ in elk punt van $[0, 1]$ echt uitgerekend kan worden. Zoveel, dat je in die wetenschap een basis vindt voor de conclusie van de uniforme-continuïteitsstelling.

Een eerste aanwijzing voor de juistheid van deze gedachte is de opmerking dat een functie die een discontinuïteit vertoont, niet werkelijk in elk punt van $[0, 1]$ kan worden uitgerekend. Denk bijvoorbeeld aan de functie g van $[0, 1]$ naar $\mathbf{R}$ zó, dat voor alle y, als $y < \frac{1}{2}$, dan $g(y) = 0$ en als $y \geq \frac{1}{2}$, dan $g(y) = 0$. De functie g kan niet worden uitgerekend in een punt dat zweeft om $\frac{1}{2}$.

Brouwer komt tot de slotsom dat de volgende uitspraken juist zijn, ook naar zijn eigen strenge maatstaven.

Stelling 1. *Elke functie van* $[0, 1]$ *naar* $\mathbf{R}$ *is continu in elk punt van* $[0, 1]$.

Stelling 2. *Elke functie van* $[0, 1]$ *naar* $\mathbf{R}$ *die continu is in elk punt van* $[0, 1]$ *is gelijkmatig continu op* $[0, 1]$.

Stelling 3. *Bij elke functie f van* $[0, 1]$ *naar* $\mathbf{R}$ *kunnen we een getal M bepalen zó, dat* (i) *voor alle y in* $[0, 1]$, $f(y) \leq M$, *en* (ii) *voor elke n bestaat y in* $[0, 1]$ *zó, dat* $f(y) > M - \frac{1}{2^n}$.

Het is niet moeilijk stelling 3, een stelling die iets goed maakt van het verlies van de onjuist gebleken stelling van de hoogste waarde, af te leiden uit de stellingen 1 en 2. Dat gaat als volgt.

Zij f een functie van $[0, 1]$ naar $\mathbf{R}$. Definiëer een rij $m_0, m_1, \ldots$ van reële getallen: voor elke k, $m_k := \max_{i \leq 2^k} f(\frac{i}{2^k})$. Laat zien dat de rij $m_0, m_1, \ldots$ convergeert, noem de limiet M en merk op dat M aan de eisen voldoet. □

In de volgende paragraaf laten we zien op welke gronden Brouwer zijn stellingen 1 en 2 baseert. Brouwers bewijs laat zien dat ze niet alleen gelden voor functies die gedefiniëerd zijn op $[0, 1]$ maar voor alle functies waarvan het definitiegebied, net als $[0, 1]$, gesloten en begrensd is, en ook *gecatalogiseerd*, dat wil zeggen, het is mogelijk voor elk punt in $\mathbf{R}$ de afstand van dat punt tot de verzameling te bepalen. De zogenaamde *waaierstelling* speelt een sleutelrol. We geven ook een bewijs van Brouwers mooie maar weinig bekende stelling over het bestaan van voorwaartsgerichte minima.

In de laatste paragraaf leggen we uit dat woorden als 'eindig' en 'uniform-continu' in de intuïtionistische wiskunde op vele manieren kunnen worden begrepen. We bewijzen, met Brouwers eigen middelen, afschaduwingen van zijn resultaten: de bijna-waaierstelling en de bijna-uniforme-continuïteitsstelling. Het zijn maar schimmen van Brouwers trotse uitspraken; hun conclusies, ofschoon vaker te verkrijgen, zijn zwakker en minder nuttig. Even goed zijn het ook, net als Brouwers stellingen, mogelijke intuïtionistische lezingen van niet-intuïtionistische en daarom niet onmiddellijk begrijpelijke stellingen.

We laten ook zien dat een door Thierry Coquand voor het eerst bewezen principe van open inductie uit de bijna-waaierstelling kan worden afgeleid.

Brouwers tweeledig inzicht

De verzameling $\mathbf{N}$ van de natuurlijke getallen is nooit af. Het is een goed begrepen plan om achtereenvolgens te produceren: $0, 1, 2, \ldots$

Op dezelfde manier is elke oneindige rij α van natuurlijke getallen altijd onvoltooid, een project dat steeds verder wordt uitgevoerd: $\alpha(0), \alpha(1), \alpha(2), \ldots$

Brouwer, min of meer gedwongen door het diagonaalargument van Cantor, liet zijn fantasie gaan over de vele vormen die zo'n project kan aannemen. Het kan zijn dat het project bestaat in het gehoorzaam volgen van de instructies van een algoritme; zoals de decimaalontwikkeling d van π:

$$d(0) = 1, \quad d(1) = 4, \quad d(2) = 1, \ \ldots$$

Het algoritme kan natuurlijk heel eenvoudig zijn:

$$\underline{0}(0) = 0, \quad \underline{0}(1) = 0, \quad \underline{0}(2) = 0, \ \ldots,$$

dus steeds dezelfde uitkomst.

Brouwer bedacht: ik kan ook met mezelf een afspraak maken, zoals: voor elke n, $\alpha(n) := 1$ als ik op het moment dat ik $\alpha(n)$ moet produceren een bewijs gevonden heb dat er geen aaneengesloten blok van 10 negens optreedt in de rij d, en anders $\alpha(n) := 0$. Een beetje raar. Maar in plaats van in te gaan op de haken en ogen die aan deze afspraak kleven, kunnen we beter, met Brouwer, een verdere stap zetten en toelaten dat we niet weten welke regel of afspraak aan de rij ten grondslag ligt, ja dat die regel of afspraak misschien niet eens bestaan. Het komt er alleen op aan dat er steeds een volgende waarde geproduceerd wordt, maar ik, die de rij maak, mag de waarde zelf kiezen.

We schrijven $\mathcal{N}$ voor de verzameling van alle oneindige rijen natuurlijke getallen. We gebruiken het woord 'verzameling', maar we moeten ons niet voorstellen, zoals soms bij het nadenken over verzamelingen wordt gesuggereerd, dat $\mathcal{N}$ als het ware het resultaat is van het bijeensprokkelen van haar elementen; $\mathcal{N}$ is eerder te vergelijken met een weefgetouw, een stramien, waarop we allerlei mooie rijen zullen kunnen borduren of uitvoeren.

We schrijven $\mathbf{N}^*$ voor de verzameling van alle eindige rijtjes natuurlijke getallen.

Zij α een element van $\mathcal{N}$ en s een element van $\mathbf{N}^*$. Als er een natuurlijk getal n bestaat zó, dat $s = \langle \alpha(0), \ldots, \alpha(n-1) \rangle$ zeggen we: *α begint met s*, of: *α gaat door s*, of: *s bevat α*, of: *s is een beginstuk van α*.

Continuïteitsbeginsel van Brouwer. *Zij R een deelverzameling van $\mathcal{N} \times \mathbf{N}$. In plaats van: '$\langle \alpha, n \rangle \in R$' schrijven we: '$\alpha R n$'. Neem aan dat we bij elke rij α een natuurlijk getal n kunnen bepalen zodat $\alpha R n$. Dan kunnen we bij elke rij α natuurlijke getallen m, n bepalen zó, dat voor elke rij β, als β begint met $\langle \alpha(0), \ldots, \alpha(m-1) \rangle$, dan $\beta R n$.*

Want, zo houden we onszelf voor, hoe de rij α ons ook gegeven wordt, we kunnen een natuurlijk getal n vinden dat geschikt is voor α. En elke rij, zelfs een heel saaie rij zoals de rij $\underline{0}$, zou het resultaat kunnen zijn van een reeks vrije keuzen. En als α in vrijheid ontstaat komt het getal n dat geschikt is voor α, aan het licht

foto: Collectie Brouwer-Rueb

L.E.J. Brouwer aan het strand

op een ogenblik dat over nog maar eindig veel waarden van α beslist is.

Het zojuist gegeven argument is niet een bewijs dat Brouwers beginsel tot andere inzichten reduceert, het is een poging onszelf en anderen ertoe over te halen dit beginsel als axioma aan te nemen.

We hebben behoefte aan een iets algemenere versie van het continuïteitsbeginsel. Zij X een deelverzameling van $\mathcal{N}$. We noemen X een *spreiding* als X gesloten is, dat wil zeggen elke oneindige rij waarvan elk beginstuk een element van X bevat, behoort zelf tot X, en we bovendien voor elke s in $\mathbf{N}^*$ kunnen beslissen of s een element van X bevat of niet.

