Gerard Sierksma
Faculteit der Economische Wetenschappen
Universiteit Groningen
Postbus 800, 9700 AV Groningen
g.sierksma@eco.rug.nl

Inaugurele rede

Een kleine stap naar

Deze rede is op 20 maart 2001 uitgesproken door Gerard Sierksma bij zijn benoeming tot bijzonder hoogleraar Logistiek Management aan de Rijksuniversiteit Groningen.

Ruim driehonderd jaren geleden joeg de Zwitserse wiskundige Johann Bernoulli Groninger theologen en collega-wetenschappers in de gordijnen met zijn proefondervindelijke bewijzen van wat kortste afstanden zijn tussen locaties in de ruimte. De proeven deed hij vanaf de kansel van de Academiekerk, die ooit op de plaats stond van de huidige universiteitsbibliotheek. (Op dit moment dwarrelen vanaf de kansel papiersnippers naar beneden.) Natuurverschijnselen dienden volgens deze theologen en collega-wetenschappers niet verklaard of bewezen te worden; nee, achter die natuurverschijnselen diende men slechts de diepere bedoelingen van de goddelijke almacht nauwkeurig te analyseren en te doorgronden. De introductie door Bernoulli van deze zogeheten 'Philosophia Experimentalis' heeft de gemoederen zozeer in beroering gebracht, dat hij het na tien jaren Groningen voor gezien hield. In 1705 keerde Bernoulli terug naar Bazel.

Anderhalf jaar geleden verscheen in de *Annals of Science* een artikel met de titel 'De Grote Sprong naar het Oneindig Kleine'. De reden om het hier te vermelden is dat het werken er aan mij veel intellectueel genoegen heeft gegeven, niet in de laatste plaats omdat ik het artikel heb geschreven samen met mijn broer Wybe en voor een groot deel thuis bij mijn moeder op het moment dat mijn vader reeds uit ons leven aan het verdwijnen was. Het artikel behandelt de worsteling van Johann Bernoulli met het bestaan van oneindig kleine grootheden en zijn discussie daarover met Leibniz. In 1702, schrijft Leibniz in één van zijn brieven aan Bernoulli:

"[...] *om* [...] *subtiele strijdvragen te vermijden volsta ik er mee het oneindige door het onvergelijkbare te verklaren* [...] *Zo is bijvoorbeeld een deeltje van de magnetische materie dat door een glasplaat dringt niet vergelijkbaar met een zandkorrel, deze weer niet met de aardbol, en de aardbol tenslotte weer niet met het universum* [...]"

De grote sprong naar die oneindig kleine grootheden bracht mijzelf in een flits terug naar mijn jeugdige fascinatie voor het oneindig grote. En daarmee had ik het uitgangspunt te pakken voor mijn oratie, op een dag in een periode van mijn leven waarin het gezin, waarin ik ben opgegroeid, nog slechts een kleine stap verwijderd is van de afscherming van de ouders naar ons begin van het oneindige. Vandaag wil ik u iets vertellen over mijn fascinatie voor simpel lijkende problemen die transcendent, 'universum overschrijdend' moeilijk blijken te zijn.

De sprong naar het oneindig kleine

Het probleem van Bernoulli's kortste afstanden kan als volgt worden omschreven. Neem twee punten A en B in de ruimte, A is het hoogste en B het laagste punt, en stel je de vraag: wat is de vorm van de baan waarlangs een rollend voorwerp het snelst zich verplaatst van A naar B? Is dat een kaarsrechte baan tussen A en B? Of eerst stijl naar beneden en dan min of meer vlak verder? Of iets er tussenin? Bernoulli bewees, en illustreerde dit met een apparaat, dat de snelste weg een kromme tussen beide uitersten in is. De vorm van de cycloïde bleek de kortste afstand te zijn. Hij gebruikte daarvoor de zogenaamde differentiaal- en integraalrekening. In deze theorie veronderstelde hij oneindig kleine entiteiten, de differentialen. Bij de integraalrekening werden oneindig veel van die oneindig kleine entiteiten samengesteld, of te wel geïntegreerd, tot een eindige, een tast- en zichtbare grootheid. De theologen waren onthutst. De arrogante wetenschapper had zich op de troon van God gezet en schiep iets uit niets, namelijk uit oneindig kleine delen maakte de wetenschapper iets tast- en zichtbaars. Deze grote stap naar het oneindig kleine was baanbrekend en is nog steeds de basis van de wiskunde van astronomen, fysici en economen.

Bernoulli haalde de schouders op over de 'domkoppen', die zijn ideeën en proefondervindelijke bewijzen vanaf de preekstoel beschouwden als 'ontheiliging van de kerk', en antwoordde: "Al wie maar leutert dat de tempel Gods ontheiligd is geraakt door mijn experimenten, [...] is of niet toerekeningsvatbaar of laat op schandelijke wijze zijn vooringenomenheid en zijn boosaardigheid jegens mij en mijn werk zien [...] en dient beschouwd te worden als de meest stompzinnige mensenhater." Tegen één van zijn studenten, Petrus Venhuijsen, die hem beschuldigde een 'ver-


Gerard Sierksma

het oneindig grote

derver der jeugd' en een 'godloosen Ketter' te zijn, antwoordde Bernoulli: "Laat die ongehoorde praatjesmaker toch inzien dat hij er zelf zeer vreemde gedachten op na houdt, die via de buik en het toilet verwijderd moeten worden." De discussies waren fel en vaak werd er op de man gespeeld. Spannend was het dus zeker en wellicht ook inspirerend en motiverend. In ieder geval hadden de wiskundigen in de gaten bezig te zijn met iets belangwekkends, iets revolutionairs. En dat verklaart hun ambitie.

Drijfveren

Welke ambitie hebben wetenschappers heden ten dage? Wat brengt hen iedere dag zo opgewekt naar de werkplek? Nooit eerder verschenen er zoveel wetenschappelijke publicaties per jaar als in onze tijd. Wat bezielt hen? Welke ambitie drijft hen? Ik heb een aantal vooraanstaande Groningse geleerden deze vragen voorgelegd. Een kleine bloemlezing uit hun antwoorden wil ik u niet onthouden.

