UWC

Universitaire Wiskunde Competitie

Opgave A

Teken in een cirkel een regelmatige zeshoek. Beschrijf met de hoekpunten van deze zeshoek als middelpunten zes cirkels met een straal gelijk aan de straal van de eerste cirkel. Binnen de eerste cirkel ontstaat een bloemetje. Buiten de eerste cirkel ontstaan zes snijpunten van de getrokken cirkels. Kies deze zes hoekpunten weer als middelpunten van nieuwe cirkels, weer met dezelfde straal en teken weer de betreffende veelhoek. Zet dit procédé voort en beredeneer de structuur van de figuur die ontstaat.

Opgave B

Zij $\mathbf{Q}[X_1,\ldots,X_n]$ de ring van polynomen met rationale coëfficiënten in de onbekenden $X_1,\ldots X_n$. We noemen $p\in\mathbf{Q}[X_1,\ldots,X_n]$ *homogeen van graad* $m\geq 1$ als

$$p(tX_1,\ldots,tX_n)=t^m p(X_1,\ldots,X_n)$$

voor alle $t\in\mathbf{Q}$. De deelverzameling van alle polynomen die homogeen zijn van graad m noteren we als $\mathbf{Q}^{(m)}[X_1,\ldots,X_n]$.
Uit de identiteit

$$X_1X_2=\tfrac{1}{2}(X_1+X_2)^2-\tfrac{1}{2}X_1^2-\tfrac{1}{2}X_2^2$$

volgt meteen dat ieder polynoom $p\in\mathbf{Q}^{(2)}[X_1,X_2]$ geschreven kan worden als een $\mathbf{Q}$-lineaire combinatie van kwadraten van polynomen in $\mathbf{Q}^{(1)}[X_1,X_2]$.
Toon aan: voor alle $m,n\geq 1$ kan ieder polynoom $p\in\mathbf{Q}^{(m)}[X_1,\ldots,X_n]$ geschreven kan worden als een $\mathbf{Q}$-lineaire combinatie van m-de machten van polynomen in $\mathbf{Q}^{(1)}[X_1,\ldots,X_n]$.

Opgave C

Toon aan dat de volgende functie

$$f(x)\;=\;\frac{1}{x}\ln\left(\frac{\ln(1+e^x)}{\ln(1+e^{-x})}\right)$$

strikt dalend is op $(0,\infty)$.

Editie 2000/4

Op de ronde 2000/4 van de Universitaire Wiskunde Competitie ontvingen we 10 inzendingen.

Opgave 2000/4-A

Gegeven vier punten in het vlak, waarvan er geen drie op een rechte lijn liggen. Kies drie van de vier punten. Deze vormen een driehoek $\triangle$, waarvan de omgeschreven cirkel middelpunt M en straal R heeft. Noem het vierde punt P. Toon aan:

$$\text{Oppervlakte}(\triangle)\times(PM^2-R^2)$$

is onafhankelijk van de keuze van de drie punten.

Oplossing De opgave laat een generalisatie toe naar dimensies $d\geq 2$. In de navolgende oplossing beschouwen we het geval $d=3$; deze oplossing geeft voldoende aanknopingspunten voor het algemene geval.
Van het vijftal punten $\{A,B,C,D,E\}$ liggen er geen vier in één vlak. We beschouwen twee viertallen, zeg $\{A,C,D,E\}$ en $\{B,C,D,E\}$. Deze hebben het drietal $\{C,D,E\}$ gemeenschappelijk; het middelpunt van hun omgeschreven cirkel nemen we als oorsprong van een cartesisch coördinatenstelsel. De coördinaten van een punt P noteren we als

De Universitaire Wiskunde Competitie (UWC) is een ladderwedstrijd voor studenten, georganiseerd in samenwerking met de Vlaamse Wiskunde Olympiade. De opgaven worden tevens gepubliceerd op de internetpagina http://academics.its.tudelft.nl/uwc

Ieder nummer bevat de ladderopgaven A, B, en C waarvoor respectievelijk 30, 40 en 50 punten kunnen worden behaald. Daarnaast zijn er respectievelijk 6, 8 en 10 extra punten te winnen voor elegantie en generalisatie. Per nummer worden twee prijzen van 100 Euro toegekend: één aan de aanvoerder van de ladder (die daarna weer onderaan begint), en één aan de inzender van de oplossing die de meeste punten behaald heeft (die dan geen punten voor de ladder krijgt). Daarnaast zal twee maal per jaar een ster-opgave worden aangeboden waarvan de redactie geen oplossing bekend is. Voor de eerst ontvangen correcte oplossing van deze ster-opgave wordt eveneens 100 Euro toegekend. Groepsinzendingen zijn toegestaan. Elektronische inzending in LaTeX wordt op prijs gesteld. De inzendtermijn voor de oplossingen sluit op 1 augustus 2001. Voor een ster-opgave geldt een inzendtermijn van een jaar.