Continuïteitsbeginsel van Brouwer, uitgebreide versie. *Zij X een spreiding en R een deelverzameling van $X \times \mathbf{N}$. Neem aan dat we bij elke α in X een natuurlijk getal n kunnen bepalen zodat $\alpha R n$. Dan kunnen we bij elke α in X natuurlijke getallen m, n bepalen zó, dat voor elke β in X, als β begint met $\langle \alpha(0), \ldots, \alpha(m-1) \rangle$, dan $\beta R n$.*

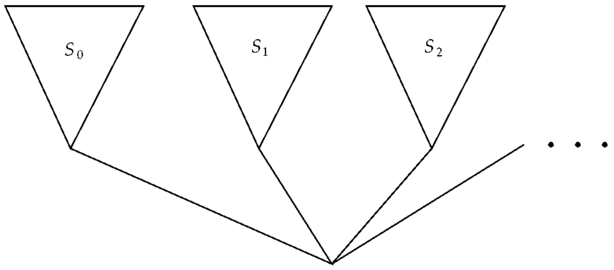
In het vervolg maken we gebruik van een vaste aftelling ρ van de verzameling $\mathbf{Q}$ van de rationale getallen. We noemen een element α van $\mathcal{N}$ een *reëel getal* als de rij $\rho(\alpha(0)), \rho(\alpha(1)), \ldots$ aan de voorwaarde van Cauchy voldoet. We noemen een element α van $\mathcal{N}$ een *canoniek reëel getal* als, voor elke n in $\mathbf{N}$, $|\rho(\alpha(n)) - \rho(\alpha(n+1))| < \frac{1}{2^{n+2}}$. Een canoniek reëel getal kunnen we ons voorstellen als een rij $(\rho(\alpha(0)) - \frac{1}{2}, \rho(\alpha(0)) + \frac{1}{2}), (\rho(\alpha(1)) - \frac{1}{4}, \rho(\alpha(1)) + \frac{1}{4}), \ldots$ van open rationale intervallen, waarbij $\rho(\alpha(0)) - \frac{1}{2} < \rho(\alpha(1)) - \frac{1}{4} < \ldots$ en $\rho(\alpha(0)) + \frac{1}{2} > \rho(\alpha(1)) + \frac{1}{4} > \ldots$ Elk van deze intervallen 'bevat' het reële getal α en kan een *benadering* van α genoemd worden. De verzameling van de canonieke reële getallen noemen we $\mathbf{R}$; $\mathbf{R}$ is een spreiding.

Voor alle α, β in $\mathbf{R}$ definiëren we: *α valt reëel samen* met β, notatie: $\alpha \equiv_{\mathbf{R}} \beta$, dan en slechts dan als, voor elke n, $|\rho(\alpha(n)) - \rho(\beta(n))| < \frac{1}{2^n}$.

Laten X, Y deelverzamelingen zijn van $\mathbf{R}$. We zeggen dat X een *reële deelverzameling* van Y is dan en slechts dan als voor elke α in X een β in Y bestaat zó, dat $\alpha \equiv_{\mathbf{R}} \beta$. We zeggen dat X *reëel samenvalt* met Y dan en slechts dan als X een reële deelverzameling is van Y en Y op zijn beurt een reële deelverzameling is van X. Een functie f van X naar $\mathbf{R}$ is een *reële functie* als voor α, β in X, als $\alpha \equiv_{\mathbf{R}} \beta$, dan $f(\alpha) \equiv_{\mathbf{R}} f(\beta)$.

De operaties 'optellen', 'aftrekken' en 'absolute waarde' worden gedefiniëerd zoals men zou verwachten. We vermelden dat voor alle α, β in $\mathbf{R}$, *α reëel-kleiner* wordt genoemd dan β, notatie: $\alpha <_{\mathbf{R}} \beta$, dan en slechts dan als we een n in $\mathbf{N}$ kunnen uitrekenen zó, dat $\rho(\alpha(n)) + \frac{1}{2^n} \leq \rho(\beta(n))$. We gaan niet in op de voor de hand liggende definitie van een natuurlijke inbedding van $\mathbf{Q}$ in $\mathbf{R}$. Merk op dat we voor ieder canoniek reëel getal α en voor elk natuurlijk getal n een natuurlijk getal m kunnen bepalen met de eigenschap dat voor ieder canoniek reëel getal β, als $|\alpha - \beta| < \frac{1}{2^m}$, dan bestaat er een canoniek reëel getal γ door $\langle \alpha(0), \ldots \alpha(n-1) \rangle$ dat reëel samenvalt met β. Het is voldoende m zo te kiezen dat $\frac{1}{2^m}$ kleiner is dan zowel $\rho(\alpha(n)) - \rho(\alpha(n-1)) + \frac{1}{2^{n+1}}$ als $\rho(\alpha(n-1)) - \rho(\alpha(n)) + \frac{1}{2^{n+1}}$.

Continuïteitsstelling. *Zij X een spreiding en een verzameling reële getallen. Neem aan dat we voor elke α in X, voor elke n in $\mathbf{N}$, een m in $\mathbf{N}$ kunnen bepalen zó, dat voor elke β in X, als $|\alpha - \beta| < \frac{1}{2^m}$, er een γ in X is die door $\langle \alpha(0), \ldots, \alpha(n-1) \rangle$ gaat en reëel samenvalt met β.*



Figuur 1 De constructie van een stomp S uit een rij $S_0, S_1, \ldots$ van eerder geconstrueerde stompen.

Dan is elke reële functie met definitiegebied X continu in elk punt van X. In het bijzonder is elke overal op $\mathbf{R}$ *gedefiniëerde reële functie in elk punt continu.*

Bewijs. Zij α een element van X en p een natuurlijk getal. Met behulp van het continuïteitsbeginsel bepalen we n in $\mathbf{N}$ zó, dat voor elke β in X, als β gaat door $\langle\alpha(0), \ldots, \alpha(n-1)\rangle$, dan $(f(\alpha))(p) = (f(\beta))(p)$ dus $|f(\alpha) - f(\beta)| < \frac{1}{2^p}$. Vervolgens bepalen we m in $\mathbf{N}$ zó, dat voor elke β in X, als $|\alpha - \beta| < \frac{1}{2^m}$, dan is er een γ die door $\langle\alpha(0), \ldots, \alpha(n-1)\rangle$ gaat en reëel samenvalt met β, dus $|f(\alpha) - f(\gamma)| < \frac{1}{2^p}$ en $f(\gamma) \equiv_{\mathbf{R}} f(\beta)$, dus $|f(\alpha) - f(\beta)| < \frac{1}{2^p}$. □

Het uitspreken van het continuïteitsprincipe is de eerste stap die Brouwer zet in zijn analyse van het begrip 'overal op $\mathbf{R}$ gedefiniëerde functie'. Zijn tweede stap is zo mogelijk nog gewaagder. We definiëren eerst het begrip 'stomp'. Elke *stomp* is een beslisbare deelverzameling van de verzameling $\mathbf{N}^*$ van eindige rijtjes natuurlijke getallen. $\mathbf{N}^*$ bevat precies één element van lengte 0, het *lege* rijtje, notatie: $\langle\ \rangle$.

Voor alle s, t in $\mathbf{N}^*$ is $s * t$ het element van $\mathbf{N}^*$ dat we verkrijgen door het rijtje t achter het rijtje s te plaatsen. We noemen het rijtje s een *beginstuk* van het rijtje $s * t$. Voor elke s in $\mathbf{N}^*$, en elke deelverzameling A van $\mathbf{N}^*$ definiëren we: $s * A := \{s * t \mid t \in A\}$. De verzameling van de stompen wordt gegeven door middel van de volgende inductieve definitie:

i. De verzameling $\{\langle\ \rangle\}$ is een stomp.
ii. Is $S_0, S_1, \ldots$ een rij van stompen, dan is ook de verzameling
$$S := \{\langle\ \rangle\} \cup \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \langle n \rangle * S_n$$
een stomp. We noemen $S_0, S_1, \ldots$ de *onmiddellijke deelstompen* van de stomp S (zie figuur 1).
iii. Elke stomp wordt verkregen uit de basisstomp $\{\langle\ \rangle\}$ door het herhaald toepassen van de constructiestap (ii).