De wiskundige Floris Takens, één van de grondleggers van de chaos-theorie, voelt een onweerstaanbare drang om het chaotisch lijkende karakter van bijvoorbeeld hartsignalen te begrijpen: wanneer is een signaal van het hart zorgwekkend en wanneer is het goed? De econometrist Tom Wansbeek ziet wetenschap als 'sport waarin je zo nu en dan het jongensachtige genoegen smaakt van de overwinning een artikel gepubliceerd te zien en dat genoegen te delen met collega- wetenschappers. Het feit dat de wereldeconomie ieder jaar met een paar procentjes groeit is mede te danken aan de kennistoename en daar dragen econometristen hun steentje aan bij'. De historicus Dick de Boer ziet de bestudering van de geschiedenis als de 'derde dimensie in de strijd tegen vooroordelen'. Hij laat dat zien door de middeleeuwse normen en waarden te vergelijken met de huidige en 'voelt nog dagelijks de blijdschap' als hij de archieven uit die periode 'betrapt op 'moderne' vooroordelen'. De Boer noemt dit 'de fascinatie voor het andere en het eendere'. De atoomfysicus Reinhard Morgenstern is steeds op zoek naar probleemstellingen die relevant zijn voor wetenschappers uit andere vakgebieden, en die hijzelf met z'n groep kan oplossen, zodat men dan zegt: "kijk dat is Reinhard Morgenstern die dat beroemde probleem heeft opgelost." Zo is onlangs komen vast te staan dat een ijskoude komeet plotseling röntgenstraling kan uitzenden. Hij heeft aangetoond dat dat komt door botsing en heeft dergelijke botsingen kunnen nabootsen in zijn laboratorium.

"Het is toch prachtig als je hier beneden kunt verklaren wat daar hoog boven gebeurd!", aldus Morgenstern. Arjo Vanderjagt is in Groningen hoogleraar geschiedenis van de filosofie en houdt zich bezig met de literaire cultuur. Op mijn vraag wat het praktisch nut is van dat onderzoek reageert hij als door een wesp gestoken: "Dergelijke vragen vind ik apekool en ik kan me er soms woest over maken. Nee, mijn onderzoek heeft geen enkel praktisch nut." Vanderjagt heeft ontdekt dat de wortels van de Nederlandse staat niet in de 17e eeuw liggen, maar "dat die zich reeds in de 14e eeuw ontplooien." Ziezo, dacht ik, na Bernoulli eindelijk een wetenschapper die zich boos kan maken.

De lezing gaat dus over ambitie en fascinatie voor wetenschap. Over de wereld van het exponentieel grote. Over de oneindige moeilijkheid van simpel lijkende problemen.

Atoomontploffingen

Gedurende de Tweede Wereldoorlog verzamelden zich in Los Alamos in de Verenigde Staten een aantal grote wiskundigen en fysici, waaronder de ook in ons vak bekende John von Neumann. Zij waren daar om een wapen te ontwerpen dat definitief een einde zou maken aan de oorlog. Ik kan me nog heel goed de kinderlijke opwinding herinneren over de bom met de 'oneindig' harde knal en de 'oneindige' verwoesting. De uitleg van mijn natuurkundeleraar was indertijd voor mij volstrekt helder: ieder deeltje spat in tweeën uiteen en dat proces herhaalt zich, zoals het groene kroos op een vijver, van één deeltje naar twee, van twee naar vier, naar acht, naar zestien, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, en zo voort. Binnen de kortste keren hebben we te maken met giga grote getallen. Het kroos op een vijver groeit in het begin heel langzaam en het kan weken duren tot de helft van de vijver is bedekt. Maar dan de volgende ochtend in één laatste kleine stap, in één laatste explosie, is de hele vijver vol. Bij een atoomontploffing valt ieder materiedeeltje uit elkaar, en in een verwoestende knal wordt het laatste kruit verschoten en explodeert het als een supernova aan het einde van haar bestaan.

De reeks hierboven heet een exponentiële

Aantal tussenpunten	Aantal paden kortste-pad probleem	Aantal paden handelsreiziger probleem
1	2	1
2	5	2
3	16	6
4	65	24
5	326	120
6	1957	720
7	13700	5040
8	109601	40120
9	906410	362880
10	9864101	362880
11	108505112	39916800
12	1302061345	479001600
13	16926797486	6227020800
14	236975164805	87178291200
15	3554627472076	1307674368000
16	56874039553217	20922789888000
17	966858672404690	355687428096000
18	17403456103284421	6402373705728000
19	330665665924044000	121645100408832000
20	6613313319248080001	2432902008176640000

Tabel 1 Het totaal aantal paden van het kortste-pad probleem en van het handelsreiziger probleem bij toename van aantal tussenliggende locaties

reeks en wordt geschreven als 2^n waarbij n gelijk is aan $1, 2, 3, \ldots$. Als kind schreven we schriften vol met nummers van autobussen die tijdens één of andere hoogtijdag ons kleine stadje verzadigden. Nummer na nummer schreven we op. Als middelbare-schoolpubers maakten we soms zelfs 's avonds laat onder de dekens lange exploderende exponentiële reeksen van getallen. En wat waren al die reeksen nog *peanuts* bij de superexponentiële reeksen $1\times2\times3\times4\times5\times6\times\ldots$ en $2\times4\times8\times16\times32\times64\times128\times\ldots$ Al was er geen verkettering, de spanning dat het zo 's avonds laat niet mocht joeg het tempo op tot duizelingwekkende getallen waarbij we de orgastische krachten van atoombomontploffingen dachten te ervaren.

De fascinatie was het oneindige te kunnen bereiken in een paar kleine stappen. Om alles te kunnen omvatten en te begrijpen, op een Werner-von-Braunse-Münchhausen-raket, waarvan de snelheid zou toenemen volgens super-exponentiële reeksen, gaf de ultieme spanning dat aan de uiterste grenzen van het heelal de goddelijk almacht te bereiken zou zijn.

