Jan van de Craats
Koninklijke Militaire Academie
Postbus 90154, 4800 RG Breda
J.vd.Craats@mindef.nl

Floris Takens
Vakgroep Wiskunde, Universiteit Groningen
Postbus 800, 9700 AV Groningen
F.Takens@math.rug.nl

De juiste toon, de

Dit artikel is gebaseerd op een voordracht die werd gehouden tijdens de Nationale Wiskunde Dagen. Deze bijeenkomst werd georganiseerd door het Freudenthal Instituut op 2 en 3 februari 2001 te Noordwijkerhout en vond voor de zesde keer plaats. In het artikel worden muzikale en wiskundige achtergronden van de verschillende stemmingswijzen voor toetsinstrumenten belicht die in de loop der eeuwen in zwang zijn geweest.

De verdeling van het octaaf in twaalf gelijke delen, de zogenaamde *evenredigzwevende stemming*, wordt door velen als een soort muzikaal axioma gezien, een onontkoombaar natuurgegeven. Echter, die octaafverdeling is pas tegen het einde van de achttiende eeuw in de westerse muziek gemeengoed geworden als een compromissysteem voor gebruik bij instrumenten waarvan men de stemming tijdens het spelen niet kan beïnvloeden, zoals het clavecimbel, de piano of het orgel. Vóór die tijd en in sommige delen van Europa ook nog lang daarna, hanteerde men echter andere stemmingswijzen, bijvoorbeeld de zogenaamde *middentoonstemming* of de *stemming van Werckmeister*. Bespelers van authentieke barokinstrumenten zoals de traverso, een voorloper van de moderne dwarsfluit, worden hiermee geconfronteerd wanneer ze met een toetsinstrument samenspelen: in de moderne, evenredigzwevende stemming klinken veel samenklanken storend vals. Trouwens, ook bespelers van moderne blaas- en strijkinstrumenten hebben vaak met stemmingsproblemen te kampen wanneer ze met een piano samenspelen.

Tonen, boventonen en zwevingen

De tonen waaruit muziek is opgebouwd bereiken ons oor via luchttrillingen, dat wil zeggen fluctuaties in de luchtdruk. Aan elke toon kunnen we, naast de tijdsduur, drie aspecten onderscheiden: de *toonhoogte*, de *luidheid* en de *klankkleur* (het timbre). Maken we zo'n toon zichtbaar door de luchtdruk tegen de tijd uit te zetten, dan zien we een min of meer periodiek patroon (zie figuur 1). De toonhoogte correspondeert daarbij met de frequentie, de luidheid met de amplitude, en de klankkleur met de specifieke vorm van het golfpatroon dat zich telkens herhaalt. Tonen met dezelfde toonhoogte hebben dezelfde frequentie. Dat een toon A van 440 Hertz op een piano anders klinkt dan dezelfde toon op een viool of op een klarinet komt doordat de specifieke golfvorm bij de pianotoon anders is dan die bij de viool of de klarinet. In figuur 2 is een deel van de geluidscurve te zien van een toon C van 258 Hertz, gespeeld op een klarinet. Hier is de periodiciteit van de trilling heel goed zichtbaar.

Tonen worden voortgebracht door trillende voorwerpen. Zulke voorwerpen kunnen meestal van nature op verschillende wijzen en met verschillende frequenties trillen. Bij gespannen snaren (denk aan de viool, de gitaar of de piano) of bij luchtkolommen in holle pijpen (bijvoorbeeld blaasinstrumenten, het orgel of de menselijke stem) vormen de frequenties van die afzonderlijke trillingsmogelijkheden in goede benadering de eenvoudige verhoudingsreeks $1:2:3:4:5:\ldots$ De laagste frequentie heet de grondtoon, de andere heten de boventonen. De frequentie van de n-de boventoon is n maal de frequentie van de grondtoon, die dus ook de *eerste* boventoon genoemd mag worden (hoewel dat natuurlijk niet gebruikelijk is). In het algemeen laat een trillend voorwerp tegelijk met de grondtoon een combinatie van boventonen horen: de boventonenmix bepaalt de klankkleur. In mathematisch-fysische zin houdt dit nauw verband met de van J. B. J. de Fourier (1768-1830) afkomstige observatie dat men elk periodiek signaal kan schrijven als een superpositie van harmonische trillingen (dat wil zeggen sinusoïden) met frequenties die gehele veelvouden zijn van de frequentie van het signaal.