Voor elke s in $\mathbf{N}^*$ die niet het lege rijtje is kunnen we t in $\mathbf{N}^*$ en n in $\mathbf{N}$ bepalen zó, dat $s = t * \langle n \rangle$. We noemen t de onmiddellijke voorganger van s. Voor elke stomp s, voor elke s in $\mathbf{N}^*$ definiëren we s *behoort net niet* tot S := s behoort niet tot S en de onmiddellijke voorganger van s behoort wel tot S. Voor elke stomp S is de verzameling van alle s in $\mathbf{N}^*$ die net niet tot S behoren, een beslisbare deelverzameling van $\mathbf{N}^*$.

Vervolgens definiëren we het begrip 'barrière'. Een deelverzameling B van $\mathbf{N}^*$ is een *barrière* (in $\mathcal{N}$) dan en slechts dan als elke oneindige rij α een beginstuk $\langle\alpha(0), \ldots, \alpha(n-1)\rangle$ heeft dat tot B behoort, we zeggen dan wel: α *ontmoet* B. We eisen niet dat we voor elk element van $\mathbf{N}^*$ kunnen uitmaken of het tot de verzameling B behoort of niet.

These van Brouwer. *Bij elke barrière B in* $\mathcal{N}$ *kunnen we een stomp S bepalen zó, dat* $B \cap S$ *een barrière is in* $\mathcal{N}$.

Brouwer bepleit zijn these met het volgende argument. Indien we weten dat B een barrière is in $\mathcal{N}$, kunnen we een 'canoniek' bewijs maken van dit feit. De uitgangspunten van dit canonieke bewijs zijn mededelingen van de vorm: *s behoort tot B, dus elke rij door s ontmoet B.* Redeneerstappen zijn er in twee soorten:

i. stappen met oneindig veel premissen: *elke rij door* $s * \langle 0 \rangle$ *ontmoet B, elke rij door* $s * \langle 1 \rangle$ *ontmoet B*, ... dus: *elke rij door s ontmoet B.*
ii. stappen 'achteruit', met maar één premisse, bijvoorbeeld: *elke rij door s ontmoet B* dus: *elke rij door* $s * \langle 17 \rangle$ *ontmoet B.*

De conclusie is: *elke rij door* $\langle\ \rangle$ *ontmoet B* dus: *B is een barrière in* $\mathcal{N}$.

Zo'n canoniek bewijs heeft zelf de structuur van een stomp. Het is, net als trouwens elk 'eenvoudig' bewijs door volledige inductie, zie [16], een oneindige constructie, die in de geest moet worden uitgevoerd, ook al kan die constructie soms worden opgeroepen door een eindige tekst. De conclusie van Brouwers These wordt verkregen door de stomp die met dit bewijs wordt gegeven als raamwerk voor een nieuwe redenering te benutten. De nieuwe redenering is opgebouwd uit beweringen van de vorm: "er is een stomp S zodat $S \cap B$ een barrière is in de verzameling van alle elementen van $\mathcal{N}$ die door s gaan".

Zowel het continuïteitsbeginsel als de These van Brouwer zijn voor Brouwer op inzicht gebaseerde axioma's voor de intuïtionistische analyse. Wie ze met klassieke ogen leest, iets wat voor Brouwer onvoorstelbaar is, moet opmerken dat de These van Brouwer 'waar' is en het continuïteitsbeginsel 'niet waar'.

Zij X een deelverzameling van $\mathcal{N}$ en B een deelverzameling van $\mathbf{N}^*$. We zeggen: B is een *barrière in* X als elke α in X de verzameling B ontmoet. Zij X een spreiding. We noemen X een *waaier* als er voor iedere s in $\mathbf{N}^*$ maar eindig veel natuurlijke getallen n bestaan zó, dat $s * \langle n \rangle$ een element van X bevat.

Lemma 4. *Voor elke stomp S en voor elke waaier W is de verzameling van alle s in* $\mathbf{N}^*$ *die een element van W bevatten en net niet tot S behoren eindig.*

Bewijs. We bewijzen dit met (transfiniete) inductie over de verzameling van de stompen. Het lemma is juist indien S de basisstomp $\{\langle\ \rangle\}$ is. Neem nu aan dat $S_0, S_1, \ldots$ een rij van stompen is en dat het lemma juist is voor elke van de stompen $S_0, S_1, \ldots$. Vorm $S := \{\langle\ \rangle\} \cup \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \langle n \rangle * S_n$ en laat W een waaier zijn. Merk op dat voor iedere n in $\mathbf{N}$, als $\langle n \rangle$ een element van W bevat, dan zijn er maar eindig veel s in $\mathbf{N}^*$ die net niet tot S_n behoren zodat $\langle n \rangle * s$ een element van W bevat. Maar er zijn maar eindig veel n in $\mathbf{N}$ zó, dat $\langle n \rangle$ een element van W bevat. Dus er zijn maar eindig veel s in $\mathbf{N}^*$ die een element van W bevatten en net niet tot S behoren. □

Waaierstelling. *Zij W een waaier en B een barrière in W.*

i. Er bestaat een eindige deelverzameling B' *van B zó, dat* B' *een barrière is in W.*
ii. Er bestaat een natuurlijk getal n zodat elke α *in W een beginstuk van lengte* $\leq n$ *bezit dat tot B behoort.*

Bewijs. (i) Vorm $B^+ := B \cup \{s \mid s \in \mathbf{N}^* \mid s$ bevat geen element van $W\}$ en merk op dat B^+ een barrière is in $\mathcal{N}$. Bepaal een stomp S zó, dat $B^+ \cap S$ een barrière is in $\mathcal{N}$. Zij C de (eindige) verzameling van alle elementen van $\mathbf{N}^*$ die net niet tot S behoren en een element van W bevatten. Kies bij elke s in C een beginstuk b_s in B en definiëer: $B' := \{b_s \mid s \in C\}$.

(ii) is een eenvoudig gevolg van (i). □

Uniforme-continuïteitsstelling. *Zij X een (reële) verzameling van reële getallen die reëel samenvalt met een deelwaaier W van $\mathbf{R}$ en zij f een (reële) functie van X naar $\mathbf{R}$. Als f in elk punt van X continu is, dan is f gelijkmatig continu op X.*

Bewijs. Zij $m \in \mathbf{N}$. Laat B de verzameling zijn van alle eindige rijtjes $s = \langle s(0), \ldots, s(n-1)\rangle$ in $\mathbf{N}^*$ zó, dat voor alle α, β in X, als $|\rho(s(n-1)) - \alpha| < \frac{1}{2^n}$ en $|\rho(s(n-1)) - \beta| < \frac{1}{2^n}$, dan $|f(\alpha) - f(\beta)| < \frac{1}{2^m}$. B is een barrière in W. Bepaal een eindige deelverzameling B' van B die een barrière is in W. Bereken een natuurlijk getal q zó, dat, voor elke n, voor elke $s = \langle s(0), \ldots, s(n-1)\rangle$ in B', voor elke p zó, dat $s * \langle p\rangle$ een element van W bevat, het getal $\frac{1}{2^q}$ kleiner is dan zowel $\rho(s(n-1)) - \rho(p) + \frac{1}{2^{n+1}}$ als $\rho(p) - \rho(s(n-1)) + \frac{1}{2^{n+1}}$. Merk nu op: voor alle α, β in X, als $|\alpha - \beta| < \frac{1}{2^q}$, dan bestaat $s = \langle s(0), \ldots, s(n-1)\rangle$ in B' zó, dat $|\rho(s(n-1)) - \alpha| < \frac{1}{2^n}$ en $|\rho(s(n-1)) - \beta| < \frac{1}{2^n}$, dus $|f(\alpha) - f(\beta)| < \frac{1}{2^m}$. □