Kortste routes

Op de golven van de fascinatie zouden we ons verder kunnen laten meedrijven in hoogdravende bespiegelingen. Beter is het om terug te keren naar meer aardse zaken. Om kortste routes te bepalen dienen we vaak lange wegen te gaan. Ieder vervoersbedrijf wil zijn vrachtwagens uitsluitend kortste of snelste routes laten rijden. Maar hoe bepaal je die? Zijn die altijd wel te bepalen? Is het moeilijk of gemakkelijk dergelijke routes te bepalen? Zijn er andere problemen die iets te maken hebben met kortste routes? Is een reorganisatieprobleem waarin je situatie A op een zo efficiënt mogelijke wijze wilt veranderen in een optimale situatie B een dergelijk ander probleem? Hoe zit het met de samenstelling van het ideale voetbalteam? En wat is eigenlijk optimaal? En wanneer is een probleem gemakkelijk of moeilijk? Het vakgebied der kwantitatieve logistiek probeert op deze vragen antwoorden te geven. Laat ons een aantal van deze problemen wat nader bestuderen.

Bij het zogenaamde *kortste-pad probleem* wordt gevraagd de kortste route van een vaste locatie A naar een vaste locatie B te vinden. Als er slechts één directe verbinding is tussen A en B is er maar één keuze en zijn we snel klaar. Stel dat we ook nog via een ander punt van A naar B kunnen reizen. Dan zijn er twee mogelijkheden: rechtstreeks, of via dat andere punt. De kortste route is dan één van deze twee. Stel nu dat er twee extra locaties tussen A en B zijn. Dan is het aantal mogelijkheden om van A naar B te gaan 5. Zijn er 10 tussenliggende locaties, dan is dit aantal opgelopen tot 9.864.101, bijna 10 miljoen dus. Met andere woorden, het aantal mogelijkheden waaruit we de kortste route moeten kiezen neemt superexponentieel toe met het aantal tussenliggende punten.

Het zogenaamde *handelsreiziger probleem* wordt gegeven door het bepalen van de kortste route van A naar B bepaald worden, waarbij alle tussenlocaties tussen A en B bezocht dienen te worden. Ook bij dit probleem is de zoekruimte superexponentieel groot. Bijvoorbeeld als er, naast A en B, 10 andere locaties bezocht moeten worden, dan zijn er 3.628.800 mogelijke routes.

Voor beide problemen geldt dat één van die duizelingwekkende aantallen de kortste route is. Het is zoeken naar een speld in een hooiberg met evenwel de zekerheid dat die speld er in zit. We zoeken iets dat daadwerkelijk bestaat. Welke van beide problemen is het moeilijkst of zijn ze even moeilijk? Een maat voor de moeilijkheidsgraad zou de grootte van de zoekruimte kunnen zijn. Dat zou dan betekenen dat het kortste-pad probleem het moeilijkst is. In geval van 10 tussenliggende locaties hebben we voor het kortste-pad probleem maar liefst zo'n 6 miljoen meer mogelijkheden dan voor het handelsreiziger probleem. Het verschil is aanzienlijk en neemt toe naarmate het aantal tussenliggende locaties groeit. Sterker nog, zelfs dit verschil explodeert.

Moeilijke en makkelijke problemen

Voor het onderscheid tussen de begrippen gemakkelijk en moeilijk is in de zestiger jaren de zogenaamde complexiteitstheorie opgesteld. In 1953 ontwaren we echter al de eerste sporen van deze theorie in een artikel van de hand van John von Neuman, inderdaad dezelfde die aan de wieg heeft gestaan van de atoombom. Met deze theorie is het mogelijk om onderscheid te maken tussen gemakkelijke en moeilijke problemen.

Dit gaat ongeveer als volgt. Om alle problemen met elkaar te kunnen vergelijken worden ze eerst getransformeerd in problemen waarop het antwoord alleen 'ja' of 'nee' is. Kortste-pad problemen worden dan: Is er een route die niet langer is dan een vooraf gegeven afstand? Bijvoorbeeld, kun je van A naar B in niet meer dan, zeg, 100 kilometer? Volgens deze theorie heet een probleem gemakkelijk, in vakjargon een P-probleem [9], als er een rekenmethode is ontdekt waarmee een computer 'snel' het antwoord op de vraag kan berekenen. Het oplossen van deze problemen is meestal verre van eenvoudig, echter zodra een methode gevonden is, noemen we ze gemakkelijk. 'Snel' betekent in dit verband: binnen praktisch gezien redelijke tijdslimieten. Dit betekent dat, hoe de locaties ook liggen

Figuur 1 Johann Bernoulli (1667–1748) hoogleraar in de wiskunde te Groningen van 1695 tot 1705

en wat de vooraf gegeven afstanden tussen de locaties ook mogen zijn, het bepalen van het antwoord op de vraag en de correctheid ervan aantonen snel gaat. Dus niet alleen in best-case situaties, bijvoorbeeld alle punten op één lijn, maar ook in *worst-case* situaties, als alle locaties willekeurig verspreidt liggen kan de gestelde vraag 'gemakkelijk' worden beantwoord.

Sommige problemen, die teruggebracht zijn tot 'ja-nee' problemen, hebben de eigenschap dat het vinden van een oplossing moeilijk is, maar dat het aantonen dat een voorgesteld antwoord correct is, gemakkelijk is. Hoe zit dat? Voor het kortste-pad probleem geldt het volgende. Als iemand beweert een route gevonden te hebben die niet langer is dan de gevraagde 100 kilometer, dan is het een koud kunstje om de correctheid van die bewering te controleren. In geval van het handelsreiziger probleem hoeven we van de aangeboden route alleen te controleren of alle locaties er op liggen en of de lengte inderdaad niet meer is dan de gevraagde 100 km. Dus voor beide problemen geldt dat het checken op correctheid gemakkelijk is. Dergelijke problemen heten in de complexiteitstheorie NP-problemen [10]. Duidelijk zal zijn dat ieder P-probleem volgens deze definitie ook een NP-probleem is.