Eindredactie: Jan van Neerven
Redactieadres: Universitaire Wiskunde Competitie
Vakgroep Toegepaste Wiskundige Analyse
Technische Universiteit Delft
Postbus 5031, 2600 GA Delft
j.vanneerven@its.tudelft.nl

De Universitaire Wiskunde Competitie wordt gesponsord door Optiver Derivatives Trading.

UWC
oplossingen

$\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$. Er geldt dan $|\mathbf{c}| = |\mathbf{d}| = |\mathbf{e}| =: r$. Kiezen we de x_1-as loodrecht op het vlak opgespannen door C, D en E, dan liggen C, D en E blijkbaar op de cirkel

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2, \\ x_1 = 0. \end{cases}$$

Het middelpunt M_A van omgeschreven bol van de punten A, C, D en E heeft coördinaten $(m_A, 0, 0)$. De straal R_A van deze bol voldoet aan

$$r^2 + m_A^2 = R_A^2 = |AM_A|^2 = (a_1 - m_A)^2 + a_2^2 + a_3^3,$$

zodat
$$2a_1 m_A = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - r^2.$$

Ook geldt $|BM_A|^2 = (b_1 - m_A)^2 + b_2^2 + b_3^2$, dus

$$|BM_A|^2 - R_A^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - r^2 - 2b_1 m_A.$$

Combinatie van deze gelijkheden geeft

$$a_1(|BM_A|^2 - R_A^2) = a_1(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - r^2) - b_1(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - r^2).$$

Analoog vinden we dat

$$b_1(|AM_B|^2 - R_B^2) = b_1(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - r^2) - a_1(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - r^2).$$

Dit geeft
$$a_1(|BM_A|^2 - R_A^2) = -b_1(|AM_B|^2 - R_B^2). \qquad (*)$$

Het volume van de viervlakken opgespannen door A, C, D en E (respectievelijk B, C, D en E) wordt verkregen door $|a_1|$(respectievelijk $|b_1|$) te vermenigvuldigen met $\frac{1}{3}$ maal de oppervlakte van de driehoek CDE. Bijgevolg geldt

$$\text{Volume}\,[ACDE] \cdot \big|\, |BM_A|^2 - R_A^2 \big| = \text{Volume}\,[BCDE] \cdot \big|\, |AM_B|^2 - R_B^2 \big|.$$

Zoals de meeste inzenders opmerkten ontbraken de absolute waarde-strepen in de opgave. Als men ‘oppervlakte’ als ‘georiënteerde oppervlakte’ interpreteert, was de opgave echter correct (het min-teken in $(*)$ komt dan van de permutatie die $ABCDE$ in $BACDE$ overvoert).

Opgave 2000/4-B
Zij $p, k \in \mathbf{N} \setminus \{0, 1\}$. Bewijs de volgende ongelijkheden:

$$\frac{(k^p - (k-1)^p))^2}{k^{2p-1} - (k-1)^{2p-1}} < \frac{((k+1)^p - k^p))^2}{(k+1)^{2p-1} - k^{2p-1}} < \frac{p^2}{2p-1}.$$

Oplossing De volgende uitwerking is gedeeltelijk gebaseerd op de oplossing van Tom Claeys. Beschouw de functie $f : [2, \infty) \to \mathbf{R}$ gegeven door

$$f(k) = \frac{\big((k+1)^p - k^p\big)^2}{(k+1)^{2p-1} - k^{2p-1}} = \left[\int_k^{k+1} x^{p-1}\,dx\right]^2 \left[\int_k^{k+1} x^{2p-2}\,dx\right]^{-1}. \qquad (*)$$