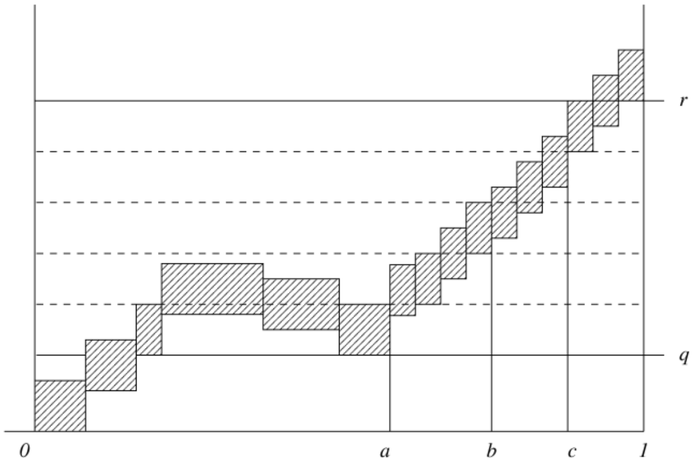
Zij X een (reële) deelverzameling van $\mathbf{R}$. De *afsluiting van X*, notatie $\overline{X}$, is de verzameling van alle α in $\mathbf{R}$ met de eigenschap dat er voor elke n in $\mathbf{N}$ een β in X bestaat zó, dat $|\alpha - \beta| < \frac{1}{2^n}$. We noemen X *gesloten* als X reëel samenvalt met $\overline{X}$. Niet elke gesloten en begrensde deelverzameling X van $\mathbf{R}$ valt reëel samen met een waaier. Brouwer heeft laten zien dat een gesloten deelverzameling X van $\mathbf{R}$ reëel samenvalt met een waaier dan en slechts dan als er een rij $q_0, q_1, \ldots$ van rationale getallen bestaat die X *bebakent* of *catalogiseert*, dat wil zeggen er is een stijgende rij $n_0, n_1, \ldots$ van natuurlijke getallen zó, dat $n_0 = 0$ en voor elke k, (i) voor elke i, als $n_k \le i < n_{k+1}$ dan bestaat x in X zó, dat $|x - q_i| < \frac{1}{2^{2^k}}$ en (ii) voor elke x in X bestaat i zó, dat $n_k \le i < n_{k+1}$ en $|x - q_i| < \frac{1}{2^{2^k}}$. Het is niet moeilijk te zien dat als zulke rijen $q_0, q_1, \ldots$ en $n_0, n_1, \ldots$ gegeven zijn, de verzameling X reëel samenvalt met de waaier W die bestaat uit alle rijen α in $\mathbf{R}$ zó, dat, voor elke k, een i bestaat met de eigenschap $i \le n_{k+1}$ en $\rho(\alpha(k)) = q_i$.

Een deelverzameling X van $\mathbf{R}$ laat een bebakening toe dan en slechts dan als X begrensd is en we voor ieder reëel getal z de afstand van het punt z tot de verzameling X kunnen bepalen, dat wil zeggen we kunnen een reëel getal a berekenen zó, dat:

i. voor elke y in X, $|y - z| \ge a$ en
ii. voor elke n in $\mathbf{N}$ bestaat y in X zodat $|y - z| \le a + \frac{1}{2^n}$.

Brouwer noemt gesloten deelverzamelingen van $\mathbf{R}$ die een bebakening toelaten *gecatalogiseerd-compact*.

Een belangrijk gevolg van de uniforme-continuïteitsstelling is het feit dat elke (continue) functie van het gesloten segment $[0,1]$ naar $\mathbf{R}$ Riemann-integreerbaar is. Brouwer schepte ook genoegen in de volgende toepassing, zie [5] en [8].



Figuur 2 Een rationale-blokkenband van de hoogte $\frac{1}{5}(r-q)$ die de functie f bevat.

Stelling 5 (over het bestaan van voorwaartsgerichte minima). *Zij f een reële (gelijkmatig continue) functie van $[0,1]$ naar $\mathbf{R}$ zó, dat $f(0) < f(1)$. Dan geldt:*

i. Voor alle rationale getallen q, r zó, dat $f(0) < q < r < f(1)$ kunnen we rationale getallen a, b en c construeren zó, dat $0 < a < b < c < 1$ en $q < f(a) < f(b) < f(c) < r$ en voor alle y in $[0,1]$, als $b \le y$, dan $f(a) + \frac{1}{5}(r-q) \le f(y)$ en als $c \le y$, dan $f(b) + \frac{1}{5}(r-q) \le f(y)$. Merk op dat $b - a < \frac{1}{2}$ of $c - b < \frac{1}{2}$.

ii. Voor alle rationale getallen q, r zó, dat $f(0) < q < r < f(1)$ kunnen we een reëel getal x construeren zó, dat $q < f(x) < r$ en voor alle y in $[0,1]$, als $x < y$, dan $f(x) < f(y)$.

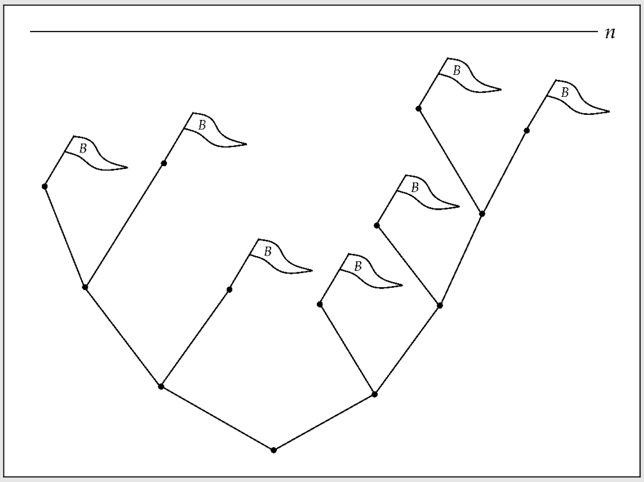
Bewijs. (i) Gebruikmakend van de gelijkmatige continuïteit van f construeren we een rationale-blokkenband van de hoogte $\frac{1}{5}(r-q)$ die de functie f bevat, zie figuur 2. Dat wil zeggen, we bepalen n in $\mathbf{N}$ en twee rijtjes rationale getallen $\langle s_0, \ldots, s_{n-1}, s_n\rangle$ en $\langle t_0, \ldots, t_{n-1}\rangle$ zodat $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_{n-1} < s_n = 1$ en voor elke x in $[0,1]$, voor elke $i < n$, als x behoort tot $[s_i, s_{i+1}]$, dan behoort $f(x)$ tot $[t_i, t_i + \frac{1}{5}(r-q)]$. We bepalen $i_0 :=$ het grootste getal $i < n$ zó, dat $t_i \le q$, en $i_1 :=$ het grootste getal $i < n$ zó, dat $t_i \le q + \frac{2}{5}(r-q)$ en $i_2 :=$ het grootste getal $i < n$ zó, dat $t_i < q + \frac{4}{5}(r-q)$ en merken op: $i_0 < i_1 < i_2$. We definiëren $a := s_{i_0+1}$ en $b := s_{i_1+1}$ en $c := s_{i_2+1}$. Dan $q < f(a) \le q + \frac{1}{5}(r-q)$ en $q + \frac{2}{5}(r-q) < f(b) \le q + \frac{3}{5}(r-q)$ en $q + \frac{4}{5}(r-q) \le f(c) < r$, en voor elke y in $[0,1]$ als $y \ge b$, dan $f(y) > q + \frac{2}{5}(r-q)$ en dus $f(y) > f(a) + \frac{1}{5}(r-q)$, en als $y \ge c$, dan $f(y) \ge q + \frac{4}{5}(r-q)$ en dus $f(y) \ge f(b) + \frac{1}{5}(r-q)$.

(ii) Door (i) steeds opnieuw toe te passen, ook voor andere gesloten segmenten dan $[0,1]$, construeren we twee rijen $a_0, a_1, \ldots$ en $b_0, b_1, \ldots$ van rationale getallen en een rij $e_0, e_1, \ldots$ van positieve rationale getallen zó, dat $a_0 = 0$ en $b_0 = 1$ en $e_0 < f(1) - f(0)$ en voor alle n, $a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n$ en $b_{n+1} - a_{n+1} < \frac{1}{2}(b_n - a_n)$, en $f(a_n) < f(a_{n+1}) < f(b_{n+1}) < f(b_n)$ en voor alle y in $[a_n, b_n]$, als $y \ge b_{n+1}$, dan $f(a_{n+1}) + e_{n+1} \le f(y)$. Bovendien zorgen we er voor dat, voor elke n, $f(b_{n+1}) < f(a_n) + e_n$. De rij $a_0, a_1, \ldots$ is dus een canoniek reëel getal dat samenvalt met het canonieke reële getal $b_0, b_1, \ldots$

Noem dit getal x. We beweren: voor elke y in $[0,1]$, als $x < y$, dan $f(x) < f(y)$, Want, stel $x < y$. Bepaal n in $\mathbf{N}$ zodat $b_n < y$. Dan: $f(x) = \lim_{k\to\infty} f(b_k) < f(b_{n+1}) < f(a_n) + e_n \le f(y)$. □

Over de waaierstelling

Een belangrijk voorbeeld van een waaier is de verzameling $\mathcal{C}$ van alle oneindige rijen natuurlijke getallen die slechts de waarden 0 en 1 aannemen; $\mathcal{C}$ wordt wel de ruimte van Cantor genoemd. Stel dat B een barrière is in $\mathcal{C}$, dat wil zeggen elke rij α in $\mathcal{C}$ heeft een beginstuk dat to B behoort. De waaierstelling leert nu dat we een n in $\mathbf{N}$ zullen kunnen bepalen zó, dat elke rij α in $\mathcal{C}$ een beginstuk van lengte hoogstens n bezit dat tot B behoort.