Voor de stemmingsproblematiek is verder het verschijnsel *zwevingen* van belang. Wanneer men tegelijkertijd twee tonen laat klinken met frequenties die weinig verschillen, neemt men zwevingen waar: een afwisselend aanzwellen en afnemen van het geluid in een frequentie die overeenkomt met de verschilfrequentie van de beide tonen.Dit meestal als onaangenaam ervaren fenomeen maakt dat we zo'n samenklank dan als 'vals' of 'onzuiver' bestempelen, en er zo mogelijk naar streven die onzuiverheid op te heffen door de frequenties van de beide tonen precies gelijk te maken.

Men kan het optreden van zwevingen als volgt verklaren. Een harmonische trilling wordt gegeven door een formule van de vorm $f(t) = A\cos(2\pi\nu t - \phi)$. Hierin is A de amplitude, ν de frequentie

juiste stemming

en ϕ de fasehoek. De superpositie van twee van die signalen kan men schrijven als

$$\begin{aligned} f_1(t)+f_2(t) &= A_1\cos(2\pi\nu_1 t-\phi_1)+A_2\cos(2\pi\nu_2 t-\phi_2)\\ &= (A_1-A_2)\cos(2\pi\nu_1 t-\phi_1)+\\ &\quad +2A_2\cos\left(2\pi\tfrac{\nu_1-\nu_2}{2}t-\tfrac{\phi_1-\phi_2}{2}\right)\cos\left(2\pi\tfrac{\nu_1+\nu_2}{2}t-\tfrac{\phi_1+\phi_2}{2}\right). \end{aligned}$$

We hebben hierbij verondersteld dat $A_1 \geq A_2 > 0$. Als $\nu_1 \neq \nu_2$ is dit geen harmonische trilling, maar wanneer de frequenties ν_1 en ν_2 dicht bij elkaar liggen, kan men de uitdrukking op de laatste regel opvatten als een hoogfrequent signaal met frequentie $(\nu_1+\nu_2)/2$ dat vermenigvuldigd wordt met het laagfrequente signaal

$$2A_2\cos\left(2\pi\frac{\nu_1-\nu_2}{2}t-\frac{\phi_1-\phi_2}{2}\right)$$

waarvan de absolute waarde fluctueert met een frequentie van $|\nu_1-\nu_2|$ Hertz. Het resultaat is een hoogfrequent signaal dat $|\nu_1-\nu_2|$ maal per seconde aanzwelt en weer afneemt. We zien overigens dat de term op de laatste regel verwaarloosbaar is als $A_1 >> A_2$, dat wil zeggen wanneer de ene toon veel luider is dan de andere toon. Er zijn in dat geval dan ook nauwelijks zwevingen te horen.

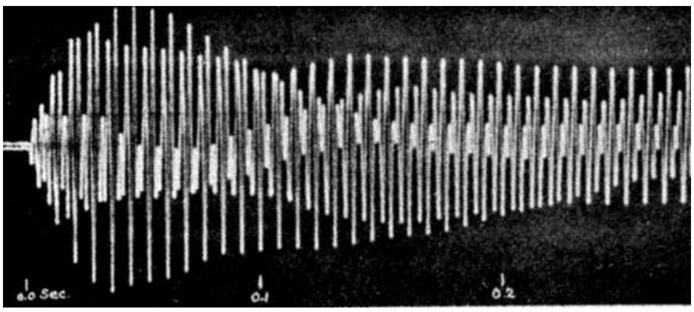
In figuur 7, waarvan de details ter plaatse worden toegelicht, is sprake van de superpositie van twee harmonische trillingen met frequenties van 880 Hertz en 869.1 Hertz en amplituden die dezelfde orde van grootte bezitten. De verschilfrequentie bedraagt dan 10.9 Hertz, en we zien dat de hoogfrequente trillingen elkaar inderdaad bijna 11 keer per seconde maximaal versterken ('in fase zijn') en even zo vaak maximaal uitdoven ('in tegenfase zijn').