Er is nog iets aan de hand. Binnen de klasse van NP-problemen bevindt zich nog een andere deelklasse van problemen, waarvan het onbekend is of ze gemakkelijk zijn. Dat zijn problemen waarvoor we een aangeboden oplossing snel op juistheid kunnen controleren, maar geen sterveling weet hoe het probleem zelf opgelost moet worden. Bovendien geldt dat als één van die problemen gemakkelijk blijkt te zijn, dan alle NP-problemen gemakkelijk zijn. In dat geval geldt dus dat P = NP.

Het zijn dus kennelijk de zeer moeilijke problemen binnen de klasse der NP-problemen en ze heten in vakjargon NP-moeilijke problemen. Als dus voor één van de NP-moeilijke problemen is aangetoond dat het probleem gemakkelijk is, dan zijn in één klap al die andere, inmiddels meer dan duizend, NP-problemen ook gemakkelijk.

U zult begrijpen dat vele wetenschappers in de weer zijn geweest om één van die allermoeilijkste problemen op te lossen. Dat zou toch prachtig zijn: in één nacht duizend problemen oplossen.

In 1959 werd door de Nederlandse wiskundige Edsger W. Dijkstra een algoritme ontwikkeld waarmee het kortste-pad probleem onder alle omstandigheden zeer snel kan worden opgelost. In termen van de complexiteitstheorie betekent dit dat het kortste-pad probleem dus gemakkelijk is. En dat is prettig te weten, want het is de basis van talrijke routeringsproblemen en wordt gebruikt in routeringscomputer- pakketten die koeriers en vrachtwagens tegenwoordig aan boord hebben. Ook het elektronische spoorboekje, waarmee conducteurs ons bij vertragingen zo snel de snelste verbindingen verschaffen, gebruiken Dijkstra's uitvinding.

Omdat de zoekruimte van het handelsreiziger probleem kleiner is, en wel — zoals we zagen — exponentieel veel kleiner, dan die van het kortste-pad probleem, zou u nu kunnen denken dat dit probleem ook gemakkelijk is. Helaas is dit probleem niet gemakkelijk: het handelsreiziger probleem is veel en veel moeilijker. Om precies te zijn: het is één van die zogenaamde NP-moeilijke problemen. Dit verklaart de grote belangstelling onder wetenschappers voor dit probleem. Degene die het oplost heeft bewezen dat P = NP.

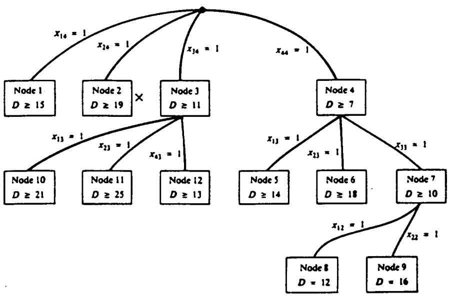
Gelovigen en ongelovigen

Waarom is een zo eenvoudig te formuleren probleem nu toch eigenlijk zo moeilijk? Hoe komt het dat na tientallen jaren onderzoek over de hele wereld een kortste route langs alle locaties nog steeds niet snel te bepalen is? Waarom is dit probleem nu zoveel moeilijker dan het kortste-pad probleem? Het antwoord is kort: we weten het niet. In de loop der jaren heeft zich echter wel de gedachte post gevat dat van moeilijke problemen nooit bewezen zal kunnen worden dat ze gemakkelijk zijn. Met andere woorden: het handelsreiziger probleem en alle andere NP-moeilijke problemen zijn in deze visie onoplosbaar en niemand zal ooit in staat zijn ze op te lossen.

Maar hier openbaart zich een dilemma: toch doorgaan met het zoeken naar een oplossing of iets anders gaan doen. En zie, wat zo vaak gebeurt bij controverses, is hier ook gebeurd. Wetenschappers die zich bezig houden met bovengenoemde problemen verdelen zich in twee groepen: de gelovigen en de ongelovigen. De ongelovigen zijn dik in de meerderheid. Zij geloven dat ooit bewezen zal worden dat NP-moeilijke problemen eeuwig moeilijk zullen blijven. De gelovigen daarentegen klampen zich vast aan de hoop dat er ooit een dag komt dat alle NP-moeilijke problemen, en daarmee dus ook alle andere NP-problemen, feitelijk gewoon gemakkelijk blijken te zijn.

Zo gemiddeld eens in de twee jaar klopt er een student, nog onwetend van het onderscheid tussen gelovigen en ongelovigen, aan mijn deur, die meent het probleem te hebben opgelost. Ook ik was ooit één van de degenen die schuchter heeft aangeklopt, opgewonden door de peilloze faalangst, die gepaard gaat met de vermeende ontdekking van de macht over het exponentieel grote, het gevoel van het uiteenspatten van jeugdig optimisme als de man van 'kom binnen' je uitlaat met een minzame grijns. Veel later, hoewel inmiddels lang geleden, bekeerde ook ik mij tot de categorie der ongelovigen. Dat was toen één van mijn kinderen de code van het cijferslot van zijn fiets weer eens kwijt was. Het bepalen van de juiste cijfercombinatie lijkt op een NP probleem. Immers controleren of een bepaalde cijfercombinatie het slot doet openspringen is simpel: gewoon de vermeend correcte code instellen en kijken of het slot opengaat. Zou er een slimmere manier bestaan om het slot open te krijgen, anders dan alle mogelijkheden bij langs te gaan en te hopen dat het niet pas bij de laatste combinatie openspringt? Ik bedacht en wist het zeker dat er slechts één keuze is: alle mogelijkheden systematisch afwerken. Sindsdien schreef ik de codes op en vond ze echter nooit weer terug. Het cijferslot probleem werd voor mij de metafoor die maakte dat ik definitief van mijn geloof viel en mij heb geschaard in de rijen van de veilige meerderheid van wetenschappers die geen pogingen meer doen het handelsreiziger probleem op te lossen.