Wie zijn klassieke (troebele) bril niet heeft afgezet, herkent in de waaierstelling het lemma van D. König, zie [15]. Een speciaal geval van dit lemma kunnen we zo formuleren.

Lemma. *Stel dat B een deelverzameling is van $\mathbf{N}^*$ en dat geen enkele eindige deelverzameling B' van B een barrière is in $\mathcal{C}$. Dan is B zelf niet een barrière in $\mathcal{C}$, dat wil zeggen we kunnen een oneindige rij α in $\mathcal{C}$ bepalen zó, dat geen enkel beginstuk van α tot B behoort.*

Deze mededeling is — van een constructief standpunt — even onjuist als de stelling van Bolzano-Weierstrass. Brouwers waaierstelling is, ook in constructivistische kring, niet onomstreden. E. Bishop, die wel van mening was dat Brouwers kritiek een ernstig feit aan het licht had gebracht dat schreeuwde om maatregelen, kon Brouwers voorstellen voor nieuwe axioma's niet begrijpen. In [1] en [2] verdedigt hij een 'rechttoe-rechtaan-realistische' constructieve wiskunde, zonder 'half-mystieke' elementen.

In [13] liet S.C. Kleene zien dat de waaierstelling zich niet verdraagt met een algoritmische opvatting van het continuum. Er bestaat een Turing-berekenbare deelverzameling B van $\mathbb{N}^*$ zó, dat elke Turing-berekenbare functie α in $\mathcal{C}$ de verzameling B ontmoet en we bij elke eindige deelverzameling B' van B een Turing-berekenbare functie α in $\mathcal{C}$ kunnen aanwijzen die B' niet ontmoet. Kleene besefte overigens heel goed dat Brouwers opvatting van het continuüm niet de algoritmische was en respecteerde Brouwers standpunt.

Natuurlijk kan men, voor functies f van $[0,1]$ naar $\mathbf{R}$ zodat $f(0) < f(1)$, op dezelfde manier het bestaan van achterwaartsgerichte maxima bewijzen, en voor functies f van $[0,1]$ naar $\mathbf{R}$ zodat $f(0) > f(1)$, het bestaan van voorwaartsgerichte maxima en achterwaartsgerichte minima.

Bijna de uniforme-continuïteitsstelling

Zij A een beslisbare deelverzameling van $\mathbf{N}$. We stellen ons voor dat we de karakteristieke functie van de verzameling A,

$$\chi_A(0), \chi_A(1), \dots$$

stap voor stap uitrekenen. We noemen A *eindig* als we een natuurlijk getal n kunnen aangeven zó, dat voor elke $m > n$, $\chi_A(m) = 0$. We noemen A *uitgesteld-eindig* als voor elke n, indien n in A, dan is A eindig.

Indien we te horen krijgen dat een verzameling A uitgesteld-eindig is, weten we niet meteen wat het aantal elementen van A is. We moeten wachten tot in de rij

$$\chi_A(0), \chi_A(1), \dots$$

een eerste positieve beslissing valt, dan wordt het aantal elementen van A pas onthuld.

Hier zijn twee voorbeelden van een uitgesteld-eindige beslisbare deelverzameling van $\mathbf{N}$ waarvan we niet weten dat zij eindig is: $A_0 := \{n \mid n \in \mathbf{N} \mid d(n) = d(n+1) = \ldots = d(n+9) = 9$ en er is geen $j < n$ zodat $d(j) = d(j+1) = \ldots = d(j+9) = 9\}$, en $A_1 := \{j \mid j \in \mathbf{N} \mid$ er bestaat n in A_0 zo dat $n < j < 2n\}$. Hier is d opnieuw de decimaalontwikkeling van π. Merk op dat de verzameling A_0 hoogstens één element heeft, terwijl we niet in staat zijn een bovengrens aan te geven voor het aantal elementen van A_1.

We kunnen verder gaan. We noemen A *uitgesteld-uitgesteld-eindig* als voor elke n, indien n in A, dan is A uitgesteld-eindig. Hier is een voorbeeld van een uitgesteld-uitgesteld-eindige beslisbare deelverzameling van $\mathbf{N}$ waarvan we niet weten dat zij uitgesteld-eindig is: $A_2 := \{n \mid n \in \mathbf{N} \mid d(n) = d(n+1) = \ldots = d(n+9) = 9$ en er is hoogstens één $j < n$ zo dat $d(j) = d(j+1) = \ldots = d(j+9) = 0\}$.

De operatie 'uitstellen' kan een transfiniet aantal keren worden geïtereerd. Voor elke stomp S, voor elke beslisbare deelverzameling A van $\mathbf{N}$, definiëren we de uitspraak: *A is uitgesteld-S-eindig* op de volgende manier:

i. A is uitgesteld-$\{\langle\,\rangle\}$-eindig := A is eindig
ii. voor elke rij stompen $S_0, S_1, \ldots$ vormen we $S := \{\langle\,\rangle\} \cup \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \langle n \rangle * S_n$ en we definiëren: A is uitgesteld-S-eindig := Voor elke n, als $n \in A$, dan bestaat p zó, dat A is uitgesteld-S_p-eindig.

Nu blijkt, voor alle stompen S,T, als S een onmiddellijke deelstomp is van T, dan is elke uitgesteld-S-eindige verzameling uitgesteld-T-eindig. Met behulp van het continuïteitsbeginsel kan men aantonen, voor alle stompen S, T, als S een onmiddellijke deelstomp is van T, dan is niet elke uitgesteld-T-eindige verzameling uitgesteld-S-eindig. We definiëren ook nog:

A is *bijna-eindig* := bij elke strikt stijgende rij $n_0, n_1, \ldots$ van natuurlijke getallen kunnen we k uitrekenen zó, dat $n_k \notin A$.

Dit is een zwak en alomvattend begrip. Uit de These van Brouwer volgt: *voor elke beslisbare deelverzameling A van $\mathbf{N}$, A is bijna-eindig dan en slechts dan als er een stomp S bestaat zó, dat A is uitgesteld-S-eindig.* Deze dingen worden uit de doeken gedaan in [18], [19] en [22].

Lemma 6 (over bijna-eindige verzamelingen).

i. *Voor alle beslisbare deelverzamelingen A, B van $\mathbf{N}$, als A, B beide bijna-eindig zijn, dan is ook $A \cup B$ bijna-eindig.*

ii. *Voor elk eindig rijtje $A_0, \ldots, A_{k-1}$ van beslisbare deelverzamelingen van $\mathbf{N}$, als elk van de verzamelingen $A_0, \ldots, A_{k-1}$ bijna-eindig is, dan is $\bigcup_{i<k} A_i$ bijna-eindig.*

iii. *Zij $E_0, E_1, \ldots$ een rij beslisbare deelverzamelingen van $\mathbf{N}$ zó, dat $\mathbf{N} = \bigcup_{k \in \mathbf{N}} E_k$. Zij A een beslisbare deelverzameling van $\mathbf{N}$ zó, dat voor elke k de verzameling $A \cap E_k$ bijna-eindig is. Neem ook aan dat we voor elke strikt-stijgende rij $n_0, n_1, \ldots$ van natuurlijke getallen k kunnen uitrekenen zó, dat $A \cap E_{n_k} = \emptyset$. Dan is A bijna-eindig.*

Bewijs. (i) Zij $n_0, n_1, \ldots$ een strikt-stijgende rij natuurlijke getallen. Bepaal een deelrij $n_{i_0}, n_{i_1}, \ldots$ van de rij $n_0, n_1, \ldots$ zó, dat voor elke k, $n_{i_k} \notin A$. Bepaal k zó, dat $n_{i_k} \notin B$. Dan $n_{i_k} \notin A \cup B$.

(ii) Dit is een gevolg van (i).