Intervallen en toonsystemen

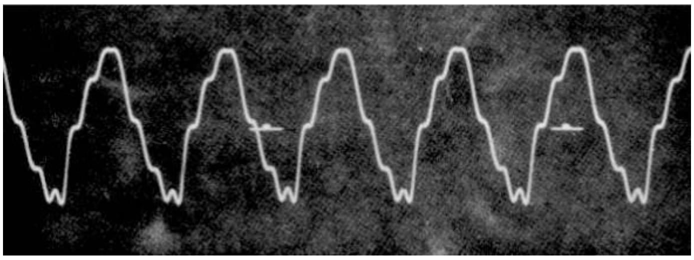
Het is een ervaringsfeit dat twee tonen harmonieus samenklinken als ze een eenvoudige frequentieverhouding hebben. In de muziektheorie hebben zulke muzikale intervallen speciale namen. Zo noemt men een interval met een frequentieverhouding $1:2$ een octaaf. Dit is het belangrijkste interval in de muziek: twee tonen die samen een octaaf vormen, versmelten zo zeer met elkaar dat men ze nog maar nauwelijks van elkaar kan onderscheiden. Als mannen en vrouwen samen zingen, zullen de vrouwen in het algemeen een octaaf hoger zingen, terwijl ze het idee hebben dat ze toch 'hetzelfde' zingen. Tonen die een octaaf verschillen, geeft men in de muziek ook met dezelfde naam aan; zo heten de tonen met frequentie $\ldots, 55, 110, 220, 440, 880, 1760, 3520, \ldots$ Hz allemaal A.

Na het octaaf zou men wellicht het interval met frequentieverhouding $1:3$ willen behandelen, maar die tonen liggen heel ver uit elkaar: de ongeoefende menselijke stem heeft al moeite om zo'n interval te omvatten. Gezien het bovenstaande ligt het daarom meer voor de hand om de laagste toon een octaaf omhoog te halen, waardoor het interval $2:3$ ontstaat, de *kwint*. Haalt men de laagste toon nóg een octaaf omhoog, dan ontstaat de *kwart* met frequentieverhouding $3:4$.

Evenzo is het volgende belangrijke muzikale interval niet $1:5$ of $2:5$, maar de *grote terts* met frequentieverhouding $4:5$. Voor de muziektheorie zijn hiermee de belangrijkste bouwstenen voor toonsystemen gegeven: het octaaf, de kwint en de grote terts. Een toonsysteem wordt daarbij gevormd door op een systematische wijze 'goed bij elkaar passende' tonen bij elkaar te nemen. De algemene conventie in de muziek is daarbij dat men met elke toon ook automatisch alle octaaftransposities van die toon in het systeem opneemt. We zullen hieronder een aantal voorbeelden van toonsystemen behandelen.



Figuur 1 Grafische weergave van een pianotoon C van 129 Hz. Duidelijk is het aanslagverschijnsel te zien waarbij de frequentie van de trilling zich na het moment van aanslaan snel stabiliseert terwijl de amplitude sterk toeneemt om daarna geleidelijk af te nemen. Ook de klankkleur, dat wil zeggen de vorm van de golf, verandert daarbij enigszins. (De illustratie is afkomstig uit [5], pagina 95)



Figuur 2 Grafische weergave van een klarinettoon C van 258 Hz. (Illustratie afkomstig uit [5], pagina 150)

Systemen gebaseerd op de kwintenrij

Door zes kwinten te stapelen krijgt men zeven tonen die samen met al hun octaaftransposities het *Pythagoras-toonsysteem* vormen. In schema, met de in de muziektheorie gebruikelijke toonnamen:

F – C – G – D – A – E – B

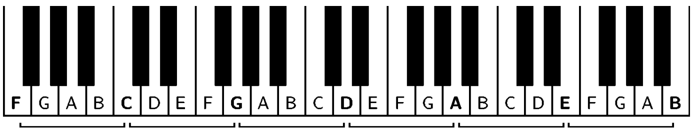
Veel instrumenten worden gestemd volgens een deel van deze kwintenrij, bijvoorbeeld de viool (G–D–A–E) en de cello (C–G–D–A). Ook toetsinstrumenten werden vroeger zo gestemd: zeven tonen per octaaf, gestemd volgens deze kwintenrij. We vinden ze ook op de witte toetsen van de piano. In figuur 3 zijn de zes gestapelde kwinten gemarkeerd. Die kwinten worden in het Pythagoras-systeem dus zuiver gestemd; de andere tonen kunnen daaruit via octaaftransposities afgeleid worden: gelijknamige tonen verschillen een geheel aantal (zuiver gestemde) octaven. Overigens, bij de moderne piano worden de kwinten om redenen die later zullen worden uitgelegd, nu juist *niet* helemaal zuiver gestemd; het verschil is echter heel gering.