De gelovigen daarentegen laten met enige regelmaat iets van zich horen. Op zich is dat niet zo erg, ware het niet dat hun verhalen vaak enige tientallen pagina's dik zijn. De fout bevindt zich helaas vrijwel altijd op de laatste pagina, zodat uren speurwerk niet eerder kan leiden naar de 'delete' knop van mijn computer. Mijn advies met betrekking tot toekomsti-



Figuur 2 Een 'branch-and-bound' boom

ge epistels in deze reeks: of een medegelovige de fout er uit laten halen of ogenblikkelijk het zaakje naar de prullenmand verwijzen.

Ondertussen mag 'de meerderheid' niet stilzitten. Talrijke moeilijke praktische problemen vragen om oplossingen. Weliswaar kan de wetenschap niet altijd optimale oplossingen garanderen maar wel oplossingen die wellicht de optimaliteit benaderen. Maar is dat zo erg? Bertrand Russell heeft ooit eens gezegd dat "alle exacte wetenschappen gedomineerd worden door de gedachte van benadering". Als een zo groot filosoof en wiskundige dit zegt hoeven wij ons niet te generen om de optimaliteit, als we niet weten hoe we die moeten bereiken, te benaderen. De melkophaalwagens moeten iedere dag hun routes maken langs de boerderijen, helikopters moeten dagelijks routes uitvliegen naar de olieboorplatforms op de Noordzee en veilig terugkeren op Schiphol, vorkheftrucks moeten routes rijden door grote distributiecentra, robots moeten iedere twintig seconden soms meer dan drieduizend gaatjes boren in printplaatjes voor elektronica-onderdelen, patrouilleboten moeten varende schepen controleren, en zo voort. Het NP-moeilijke handelsreiziger probleem moet in veel praktische situaties worden opgelost. Als het niet mogelijk is de optimale oplossing te vinden, dan moeten we maar proberen deze zo goed mogelijk te benaderen.

We doen dat tegenwoordig met, globaal gesproken, twee soorten methoden: op een slimme wijze alle exponentieel vele mogelijkheden bij langs gaan, in vaktaal *branch-and-bound* methoden genoemd, en vuistregel methoden, ook wel heuristieken genoemd.

De methoden uit de eerste klasse worden vaak gebruikt als er redelijk veel tijd beschikbaar is om een bruikbare oplossing uit te rekenen. Heuristieken daarentegen, zijn rekenmethoden die uit praktisch oogpunt voldoende snel werken en worden ontworpen door slim gebruik te maken van het specifieke in de structuur van het praktische probleem. De vraag die rijst is: hoe goed zijn dergelijke methoden? Kunnen we ons een idee vormen over hoever we van de optimale oplossing afzitten?

Branch-and-bound methoden

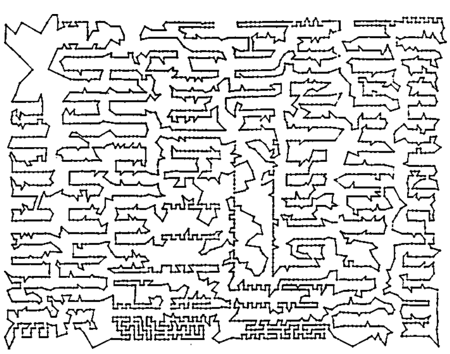
Ik zal eerst iets vertellen over de *branch-and-bound* methoden voor moeilijke problemen. Een *branch-and-bound* methode vindt uiteindelijk de optimale oplossing maar dat kan in principe eeuwigheden duren. Waarom dan toch gebruik maken van zo'n techniek? Wel, daar zijn twee redenen voor. Ten eerste zijn er veel problemen waarvoor deze methode toch heel snel werkt, en ten tweede kunnen berekeningen onderbroken worden en kan de tot dan toe beste oplossing worden gebruikt. Zo kan men de computer gedurende de nacht laten rekenen, indien er verder geen activiteiten zijn en de resultaten pas in de vroege ochtend gebruikt hoeven te worden. Als de computer nog steeds niet is uitgeprutteld, gebruikt men de tot dan toe gevonden beste oplossing. De methode ontwikkelt een boom die steeds groter en groter wordt en waarbij de bladeren van de boom oplossingen geven die steeds dichter bij de optimale oplossing liggen. Veel van die bladeren bevatten echter geen bruikbare oplossingen. De groei van de boom stopt zodra een optimale oplossing is gevonden. Dergelijke bomen kunnen dus exponentieel groot worden.

Zo'n vijf jaar geleden is een interessante ontdekking gedaan door mijn collega Boris Goldengorin. Zijn idee werkt, globaal gesproken, als volgt. Verander de input data van het oorspronkelijke moeilijke probleem zodanig dat een gemakkelijk probleem ontstaat. Verrassend is dat de som van alle veranderingen, de correctie genaamd, een bovengrens is voor het verschil tussen de waarde van de oplossing van het gecorrigeerde probleem en de waarde van de optimale oplossing. Als deze data-correctie methode in een *branch-and-bound* boom wordt gestopt, komt er op elk blad van de boom een bruikbare oplossing en is bovendien bekend hoever je van de optimale oplossing verwijderd bent. Dat is een enorme winst boven de oude *branch-and-bound* techniek omdat nu gestopt kan worden zodra een oplossing is gevonden die dicht genoeg ligt bij de optimale oplossing. Merk op dat we op ieder moment dus weten hoever we maximaal van de optimale oplossing afzitten, zonder deze zelf te kennen. De kunst is om 'gemakkelijke' input data te vinden die dicht bij het oorspronkelijke moeilijke probleem ligt, omdat je dan dus maar kleine correcties hoeft aan te brengen en je dus vanaf het begin van de boom al dicht bij de optimale oplossing zit. Hiervoor wordt gebruik gemaakt van de expertise die we in de jaren vòòr Goldengorin in Groningen hebben ontwikkeld op het gebied van gemakkelijke speciale gevallen van het moeilijke handelsreiziger probleem. Met name het werk van René van Dal en Jack A.A. van der Veen heeft bijgedragen aan deze kennis. De meest recente resultaten met de data-correctie methode zijn veelbelovend. We hebben nog heel wat te ontdekken en te publiceren!