(iii) Zij $n_0, n_1, \ldots$ een strikt-stijgende rij natuurlijke getallen. Maak nu twee rijen $i_0, i_1, \ldots$ en $k_0, k_1, \ldots$ van natuurlijke getallen. Definiëer $i_0 = 0$ en bepaal k_0 zó, dat $n = n_{i_0} \in E_{k_0}$. Bepaal i_1 zó, dat $i_0 < i_1$ en $n_{i_1} \notin A$ of $n_{i_1} \notin E_{k_0}$. Bepaal k_1 zó, dat $k_1 \neq k_0$ en $n_{i_1} \notin A$ of $n_{i_1} \in E_{k_1}$. Bepaal i_2 zó, dat $i_1 < i_2$ en $n_{i_2} \notin A$ of $n_{i_2} \notin E_{k_0} \cup E_{k_1}$. Bepaal k_2 zó, dat $k_2 \notin \{k_0, k_1\}$ en $n_{i_2} \notin A$ of $n_{i_2} \in E_{k_i}$. Ga zo verder. De rij $i_0, i_1, \ldots$ is strikt stijgend en de rij $k_0, k_1, \ldots$ is eeneenduidig. We weten voor elke j, $n_{ij} \notin A$ of $n_{i_j} \in E_{k_j}$. Bepaal j zó, dat $A \cap E_{k_j} = \emptyset$ en concludeer: $n_{i_j} \notin A$. □

Zij X een spreiding. We noemen X een *bijna-waaier* als, voor iedere s in $\mathbf{N}^*$, de verzameling van alle natuurlijke getallen n zodat $s * \langle n \rangle$ een element van X bevat een beslisbare en bijna-eindige deelverzameling van $\mathbf{N}$ is.

Laat A een beslisbare deelverzameling zijn van $\mathbf{N}^*$; A is *bijna-eindig* als we bij elke eeneenduidige rij $s_0, s_1, \ldots$ van elementen van $\mathbf{N}^*$, een k kunnen bepalen zó, dat s_k niet tot A behoort.

Lemma 7. *Voor elke stomp S, voor elke bijna-waaier W: de verzameling van alle s in $\mathbf{N}^*$ die net niet tot S behoren en een element van W bevatten is een bijna-eindige deelverzameling van $\mathbf{N}^*$.*

Bewijs. Het bewijs volgt het patroon van het bewijs van lemma 4 en maakt gebruik van lemma 6 (iii). We laten de details aan de lezer over. □

Bijna-waaierstelling. *Zij W een bijna-waaier en B een barrière in W.*

i. *Er bestaat een bijna-eindige deelverzameling B' van B zó, dat B' een barrière is in W.*

ii. *Voor elke rij $s_0, s_1, \ldots$ van elementen van $\mathbf{N}^*$, als, voor iedere n, s_n een element van W bevat en lengte $(s_n) = n$, dan kunnen we k in $\mathbf{N}$ bepalen zó, dat s_k een beginstuk heeft dat tot B behoort.*

Bewijs. (i) Het bewijs volgt het patroon van het bewijs van de waaierstelling deel (i) en maakt gebruik van lemma 7. We laten de details aan de lezer over.

(ii) Zij B' een bijna-eindige deelverzameling van B die een barrière is in W. Voor elke n bepalen we b_n in B' zodat b_n een beginstuk is van s_n of s_n een beginstuk is van b_n. We bepalen een strikt stijgende rij $i_0, i_1, \ldots$ zó, dat voor elke k, $i_{k+1} >$ lengte(b_{i_k}). Omdat B' bijna-eindig is, kunnen we k, l bepalen zó, dat $k < l$ en $b_{i_k} = b_{i_l}$. Maar dan heeft s_{i_l} een beginstuk dat tot B' behoort. □

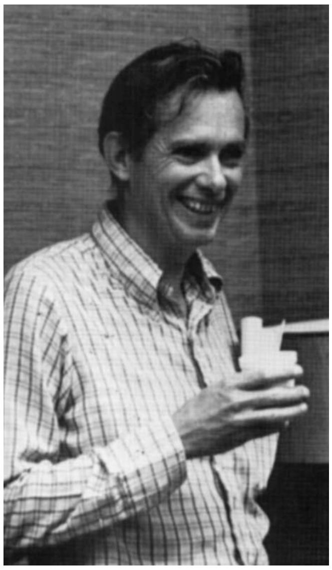


foto: Paul Hal

Errett Bishop

foto: Dirk van Dalen

Stephen Kleene

Het spel van de eindeloze verfijning kan ook met andere begrippen dan het begrip 'eindig' gespeeld worden. Hier zijn twee voorbeelden, nauwelijks meer dan suggesties.

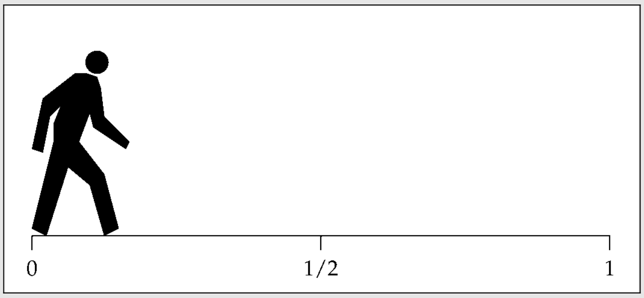
Voorbeeld 1. Zij $x_0, x_1, \ldots$ een rij reële getallen. De rij $x_0, x_1, \ldots$ is *begrensd* als we M in $\mathbf{N}$ kunnen aangeven zodat, voor alle n, $|x_n| \leq M$. De rij $x_0, x_1, \ldots$ is *misschien-begrensd* als we M in $\mathbf{N}$ kunnen aangeven, zó, dat voor alle n, als $|x_n| > M$, dan is de rij $x_0, x_1, \ldots$ begrensd. De rij $x_0, x_1, \ldots$ is *misschien-misschien-begrensd* als we M in $\mathbf{N}$ kunnen aangeven zó, dat voor elke n als $|x_n| > M$, dan is de rij $x_0, x_1, \ldots$ misschien-begrensd. De lezer ziet nu wel aankomen hoe we verdere iteraties van 'misschien' kunnen definiëren. We definiëren ook nog: de rij $x_0, x_1, \ldots$ is *bijna-begrensd* als we voor elke strikt-stijgende rij $n_0, n_1, \ldots$ van natuurlijke getallen k kunnen berekenen zó, dat $|x_{n_k}| \leq k$. Dit laatste begrip is heel zwak en het omvat de eerder genoemde begrippen.

Voorbeeld 2. Zij X een deelverzameling van $\mathbf{R}$ en f een reële functie van X naar $\mathbf{R}$. Zij e een positief rationaal getal. We zeggen dat f *e-gelijkmatig-continu* is op X als we n kunnen bepalen zó, dat voor alle x, y in X, als $|x-y| < \frac{1}{2^n}$, dan $|f(x) - f(y)| < e$; f is *e-misschien-gelijkmatig-continu* op X als we n kunnen bepalen zó, dat voor alle x, y in X, als $|x-y| < \frac{1}{2^n}$ en $|f(x) - f(y)| \geq e$, dan is f e-gelijkmatig-continu op X; f is *e-misschien-misschien-gelijkmatig-continu* op X als we n kunnen bepalen zó, dat voor alle x, y in X, als $|x - y| < \frac{1}{2^n}$ en $|f(z) - f(y)| \geq e$, dan is f e-misschien-gelijkmatig-continu op X. We laten het aan de lezer over verdere iteraties te definiëren. We zeggen dat f *e-bijna-gelijkmatig-continu* is op X als we bij alle rijen $x_0, x_1, \ldots$ en $y_0, y_1, \ldots$ van punten van X, k kunnen uitrekenen zó, dat: als $|x_k - y_k| < \frac{1}{2^k}$, dan $|f(x_k) - f(y_k)| < e$; f is *bijna-gelijkmatig-continu* op X als, voor elk positief rationaal getal e, f is e-bijna-gelijkmatig-continu op X. Dit laatste begrip is heel zwak en het omvat de eerder genoemde begrippen.

Bijna-uniforme-continuïteitsstelling. *Zij X een (reële) verzameling van reële getallen die reëel samenvalt met een deel-bijna-waaier W van $\mathbf{R}$ en zij f een (reële) functie van X naar $\mathbf{R}$. Als f in elk punt van X continu is, dan is f bijna-gelijkmatig-continu op X.*

Opnieuw: Achilles

Het door Thierry Coquand bewezen principe van open inductie is een verrassend resultaat.