In figuur 3 is tevens te zien hoe de verschillende muzikale intervallen aan hun naam komen: een kwint beslaat 5 witte toetsen, een octaaf acht. Een belangrijke opmerking is verder dat het Pythagoras-toonsysteem niet cyclisch is: de uiteinden B en F van de bovenstaande kwintenrij, die op het klavier na octaaftransposities ook een kwint lijken te vormen, beslaan in werkelijkheid een interval dat veel kleiner is.

Toen men behoefte kreeg aan uitbreiding van dit toonsysteem, werd de kwintenrij naar beide kanten voortgezet:

$\cdots$ Es – Bes – F – C – G – D – A – E – B – Fis – Cis – Gis $\cdots$

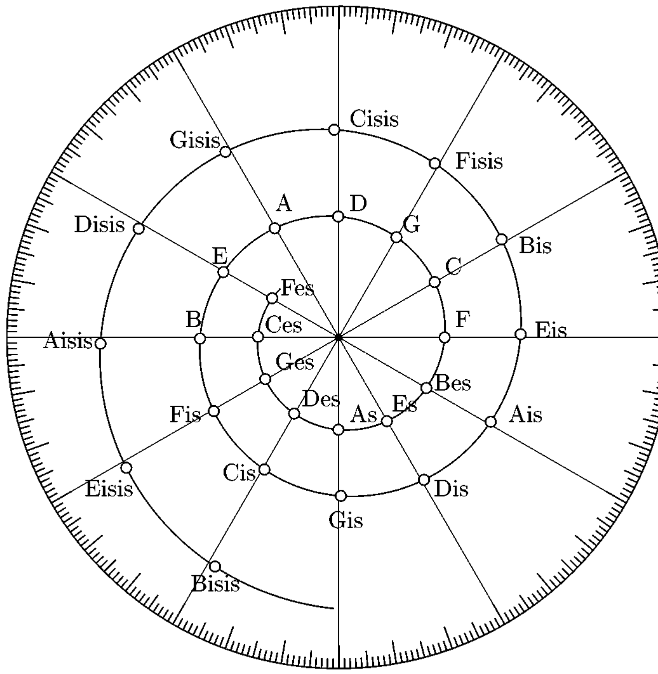
Een verdere uitbreiding naar rechts van de kwintenrij geeft een toon Dis een kwint boven de Gis die vrijwel gelijk blijkt aan de meest linkse toon uit deze rij, de Es, op zeven octaaftransposities na. Dat komt omdat twaalf kwinten omhoog vrijwel gelijk is aan zeven octaven: $(3/2)^{12} \approx 129.7463379 \approx 2^7 = 128$. Dat is duidelijk te zien in figuur 4, waar de *kwintenspiraal* naar beide zijden nog een eind verder is doorgetekend. Eén volledige rondgang correspondeert daar met een stijging over zeven octaven. Aangezien muzikale intervallen gekarakteriseerd worden door frequentie*verhoudingen*, ligt het voor de hand om met een *logaritmische schaal* te werken: gelijke muzikale intervallen corresponderen dan met gelijke toenames langs die schaal. In figuur 4 meet die schaal de toename van het argument in graden. Langs de rand is die schaalverdeling aangegeven.



Figuur 3 De tonen van het toonsysteem van Pythagoras op het klavier. De zes aangegeven kwinten worden in dit systeem zuiver gestemd.

In de spiraal beslaat een volledige rondgang zeven octaven, dus één octaaf meet $360/7$ graden. Een kwint (frequentieverhouding $2:3$) meet dan $\log(3/2)/\log(2) \times 360/7 \approx 30.083786$ graden, want het is een logaritmische schaal. Het grondtal van de logaritme kunnen we vrij kiezen; het ligt hier voor de hand om 2 als grondtal te nemen, zodat $\log(2) = 1$ wordt. De spaken in de spiraal verdelen de zeven octaven in twaalf precies even grote taartpunten van 30 graden. Een zuivere kwint is slechts weinig groter dan zo'n taartpunt, maar door accumulatie ontstaat bij een volledige rondgang toch een verschil van ruim 1 graad.

De kwintenspiraal laat ons de systematiek in de naamgeving van tonen zien: de rij F–C–G–D–A–E–B wordt telkens herhaald, met achtervoegsels *-is, -isis,* ... aan de rechterkant, en *-es, -eses,* ... aan de linkerkant. In de muzikale praktijk worden dubbele achtervoegsel slechts zelden gebruikt, en drievoudige en hogere achtervoegsels nooit, maar het systeem laat dit in principe wel allemaal toe.