Heuristische methoden

Ik zal u nu iets vertellen over heuristieken voor het oplossen van logistieke problemen. Veel is er geschreven over de kwaliteit van heuristieken voor moeilijke problemen. Interessant is dat er veel heuristieken zijn die oplossingen geven die nooit meer dan 50 procent minder goed zijn dan de optimale oplossing. Merk op dat ook dit is bewezen zonder dat de optimale oplossing zelf bekend is. Er zijn echter ook heuristieken die in *worst-case* situaties oplossingen geven die een willekeurig veelvoud afliggen van de optimale oplossing. "Het zal mij worst-kaas zijn", zei iemand onlangs. Niet bruikbare heuristieken, zou u geneigd zijn te kunnen denken.

Een bekend voorbeeld van een dergelijke slechte heuristiek is de zogenaamde *nearest neighbor* methode. Deze werkt als volgt. Stel dat we op een plattegrond twintig locaties hebben liggen en het probleem is een kortste route te maken langs deze locaties waarbij start en finish hetzelfde zijn. Hoe zou een hongerige muis zijn keuze maken uit alle 60.822.550.204.416.000 (een getal met 17 cijfers) mogelijkheden, als op iedere locatie een klein stukje kaas zou liggen? Worst mag ook. Wel, dat is uitgezocht. De muis kiest het dichtstbijzijnde stukje kaas zodra hij tevoorschijn komt uit zijn holletje, kijkt dan opnieuw om zich heen en neemt het vandaar uit dichtstbijgelegen stukje kaas. Nadat hij alle stukjes kaas op deze wijze heeft verschalkt verdwijnt hij weer in zijn holletje. Ziedaar, de muis volgt een *nearest neighbor* strategie. De



Figuur 3 Robotroute langs 3038 gaatjes

vraag rijst of de muis de snelst mogelijke route heeft gekozen? Het antwoord is nee. Maar hoe goed doet onze muis het nu eigenlijk?

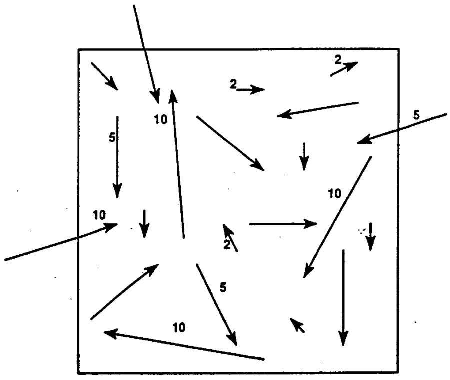
Dagelijks wordt op vele plaatsen in de wereld de *nearest neighbor* methode gebruikt voor het bepalen van robotroutes waarbij de robot een *laser*pistool bevat waarmee soms meer dan 3000 gaatjes geboord moeten worden in printplaatjes voor elektronische onderdelen. Let wel, de robot moet dus een route maken langs een gigantisch aantal locaties, een handelsreiziger route dus. Het aantal mogelijkheden waaruit de robot moet kiezen is een getal met meer dan 9000 cijfers. Als de *nearest neighbor* heuristiek in de praktijk zo intensief wordt gebruikt kan hij toch niet echt slecht zijn.

Maar wat is het geval? Het blijkt en het is zelfs wiskundig aangetoond dat naarmate de dichtheid van de locaties toeneemt, de kans dat de oplossing van de *nearest neighbor* heuristiek optimaal is steeds groter wordt. Dus als de locatiedichtheid oneindig groot wordt, dan wordt het verschil met de optimale oplossing oneindig klein.

Scheduling paradox

We zouden dus kunnen zeggen dat zich hier het volgende fenomeen openbaart. Zoals gezegd is het in het algemeen onmogelijk optimale oplossingen van NP- moeilijke problemen te bepalen. Als deze problemen nog gecompliceerder gemaakt worden, bijvoorbeeld door extra voorwaarden toe te voegen of de locatiedichtheid te laten toenemen, dan lijkt het er op dat steeds simpelere methoden steeds betere oplossingen geven. Met andere woorden: de volgende hypothese zou geformuleerd kunnen worden. Naarmate een reeds moeilijk probleem nog ingewikkelder wordt gemaakt, wordt het steeds gemakkelijker om er een goede oplossing voor te vinden. Populair gezegd: oneindig gecompliceerde problemen zijn gemakkelijk oplosbaar. Je zou kunnen spreken van een paradox. Ik heb het wel eens de *scheduling paradox* genoemd. Er gaat iets geruststellends van uit. In ieder geval laat de wiskunde, dankzij de paradox, de elektronica-industrie met een gerust hart de *nearest neighbor* methode gebruiken; veel is niet te verdienen met het zoeken naar betere robotroutes.

Ik geef u nog twee interessante voorbeelden. Het eerste is ontleend aan een onderzoek gedaan voor TNO ten tijde van de recente problemen in de Balkan. De Nederlandse marine had de opdracht in een bepaald zeegebied voor de kust van Joegoslavië zoveel mogelijk schepen te controleren in verband