Achilles loopt van links naar rechts en begint in 0. We weten:

i. Voor elk punt x, als Achilles x bereikt, dan is er een punt y rechts van x dat ook door Achilles bereikt wordt.
ii. Voor elk punt x, Achilles bereikt x dan en slechts dan als Achilles elk punt y links van x bereikt.

Coquand verzekert ons nu dat Achilles zeker aankomt in 1. Wie alleen naar Achilles kijkt, zonder veel na te denken, begrijpt dat niet meteen. Als de rij van de stappen van Achilles er zo uit ziet:

$$0, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{7}{8}, \quad \ldots \qquad \text{en dus } 1,$$

gaat het wel goed, maar misschien neemt Achilles kleinere stappen. Loopt Achilles wel hard genoeg? Verkeert hij niet in fundamentele onzekerheid ooit ergens veilig aan te komen? Als we willen laten zien dat hij zeker in 1 komt, moeten we er ons eerst van overtuigen dat hij zeker in $\frac{1}{2}$ komt. Maar dan . . .

Bewijs. Zij e een positief rationaal getal. Laat B de verzameling zijn van alle eindige rijtjes $s = \langle s(0), \ldots, s(n-1)\rangle$ in $\mathbf{N}^*$ zó, dat voor alle α, β in X, als $|\rho(s(n-1)) - \alpha| < \frac{1}{2^n}$ en $|\rho(s(n-1)) - \beta| < \frac{1}{2^n}$, dan $|f(\alpha) - f(\beta)| < e$. B is een barrière in W. We bepalen een bijna-eindige deelverzameling B' van B die barrière is in W. Laten $x_0, x_1, \ldots$ en $y_0, y_1, \ldots$ rijen van elementen van W zijn. Voor elke k bepalen we een beginstuk s_k van x_k dat tot B' behoort en natuurlijke getallen n_k en q_k zó, dat $s_k = \langle x_k(0), \ldots, x_k(n_k - 1)\rangle$ en voor elke y in W, als $|x_k - y| < \frac{1}{2^{q_k}}$, dan $|x_k(n_k - 1) - y| < \frac{1}{2^{n_k}}$ en dus $|f(x_k) - f(y)| < e$. We zorgen er voor dat voor alle k en l met $s_k = s_l$ geldt $q_k = q_l$. We bekijken de rij $q_0, q_1, \ldots$. We definiëren de uitspraak QED (quod *est* demonstrandum — hetgeen we nog moeten bewijzen), als volgt:

$$\text{QED: er bestaat } k \text{ zó, dat } q_k < k.$$

We maken nu een strikt-stijgende rij $n_0, n_1, \ldots$ van natuurlijke getallen, zó, dat voor elke i, $q_{n_i} < q_{n_{i+1}}$ of QED. B' is bijna eindig en daarom kunnen we i, j bepalen zó, dat $i < j$ en $s_{n_i} = s_{n_j}$, dus $q_{n_i} = q_{n_j}$, dus QED, dus er bestaat k zó, dat $q_k < k$, en daarom: als $|x_k - y_k| < \frac{1}{2^k}$, dan $|x_k - y_k| < \frac{1}{2^{q_k}}$ en $|f(x_k) - f(y_k)| < e$. □

Stelling 8. *Zij $x_0, x_1, \ldots$ een bijna-begrensde rij canonieke reële getallen. De verzameling $\overline{\{x_0, x_1, \ldots\}}$ valt reëel samen met een bijna-waaier.*

Bewijs. We definiëren een beslisbare deelverzameling C van $\mathbf{N}^*$. Het lege rijtje $\langle\ \rangle$ behoort tot C. Voor elk rijtje van de vorm $\langle n\rangle$ spreken we af: $\langle n\rangle$ behoort tot C dan en slechts dan als er $j \leq n$ bestaat zó, dat $|\rho(n) - x_j(2)| < \frac{1}{4}$ en voor alle $i < n$, als $\langle i\rangle$ tot C behoort, dan $|\rho(i) - \rho(n)| \geq \frac{1}{4}$. Voor elk niet-leeg rijtje $t = \langle t(0), \ldots t(k-1)\rangle$ in $\mathbf{N}^*$, voor elke n, spreken we af: $t * \langle n\rangle$ behoort tot C dan en slechts dan als t tot C behoort en er bestaat $j \leq n$ zó, dat $|\rho(n) - x_j(k+2)| < \frac{1}{2^{k+2}}$ en $|\rho(t(k-1)) - \rho(n)| < \frac{1}{2^{k+1}}$ en er is geen $i < n$ zó, dat $t * \langle i\rangle$ tot C behoort en $|\rho(i) - \rho(n)| < \frac{1}{2^{k+2}}$.

Zij W de verzameling van alle α in $\mathcal{N}$ waarvan elk beginstuk tot C behoort. W is een bijna-waaier en een deelspreiding van $\mathbf{R}$ die reëel-samenvalt met $\overline{\{x_0, x_1, \ldots\}}$. □

Zij A een deelverzameling van $\mathbf{R}$. We noemen A *open* dan en slechts dan als er rijen $q_0, q_1, \ldots$ en $r_0, r_1, \ldots$ van rationale getallen bestaan zó, dat voor elke x in $\mathbf{R}$, x behoort tot A dan en slechts dan als er een n in $\mathbf{N}$ bestaat zodat $q_n < x < r_n$.

Zij A een deelverzameling van $[0, 1]$. We noemen A *open* dan en slechts dan er een open deelverzameling B van $\mathbf{R}$ bestaat zó, dat $A = B \cap [0, 1]$.

Stelling 9 (principe van Open Inductie, Th. Coquand, zie [21]). *Zij A een open deelverzameling van $[0, 1]$. Stel voor elke x in $[0, 1]$, als voor elke $y < x$, $y \in A$, dan $x \in A$. Dan: $[0, 1] = A$.*

Bewijs. Laten $q_0, q_1, \ldots$ en $r_0, r_1, \ldots$ rijen rationale getallen zijn zó, dat voor elke x in $\mathbf{R}$, $x \in A$ dan en slechts dan als we n kunnen bepalen zodat $q_n < x < r_n$. Voor elke x in $[0, 1]$: $[0, x]$ valt samen met een waaier, dus $[0, x] \subseteq A$ dan en slechts dan als er n in $\mathbf{N}$ bestaat zó, dat $[0, x] \subseteq \bigcup_{i<n}(q_i, r_i)$. We nemen aan: $q_0 < 0 < r_0$.

We definiëren een rij $x_0, x_1, \ldots$ van punten van $[0, 1]$ als volgt. Voor elke n, $x_n :=$ het grootste rationale getal x zó, dat $[0, x) \subseteq \bigcup_{i<n}(q_i, r_i)$. Het is niet moeilijk te zien dat x_n goed gedefiniëerd is, en dat voor iedere n, $x_n \leq x_{n+1}$, en dat de verzameling van alle x in $[0, 1]$ zó, dat $[0, x] \subseteq A$ samenvalt met $\overline{\{x_0, x_1, \ldots\}}$. Zij W een deel-bijna-waaier van $\mathbf{R}$ die reëel samenvalt met $\overline{\{x_0, x_1, \ldots\}}$. Zij B de verzameling van alle eindige rijtjes $s = \langle s(0), \ldots, s(n-1)\rangle$ in $\mathbf{N}^*$ zó, dat we $j < n$ kunnen bepalen met de eigenschap dat $q_j < \rho(s(n-1)) < r_j$; B is een barrière in W. We bepalen een bijna-eindige deelverzameling B' van B die barrière is in W.