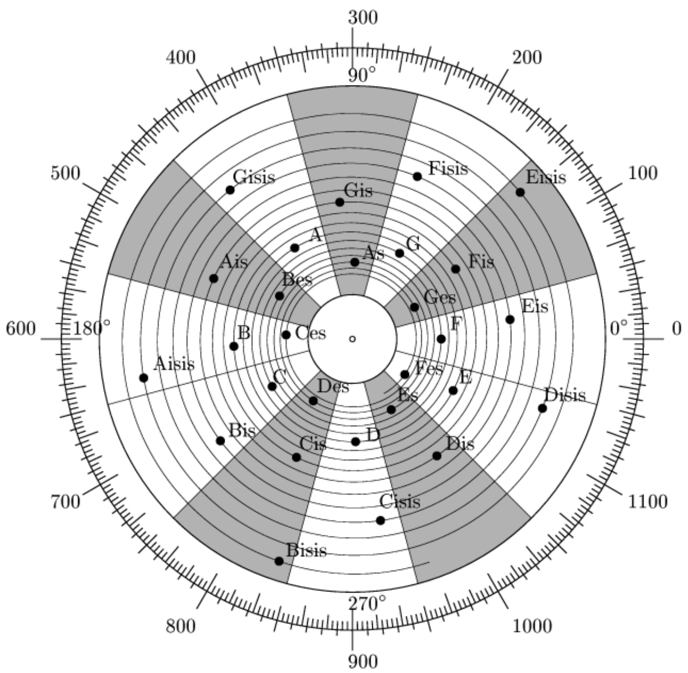


Figuur 4 De kwintenspiraal over zeven octaven. Langs de rand een schaalverdeling in graden. Eén rondgang langs de spiraal (360 graden) correspondeert met een stijging over zeven octaven. Een stijging over een kwint meet 30.083786 graden. De spaken zijn om de 30 graden getekend.

Figuur 5 laat de kwintenspiraal nog op een andere manier zien. Nu correspondeert een volledige rondgang met één octaaf. Ook hierbij is ter oriëntatie zo'n octaaf in twaalf gelijke delen verdeeld, en muziekkenners zullen in het achterliggende zwart-witpatroon de witte en de zwarte toetsen van de piano herkennen. Nu correspondeert de kwint met een hoek van $\log_2(3/2) \times 360 \approx 210.5865003$ graden.

Langs de rand van figuur 5 zijn twee schaalverdelingen aangebracht: een verdeling in graden (binnenkant) en een verdeling in *cents*, een door de Britse musicoloog A.J. Ellis ingevoerde eenheid om intervallen te meten. Ellis verdeelde het octaaf in 1200 cent, zodat bij een onderverdeling van het octaaf in twaalf gelijke delen elk deel 100 cent toebedeeld krijgt.

Meten in figuur 5 is eenvoudig: leg een liniaal langs de betreffende



Figuur 5 De kwintenspiraal, maar nu veel 'strakker opgewonden'. Eén volledige rondgang correspondeert nu met één octaaf, en niet met zeven octaven zoals in figuur 4. Langs de cirkelrand is een schaalverdeling getekend in graden (binnenkant) en cents (buitenkant) met 10 cent per schaaldeel. Een stijging over een kwint correspondeert nu met een hoektoename van 210.5865 graden, oftewel 701.9550 cent.

toon en het middelpunt van de cirkel, en lees de schaalwaarde (in cents of in graden) op de rand af. Het nulpunt van de beide schalen is hier, min of meer willekeurig, bij de toon F gekozen. In onze berekeningen met betrekking tot intervallen gaat het altijd over *verschillen*, dus de keuze van het nulpunt van de schalen is niet relevant. We zien dat 360 graden in onze figuur correspondeert met 1200 cent, dat wil zeggen dat 3 graden overeenkomt met 10 cent. De streepjes van de schaalverdeling langs de buitenrand zijn om de 10 cent gezet.

Bij het stemmen van instrumenten, zelfs voor professionele doeleinden, wordt een nauwkeurigheid van 1, hooguit 2 cent als bevredigend ervaren. Een nauwkeuriger schaalverdeling heeft dus voor de muzikale praktijk nauwelijks zin. Bij onze berekeningen zullen we echter wel een grotere nauwkeurigheid gebruiken om accumulatiefouten te vermijden.