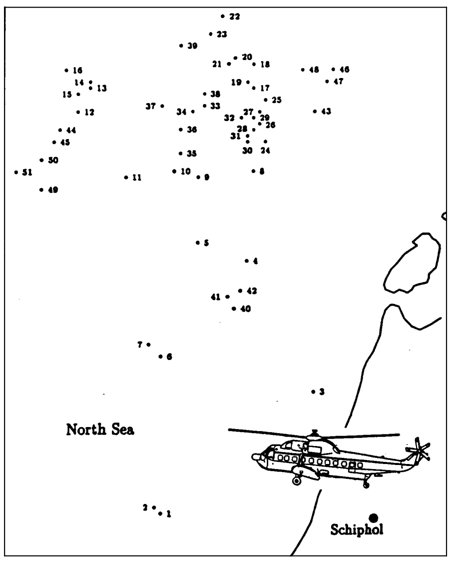


Figuur 4 Verdachte scheepsbewegingen

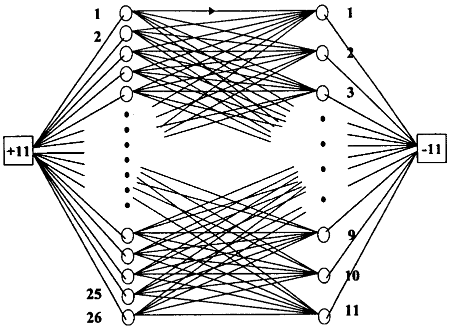
met de toen heersende boycot. De marine gebruikte daarvoor een fregat. Boven het gebied cirkelde een Hercules patrouillevliegtuig dat alle scheepsbewegingen doorseinde aan het fregat. Ieder schip kreeg een cijfer tussen 0 en 10: een 0 voor 'volstrekt niet verdacht', bijvoorbeeld een vissersboot, en een 10 voor 'zeer verdacht'. TNO was gevraagd om efficiënte en effectieve controleroutes te bepalen voor het fregat. Vervolgens vroeg TNO ons het probleem op te lossen. Wij zagen hier natuurlijk onmiddellijk een soort handelsreiziger probleem in met als grote complicatie het feit dat de locaties bewogen en niet allemaal even belangrijk waren. Je zou kunnen zeggen dat het probleem daarmee een oneindig grote zoekruimte heeft. We hebben het probleem zo geformuleerd dat het fregat elke dag een zo hoog mogelijke score (aantal gecontroleerde schepen maal de 'verdachtheids'-score) moest halen. Een student heeft vervolgens een aantal technieken toegepast die hij op het college Kwantitatieve Logistiek had geleerd. Bij vergelijking ervan bleek dat de meest simpele heuristiek de beste resultaten gaf, namelijk op ieder moment het dichtstbijvarende schip controleren. Ook hier werd dus voor een ingewikkeld probleem een simpele oplossingsmethode gebruikt.

Als laatste probleem beschouw ik het routeren van helikopters vanaf luchthaven Schiphol naar olieboorplatforms op het Nederlandse deel van de Noordzee. Het heuristiek, is uitgedacht door mijn collega Gert Tijssen en werkt als volgt. Vlieg eerst naar het verst weggelegen platform, voer daar alle vervangingen uit, kijk vervolgens naar nabijgelegen platforms en vervang daar zoveel als mogelijk is gezien de hoeveelheid nog voorhanden brandstof, en vlieg vervolgens terug waarbij eventueel op terugweg nog een platform bezocht kan worden. Deze procedure wordt herhaald totdat alle gevraagde omwisselingen zijn uitgevoerd. Tijssen heeft het onderzoek gedaan in samenwerking met studenten en het bedrijf Hydrographic and Marine Consultants in Almere. Dagelijks vliegen Sykorski helikopters heen en weer om werknemers op de platforms te vervangen door verse krachten. Hoe worden de dagelijkse vluchtschema's bepaald? Er moet onder meer rekening worden gehouden met het feit dat een beperkte hoeveelheid brandstof kan worden meegenomen, zodat voorkomen wordt dat de computer helikopters zonder brandstof laat rondvliegen. Er zijn voor dergelijke *vehicle-routing* problemen in het verleden een aantal zeer geavanceerde oplossingstechnieken uitgedacht, die echter geen van alle geschikt zijn voor praktisch gebruik. Er is een veel simpeler rekenmethode die bovendien heel snel werkt en meestal zelfs kortere routes geeft dan alle andere methoden. Deze nieuwe methode, de zogenaamde *cluster-and-route* heuristiek is voor de zekerheid nog een aantal andere heuristieken vergeleken, maar na uitgebreid testen bleek zijn *cluster-and-route* superieur te zijn. Nu is vanzelfsprekend dit probleem veel gecompliceerde dan het kale handelsreiziger probleem, maar ook hier is de *scheduling-paradox* dus van toepassing: een zeer moeilijk probleem los je het beste op met een simpele rekenmethode.

Na deze voorbeelden rijst de vraag: onder welke voorwaarden geldt de *scheduling-paradox*? Ik denk dat het niet zinvol is om een wetenschappelijk verantwoord experiment op te zetten om deze paradox te toetsen. Beter lijkt het me de gedachte in het achterhoofd te houden om bij zeer gecompliceerde problemen niet altijd alle heil te verwachten van de meest geavanceerde technieken.



Figuur 5 Boorplatforms op het Nederlandse continentale plat van de Noordzee



Figuur 6 Het ideale voetbalelftal bepalen met een transportmodel

Voetbal

Dames en heren, U vraagt zich misschien af wat dit alles te maken heeft met voetbal. Welnu, niets. Maar het omgekeerde geldt des te meer. Het samenstellen van een ideaal team is ook een kwestie van logistiek. De zoekruimte is exponentieel groot. Als je de beste 11 spelers wilt kiezen uit zeg 26 selectiespelers, dan zijn er 308.403.583.488.000 mogelijkheden, een getal van 20 cijfers. Dit toch tamelijk gecompliceerde probleem hebben we gegoten in de vorm van een transportstroom probleem, waarbij 11 voertuigen door een netwerk vervoert dienen te worden vanuit één vaste locatie naar één vast verzamelpunt en waarbij de totale opbrengst (de relatieve waarde van een speler op een positie) zo groot mogelijk dient te zijn. Gewoon een logistiek probleem dus en zelfs één waarvan bewezen is dat het een P-probleem is. Het superexponentiële teamformatieprobleem blijkt op deze wijze een gemakkelijk probleem te zijn. Dus zijn we in staat om tijdens een voetbal-, ijshockey- of *American football*-wedstrijd razendsnel de gevolgen op de opstelling van een andere tactiek of blessure door te rekenen.