We definiëren nu een rij $z_0, z_1, \ldots$ van punten van W en een rij $s_0, s_1, \ldots$ van elementen van B', als volgt: $z_0 := 0$. Zij $s_0 = \langle s_0(0), \ldots, s_0(n_0-1)\rangle$ het kortste beginstuk van z_0 dat tot B' behoort. Bepaal j_0 zó, dat $q_{j_0} < \rho(s_0(n_0-1)) < r_{j_0}$. Merk op dat $[0, r_{j_0}] \subseteq A$ en bepaal een element z_1 van W dat samenvalt met r_{j_0}. Indien $z_1 \geq 1$, definiëren we, voor elke $n > 0$, $z_{n+1} := z_n$ en $s_n := s_0$. Indien $z_1 < 1$ bepalen we het kortste beginstuk van z_1 dat tot B' behoort en noemen dit $s_1 = \langle s_1(0), \ldots, s_1(n_1-1)\rangle$. Bepaal j_1 zó, dat $q_{j_1} < \rho(s_1(n_1-1)) < r_{j_1}$. Merk op dat $[0, r_{j_1}] \subseteq A$ en laat z_2 een element van W zijn dat samenvalt met r_{j_1}. Indien $z_2 \geq 1$, definiëren we, voor elke $n > 1$, $z_{n+1} := z_n$ en $s_n := s_1$. Indien $z_2 < 1$, bepalen we het kortste beginstuk van z_2 dat tot B' behoort en noemen dit s_2. Zo gaan we verder. Omdat B' bijna-eindig is, bestaat n zo dat $s_{n+1} = s_n$ en dus $z_{n+1} \geq 1$ en dus $[0, 1] \subseteq A$. □

Borels bewijs van de stelling van Heine-Borel

In [3] bewijst E. Borel de stelling van Heine-Borel op de volgende manier. Iedere overdekking van $[0,1]$ door aftelbaar veel open intervallen heeft een eindige deel-overdekking. Immers, laat (a_0, b_0) een interval zijn uit de gegeven overdekking dat 0 bevat, laat (a_1, b_1) een interval zijn dat b_0 bevat, laat (a_2, b_2) een interval zijn dat b_1 bevat, ..., laat b_ω de limiet zijn van de rij $b_0, b_1, \ldots$, laat $(a_{\omega+1}, b_{\omega+1})$ een interval zijn dat b_ω bevat, laat $(a_{\omega+2}, b_{\omega+2})$ een interval zijn dat $b_{\omega+1}$ bevat, ..., ga zo verder, alle aftelbare ordinaalgetallen langs. We stoppen zodra we een aftelbaar ordinaalgetal α vinden met de eigenschap $b_\alpha \geq 1$. Merk op dat we zeker zullen stoppen omdat er overaftelbaar veel aftelbare ordinaalgetallen zijn. Zouden we nooit stoppen, dan gold, voor elk aftelbaar ordinaalgetal α, $b_{\alpha+1} > b_\alpha$. Maar voor elk natuurlijk getal k kunnen er niet meer dan k aftelbare ordinaalgetallen α zijn met de eigenschap $b_{\alpha+1} > b_\alpha + \frac{1}{k}$.

Ook kunnen we bewijzen, voor elk aftelbaar ordinaalgetal α, dat het interval $[0, b_\alpha]$ overdekt wordt door eindig veel intervallen uit de gegeven overdekking van $[0,1]$. Dat doen we met inductie langs de ordinaalgetallen. Het geldt bijvoorbeeld ook voor $[0, b_\omega]$: we rekenen k_0 uit zó, dat $a_{\omega+1} < b_{k_0}$ en merken op dat $[0, b_\omega]$ wordt overdekt door: $(a_0, b_0), (a_1, b_1), \ldots (a_{k_0}, b_{k_0})$ en $(a_{\omega+1}, b_{\omega+1})$. We concluderen dat ook $[0,1]$ zelf door eindig veel intervallen uit de gegeven overdekking overdekt wordt.

Borel geeft in de eerste helft van dit bewijs een niet-constructief argument voor het principe van Open Inductie. Met kennelijk genoegen maakt hij gebruik van de aftelbare ordinaalgetallen, ongeveer twintig jaar eerder ontdekt door Cantor, zie [11].

Dankwoord

De redactie bedankt prof. Dirk van Dalen van de Universiteit Utrecht en prof. Douglas Bridges van de University of Canterbury, Nieuw Zeeland voor het ter beschikking stellen van het fotomateriaal.

Referenties

1 E.A. Bishop, *Foundations of constructive analysis*, McGraw Hill, New York, 1967.

2 E.A. Bishop and D.S. Bridges, *Constructive analysis*, Springer, Heidelberg & New York, 1985.

3 E. Borel, 'Sur quelques points de la théorie des fonctions', *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure* (3)12 (1895), pp. 9–55, ook in [4], pp. 239–287.

4 *Oeuvres de Émile Borel*, Tome 1, Éditions du Centre National de Recherche Scientifique, Paris, 1972.

5 L.E.J. Brouwer, 'Begründung der Funktionenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten', Erster Teil, 'Stetigkeit, Messbarkeit, Derivierbarkeit', *Kon. Ned. Ak. Wet. Verhandelingen*, 1ste sectie **13** nr. 2 (1923) (ook in [7], pp. 246–267).

6 L.E.J. Brouwer, Über Definitionsbereiche von Funktionen, *Math. Annalen* **97** (1927), pp. 60–75 (ook in [7], pp. 390–405).

7 L.E.J. Brouwer, *Collected Works, Volume I: Philosophy and Foundations of Mathematics*, North Holland, Amsterdam-Oxford, 1975 [edited by A. Heyting].

8 L.E.J. Brouwer, *Intuitionismus*, Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1992 [herausgegeben, eingeleitet und kommentiert von D. van Dalen].

9 Miguel de Cervantes Saavedra, *El ingenioso hidalgo Don Quijote de la Mancha*, Primera Parte, Espaca-Calpe, S.A., Madrid, 1966.

10 Miguel de Cervantes Saavedra, *De geestrijke ridder Don Quichot van de Mancha*, Querido, Amsterdam, 1963 [vertaald, ingeleid en toegelicht door J.W.F. Werumeus Buning en C.F.A. van Dam].

11 M. Hallett, 'Towards a Theory of Mathematical Research Programmes', *The British Journal for the Philosophy of Science* 30 (1979), pp. 1–25 and pp. 135–159.

12 W.A. Howard and G. Kreisel, 'Transfinite induction and bar induction of types zero and one, and the role of continuity in intuitionistic analysis', *The Journal of Symbolic Logic* **31** (1966), pp. 325–358.

13 S.C. Kleene, 'Recursive functions and intuitionistic mathematics', *Int. Congr. Math. 1950*, Cambridge MA, volume **I** (1952), pp. 679–685.

14 S.C. Kleene and R.E. Vesley, *The Foundations of Intuitionistic Mathematics, especially in relation to recursive functions*, North Holland, Amsterdam, 1965.

15 D. König, 'Über eine Schlussweise aus dem Endlichen ins Unendliche', *Acta Univ. Szeged, Sect. Math.* **3** (1927), pp. 121–130.

16 H. Poincaré, 'Sur la nature du raisonnement mathématique', in: *La Science et l'Hypothèse*, Flammarion, Paris, 1968, (1902).

17 W. Veldman, *On the continuity of functions in intuitionistic real analysis*, Report no. 8210, Department of Mathematics, University of Nijmegen, 1982.

18 W. Veldman, 'Some intuitionistic variations on the notion of a finite set of natural numbers', in: H.C.M. de Swart, L.J.M. Bergmans (ed.), *Perspectives on Negation, Essays in honour of Johan J. de Iongh on his 80th birthday*, Tilburg University Press, Tilburg, 1995, pp. 177–202.

19 W. Veldman, 'On sets enclosed between a set and its double complement', in: A. Cantini (ed.), *Logic and Foundations of Mathematics, Proceedings Xth International Congress on Logic, Methodology and Philosophy of Science, Florence, 1995*, Volume III, Kluwer, Dordrecht, 1999, pp. 143–154.

20 W. Veldman, 'Understanding and using Brouwer's Continuity Principle', in: U. Berger, H. Osswald, P.A. Schuster (eds.), *Reuniting the Antipodes, constructive and nonstandard views of the continuum, Proceedings of a symposium held in San Servolo / Venice, 1999*, Kluwer, Dordrecht, 2001, pp. 285–302.

21 W. Veldman, *An intuitionistic proof of Kruskal's Theorem*, Report no. 0017, Department of Mathematics, University of Nijmegen, 2000.

22 W. Veldman, *The Borel hierarchy and the projective hierarchy in intuitionistic mathematics*, Report no. 0103, Department of Mathematics, University of Nijmegen, 2001.

23 W. Veldman, 'Bijna de waaierstelling', in: W. Schikhof, D. Beckers, O. van Gaans, S. Teerenstra (ed.), *Circumspice, Various papers in and around mathematics in honor of Arnoud van Rooij*, Department of Mathematics, University of Nijmegen, 2001, pp. 301–315.