De eerste ongelijkheid is bewezen als we kunnen aantonen dat $f'(k) > 0$ voor alle $k \in [2, \infty)$. Elementair rekenwerk laat zien:

$$\begin{aligned} f'(k) > 0 &\iff \int_k^{k+1} x^{2p-2}\,dx \int_k^{k+1} x^{p-2}\,dx - \int_k^{k+1} x^{2p-3}\,dx \int_k^{k+1} x^{p-1}\,dx > 0 \\ &\iff \int_k^{k+1}\int_k^{k+1} x^{2p-2}y^{p-2} - x^{2p-3}y^{p-1}\,dx\,dy > 0 \\ &\iff \int_k^{k+1}\int_k^{k+1} x^{2p-3}y^{p-2}(x-y)\,dx\,dy > 0 \\ &\iff \int_k^{k+1}\int_y^{k+1} (x^{2p-3}y^{p-2} - y^{2p-3}x^{p-2})(x-y)\,dx\,dy > 0. \qquad (**) \end{aligned}$$

UWC oplossingen

Op het integratiegebied van de herhaalde integraal $(**)$ geldt $x - y \geq 0$. Wegens $\frac{x}{y} \geq 1$ en $2p-3 > p-2 \geq 0$ geldt $\left(\frac{x}{y}\right)^{2p-3} \geq \left(\frac{x}{y}\right)^{p-2}$, zodat ook $x^{2p-3}y^{p-2} - y^{2p-3}x^{p-2} \geq 0$. In al deze ongelijkheden treedt gelijkheid alleen op de diagonaal $x = y$ op. Hieruit volgt dat de herhaalde integraal $(**)$ strikt positief is. Dit bewijst de eerste ongelijkheid.
Schrijf nu

$$\left((k+1)^p - k^p\right)^2 = p^2k^{2p-2} + g(k),$$
$$(k+1)^{2p-1} - k^{2p-1} = (2p-1)k^{2p-2} + h(k),$$

met g en h zekere polynomen van graad $2p-3$. Dan geldt:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\left((k+1)^p - k^p\right)^2}{(k+1)^{2p-1} - k^{2p-1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{p^2 + g(k)/k^{2p-2}}{(2p-1) + h(k)/k^{2p-2}} = \frac{p^2}{2p-1}.$$

Omdat we al weten dat functie f in $(*)$ strikt stijgend is in de variabele k, geeft dit de tweede ongelijkheid.

Opgave 2000/4-C
Men wil uit n personen (met $n \geq 2$) een winnaar aanwijzen door volmaakt eerlijke loting, maar heeft daartoe slechts de beschikking over één geldstuk. De kansen op kruis of munt zijn daarbij niet noodzakelijkerwijs $\frac{1}{2}$, maar wèl is het zeker dat die kansen constant zijn. Een voorschrift voor het spel (en zo'n voorschrift zal een protocol genoemd worden) is bij $n = 2$ bijvoorbeeld het volgende: Men werpt net zolang twee keer achter elkaar totdat de uitkomsten van de laatste twee keer verschillend zijn. Is dat KM (K betekent kruis, M betekent munt) dan wint speler 1, is het MK dan wint speler 2. Er is een kans 0 dat het werpen oneindig lang duurt: dat nemen we voor lief.
De lengteverwachting van het protocol is de verwachtingswaarde van het aantal worpen. Gemakshalve wordt bij de berekening van die lengteverwachting ervan uitgegaan dat de kans op kruis $\frac{1}{2}$ is (terwijl het protocol juist bedoeld is voor de omgang met oneerlijke munten). In het bovengenoemde voorbeeld is de lengteverwachting 4.

a. Toon aan dat er voor $n = 2$ een protocol bestaat met lengteverwachting $< \frac{7}{2}$.
b. Voor $n = 3$ is er een eenvoudig protocol waarvan de lengteverwachting ook weer 4 is. Toon aan dat er een protocol betsaat met lengteverwachting < 4.
c. Bewijs dat er een constante C bestaat zo dat er bij elke n een protocol bestaat met lengteverwachting $< C \log n$.
d. Bewijs dat er bij geen enkele n een getal G bestaat zodanig er een protocol is dat de afloop binnen G worpen garandeert.