Meer dan praktische betekenis

Ik heb u uitgelegd waarom we het kortste-pad probleem gemakkelijk noemen en het handelsreiziger probleem moeilijk, ondanks het feit dat de zoekruimte van het eerste probleem exponentieel veel groter is dan dat van het tweede probleem. Vorige week besprak ik dit met mijn collega Diptesh Ghosh en we vroegen ons af wat er gebeurt als je het aantal mogelijkheden in de zoekruimte van het kortste-pad probleem deelt door het aantal van het handelsreiziger probleem waarbij het aantal tussenlocaties in beide gevallen even groot is. Als we vervolgens het aantal tussenlocaties oneindig groot maken, dan blijkt dat deze ratio gelijk wordt aan het in de wiskunde beroemde transcendente getal e. Is dat interessant? Wat is het nut om dat in te zien of te weten? In ieder geval waren we verrast. In ontologische zin betekent transcendentaal datgene wat de eindige wereld oneindig ver overstijgt. En zouden we, om met Vanderjagt te spreken, niet 'woest worden' als iemand begon te 'zeuren over het praktisch nut' van deze vondst?

Het routeren van vliegtuigen, helikopters, boten en vrachtwagens, het maken van productieplannen, het ontwerpen van dienstroosters en spoorboekjes, en het samenstellen van teams zijn allemaal moeilijke, praktische en fascinerende problemen. Maar als je er 'diep in kijkt' zie je exponentiële reeksen die de oorzaak zijn van de onmogelijkheid om vele van deze problemen binnen redelijke tijdsgrenzen optimaal op te lossen. En soms is het gevolg van een zijdelingse blik op zo'n probleem de ontdekking van iets kleins en praktisch onbelangrijks, bijvoorbeeld het transcendente getal e. Het heeft niets te betekenen, het is er gewoon, het wil alleen even gezien worden. Het wil slechts een knipoog zijn naar het feit dat onderzoek naar praktische logistieke problemen, met soms oneindige moeilijkheidsgraad, momenten van transcendente contemplatie bevatten, waardoor oneindig klein en oneindig groot in elkaar overvloeien en simpele oplossings- methoden vaak de beste resultaten geven. De ontdekking van de schoonheid van het nietige, van het onbetekenende, van het oneindig kleine, fascineert des te meer als zo'n nietige parel zich openbaart in een schelp die zich slechts laat ontsluiten door de logica van de logistiek op de golven van exponentieel exploderende reeksen, zonder geweld, maar met de liefde voor de wetenschap.

Snippers

Geachte toehoorders, ik weet dat u van mij verwacht dat ik Rita, mijn kinderen, mijn vriendinnen, vrienden en mijn ouders in een volgorde bedank, die hun belangrijkheid voor mij weerspiegelt. Al degenen die een rol in mijn leven spelen heb ik op het A4-tje geschreven dat hier versnipperd aan mijn voeten ligt. Wellicht ervaart u deze *Philosophia Experimentalis* als een Bernoulliaanse ontheiliging van deze plechtige zaal. Zou u echter de volgorde der namen willen reconstrueren, dan dient u het A4-tje te herstellen. Dat is een NP-moeilijk probleem. Immers het controleren of u de juiste oplossing hebt gevonden is makkelijk: de puzzel moet precies de vorm hebben van een A4-tje. De reconstructie zelf zal, naarmate de versnippering groter is, langer duren en wel met superexponentiële groei toenemen. Echter in de oneindige versnippering is het probleem om het A4-formaat te reconstrueren een *integraal* geworden, waarbij het oorspronkelijke A4-tje een oneindige som is van oneindig kleine delen. Of, zoals de tegenstanders van Bernoulli zouden zeggen, u zou iets uit het niets hebben gemaakt. De volgorde van de belangrijkheid van mijn liefde en genegenheid is ontstegen aan de oneindige versnippering van de materie, transcendent, met een onuitspreekbaar praktisch nut. Ik dank u voor uw aandacht.

Noten

1 E.L. Lawler, J.K. Lenstra, A.H.G. Rinnooy Kan, and D.B. Smoys (eds.), *The Traveling Salesman Problem. A Guided Tour of Combinatorial Optimization*, John Wiley & Sons (1990)

2 Gerard Sierksma, *Johann Bernoulli (1667-1748): His Ten Turbulent Years in Groningen*, The Mathematical Intelligencer 14 No. 4 (1992) 22–31

3 René van Dal, Jack A.A. van der Veen, and Gerard Sierksma, *Small and Large TSP: Two Polynomially Solvable Cases of the Traveling Salesman Problem*, European Journal of Operational Research 69 (1993) 107–120

4 Gerard Sierksma and Gert A. Tijssen, *Routing Helicopters for Crew Exchanges on Off-shore Locations*, Annals of Operations Research 76 (1998) 261–286

5 Boris Goldengorin, Gerard Sierksma, Gert A. Tijssen, and Michael Tso, *The Data-correcting Algorithm for the Minimization of Supermodular Functions*, Management Science 45 Vol. 11 (1999) 1539–1551

6 Gerard Sierksma and Wybe Sierksma, *The Great Leap to the Infinitely Small. Johann Bernoulli: Mathematician and Philosopher*, Annals of Science 56 (1999) 433–449

7 Gerard Sierksma, *Het Beste Nederlandse Voetbalteam*, Economisch Statistische Berichten 4262 (2000) 525–527

8 Gerard Sierksma, *De Computer als Hulpmiddel bij Team-samenstelling*, ITW-Nieuws 10 Nr. 3 (2000) 13–17

9 De letter 'P' staat voor polynomiaal. Het betekent dat, als het aantal locaties n is, de oplossing van het probleem kan worden uitgerekend in een tijdsperiode met een lengte van de orde n^{α} met α een positief getal. Men zegt dan dat dergelijke problemen zijn op te lossen in polynomiale tijd. Problemen waarvan niet bekend is of ze in polynomiale tijd zijn op te lossen heten moeilijk.

10 De letters NP staan voor *Nondeterministic Polynomial*. Problemen die zowel moeilijk oplosbaar als moeilijk 'controleerbaar' zijn komen weinig voor. Een voorbeeld ervan is 'Wint wit?' uit de schaaksport.