Oplossing Deze uitwerking is gebaseerd op de oplossing van Herbert Beltman. We maken gebruik van het feit dat de kans op ieder rijtje bestaande uit k maal K (kruis) en m maal M (munt) gelijk is, ongeacht de volgorde waarin de K's en M's geworpen zijn. We gaan uit van n spelers. Het aantal rijtjes met k maal K en m maal M is $\binom{k+m}{k}$. Als $\binom{k+m}{k} \geq an$ voor zekere a, dan kunnen an van deze rijtjes eerlijk worden verdeeld onder de n spelers. Hoe dit gebeurt is verder niet van belang. Bijvoorbeeld als $n = 5$ dan kan na minimaal 4 beurten een winnaar worden bepaald, namelijk zodra er tweemaal K en tweemaal M is gegooid (bijvoorbeeld door de toekenningen KKMM: speler 1, KMKM: speler 2, KMMK: speler 3, MKKM: speler 4, MKMK: speler 5 en MMKK: onbeslist).
Voordat we het protocol geven dat een zo kort mogelijke lengteverwachting heeft, hebben we een aantal definities nodig. Een *scenario* is een opeenvolging van worpen. We onderscheiden *besliste* en *onbesliste* scenario's. Met $\rho_{k,m}$ noteren we het aantal scenario's bestaande uit k maal K en m maal M dat precies na $k+m$ worpen een winnaar aanwijst (beslist). Met $\theta_{k,m}$ noteren we het aantal onbesliste scenario's bestaande uit k maal K en m maal M. Laat $\binom{k+m}{k}_n = \binom{k+m}{k} \bmod n$. Nu geldt dat

$$\theta_{k,m} = \binom{k+m}{k}_n.$$

Dit kan worden aangetoond met behulp van inductie naar $k+m$. Eenvoudig wordt aangetoond dat

$$\theta_{k,m} = \theta_{k-1,m} + \theta_{k,m-1} \bmod n.$$

Merk op dat

$$\rho_{k,m} = \theta_{k-1,m} + \theta_{k,m-1} - \theta_{k,m},$$

immers door de laatste worp niet uit te voeren is het scenario zeker onbeslist.
Er geldt nu voor de lengteverwachting E_n:

$$\begin{aligned}
E_n &= \sum_{t=1}^{\infty} t \cdot 2^{-t} \sum_{k=0}^{t} \rho_{k,t-k} \;=\; \sum_{t=1}^{\infty} t \cdot 2^{-t} \sum_{k=0}^{t} (\theta_{k-1,t-k} + \theta_{k,t-k-1} - \theta_{k,t-k}) \\
&= \sum_{t=1}^{\infty} t \cdot 2^{-t} \sum_{k=0}^{t} \left(\binom{t-1}{k-1}_n + \binom{t-1}{k}_n - \binom{t}{k}_n \right) \\
&= \sum_{t=0}^{\infty} \left((t+1) \cdot 2^{-t-1} \sum_{k=0}^{t} \binom{t}{k}_n \right) \\
&\qquad + \sum_{t=0}^{\infty} \left((t+1) \cdot 2^{-t-1} \sum_{k=0}^{t} \binom{t}{k}_n \right) - \sum_{t=1}^{\infty} \left(t \cdot 2^{-t} \sum_{k=0}^{t} \binom{t}{k}_n \right) \\
&= 2\binom{0}{0}_n \cdot 2^{-1} + \sum_{t=1}^{\infty} \left(2^{-t} \sum_{k=0}^{t} \binom{t}{k}_n \right) \;=\; \sum_{t=0}^{\infty} \left(2^{-t} \sum_{k=0}^{t} \binom{t}{k}_n \right).
\end{aligned}$$

Let hierbij goed op de bereiken van de variabelen t en k. Hiermee is de formule afgeleid voor de lengteverwachting van de besliste scenario's.
We kunnen hiermee de deelvragen (1), (2) en (3) beantwoorden.

1. We kiezen in bovenstaande formule $n = 2$ en vinden:

$$\begin{aligned}
E_2 &= \sum_{t=0}^{\infty} \left(2^{-t} \sum_{k=0}^{t} \binom{t}{k}_2 \right) \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \sum_{t=7}^{\infty} \left(2^{-t} \sum_{k=0}^{t} \binom{t}{k}_2 \right) \\
&\le 3\tfrac{5}{16} + \sum_{t=7}^{\infty} \frac{t+1}{2^t} \;=\; 3\tfrac{29}{64}.
\end{aligned}$$

   Hierbij worden de eerste 7 termen simpelweg berekend en voor de rest wordt een afschatting gemaakt, waarbij we gebruikmaken van $\binom{a}{b}_2 \le 1$.

2. Het bewijs gaat analoog aan (1). We berekenen de eerste 10 termen:

$$\begin{aligned}
E_3 &= \sum_{t=0}^{\infty} \left(2^{-t} \sum_{k=0}^{t} \binom{t}{k}_3 \right) \\
&= 1 + 1 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{13}{256} + \frac{1}{256} \\
&\quad + \sum_{t=10}^{\infty} \left(2^{-t} \sum_{k=0}^{t} \binom{t}{k}_3 \right) \\
&\le \tfrac{503}{128} + \sum_{t=10}^{\infty} \frac{2(t+1)}{2^t} \;=\; 3\tfrac{125}{128}.
\end{aligned}$$

3. We dienen te bewijzen dat er een C bestaat waarvoor er voor elke n een protocol bestaat met lengteverwachting $< C \log n$. Volgens het bovengenoemde protocol geldt

$$E_n = \sum_{t=0}^{\infty} \left(2^{-t} \sum_{k=0}^{t} \binom{t}{k}_n \right).$$

   We splitsen deze som in twee delen, namelijk

$$\sum_{t=0}^{y-1} \left(2^{-t} \sum_{k=0}^{t} \binom{t}{k}_n \right) \quad \text{en} \quad \textstyle\sum_{t=y}^{\infty} \left(2^{-t} \sum_{k=0}^{t} \binom{t}{k}_n \right).$$

   We zullen verderop y kiezen. In de eerste som maken we de afschatting $\binom{t}{k}_n \le \binom{t}{k}$ en in de tweede som $\binom{t}{k}_n \le n-1 < n$. Als we dit toepassen dan vinden we:

UWC
oplossingen

$$\begin{aligned}E_n &= \sum_{t=0}^{y-1}\sum_{k=0}^{t}\left(\binom{t}{k}_n \cdot 2^{-t}\right) + \sum_{t=y}^{\infty}\sum_{k=0}^{t}\left(\binom{t}{k}_n \cdot 2^{-t}\right)\\ &< \sum_{t=0}^{y-1} 2^{-t}\sum_{k=0}^{t}\binom{t}{k} + \sum_{t=y}^{\infty} 2^{-t}\sum_{k=0}^{t} n = \sum_{t=0}^{y-1} 1 + n\sum_{t=y}^{\infty}\frac{t+1}{2^t}\\ &= y + \frac{n}{2^y}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{t+y+1}{2^t} = y + \frac{ny}{2^y}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{1}{2^t} + \frac{n}{2^y}\left(\sum_{t=0}^{\infty}\frac{1}{2^t}\right)^2 = y + \frac{2ny+4n}{2^y}.\end{aligned}$$

Kies nu y zo dat $n \leq 2^y < 2n$. We vinden nu voor E_n de ruime afschatting:

$$E_n < y + \frac{2ny+4n}{2^y} \leq 3y + 4 \leq 4\log_2 n,$$

voor voldoend grote waarden van n.

4. De volgende oplossing maakt gebruik van het feit dat we vooraf niet weten hoe vals de munt is. Stel dat er een $n \geq 2$ en G te vinden zijn waarbij elk protocol binnen G worpen een winnaar onder n spelers aanwijst. Laat $p > \frac{1}{2}$. We veronderstellen nu dat de munt waarmee wordt geworpen nogal vals is, zo vals namelijk dat de kans op het werpen van M gelijk is aan $p^{\frac{1}{G}}$. De kans dat met deze munt G maal M wordt geworpen is nu $p > \frac{1}{2}$. Als de worp 'G maal M' wordt toegekend aan speler 1, dan heeft speler 1 meer dan kans $\frac{1}{2}$ om te winnen en is er geen sprake van een eerlijke loting. Als deze worp daarentegen aan geen van de spelers wordt toegekend hebben we na G worpen geen gegarandeerde winnaar.

Een slotopmerking: de rij

$$E_n = \sum_{t=0}^{\infty}\left(2^{-t}\sum_{k=0}^{t}\binom{t}{k}_n\right)$$

is niet monotoon stijgend. Een toename van n impliceert dus niet automatisch een een toename van de lengteverwachting. Zo is bijvoorbeeld $E_8 = 6.44472\ldots$, $E_9 = 6.36007\ldots$ en $E_{10} = 6.30093\ldots$

Uitslag 3e editie

De weging van de opgaven is 3 : 4 : 5.

	Naam	A	B	C	*Totaal*
1.	Herbert Beltman (Twente)	6	8	11	105
2.	Hendrik Hubrechts e.a. (Leuven)	8	8	8	96
3.	Filip De Smet (Gent)	8	8	6	86
4.	Bart Rodrigues e.a. (Leuven)	8	9	3	75
5.	Tom Claeys (Leuven)	8	7	3	67

Ladderstand Universitaire Wiskunde Competitie na vier ronden

We vermelden alleen de top 5. Voor de complete ladderstand zie de UWC-homepage.

	Naam	*Punten*
1.	Steven Lippens	256
2.	Filip De Smet	241
3.	Hendrik Hubrechts e.a.	191
4.	Joeri Van der Veken e.a.	185
5.	Herbert Beltman	177