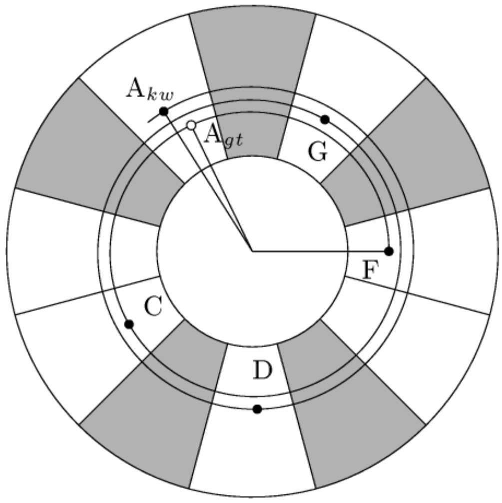
In de evenredigzwevende stemming wordt het octaaf in 12 gelijke delen van 100 cent (30 graden in onze figuur) verdeeld. Die delen zijn gelijk *in logaritmische zin*, dat wil zeggen dat de tonen van zulke deelintervallen dezelfde frequentieverhouding hebben. Men noemt zo'n deelinterval van 100 cent een *halve-toonsafstand*. De stemming heet *evenredigzwevend* omdat er bij de kwint, die nu 700 cent meet in plaats van de zuivere waarden van 701.9550 cent, zwevingen optreden die in aantal evenredig zijn met de frequenties van de betreffende tonen: neemt men de kwint een octaaf hoger dan treden er twee maal zoveel zwevingen per seconde op.

Valse grote tertsen

Met slechts twee muzikale bouwstenen, het octaaf en de kwint, is hierboven via de kwintenspiraal een fraai toonsysteem geschapen met een in principe onbeperkt aantal tonen binnen elk octaaf, allemaal geconstrueerd via zuivere kwint- en octaafintervallen. Toch vertoont dit systeem een belangrijk nadeel, zelfs als men zich tot de zeven tonen van het Pythagoras-systeem zou beperken: de 'grote tertsen' F–A, C–E en G–B klinken vals, dat wil zeggen dat ze hinderlijke zwevingen laten horen wanneer men de beide tonen waaruit zo'n interval bestaat, tegelijkertijd laat klinken. Althans, wanneer men tonen heeft die rijk zijn aan boventonen. De zwevingen worden namelijk veroorzaakt door het feit dat de vijfde boventoon van de laagste toon bijna dezelfde frequentie heeft als de vierde boventoon van de hoogste. Het samen klinken van die twee boventonen veroorzaakt de zwevingen.

Overigens, iets dergelijks gebeurt ook bij de zwevingen die optreden bij de verkleinde kwinten in de evenredigzwevende twaalftoonsstemming (zo'n kwint meet 700 cent in plaats van de correcte waarde van 701.9550 cent die hoort bij een frequentieverhouding van $2 : 3$). In die stemming worden de zwevingen veroorzaakt door het bijna gelijk zijn van de derde boventoon van de laagste toon van het interval, en de tweede boventoon van de hoogste toon.

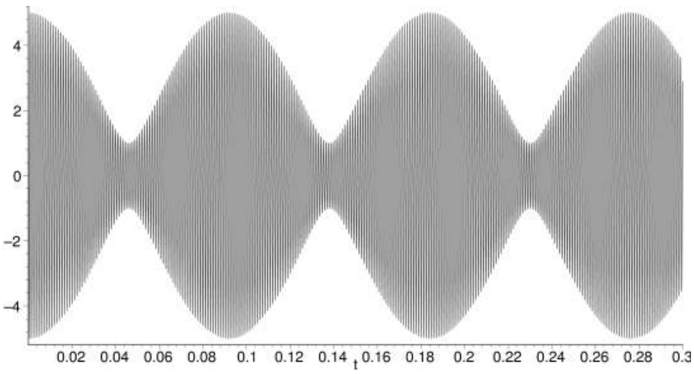
We kunnen de valsheid van de grote tertsen in de zuivere kwintenrij aan de hand van een eenvoudige berekening laten zien. Neem bijvoorbeeld de grote terts F–A. In het Pythagoras-systeem is het interval F–A opgebouwd uit vier kwinten: F–C–G–D–A, en dus is de frequentieverhouding ervan $2^4 : 3^4 = 16 : 81$, of, als we de F twee octaven omhoog halen, $64 : 81$. Die verhouding is echter vrijwel gelijk aan de zuivere grote tertsverhouding $4 : 5 = 64 : 80$. Bij een zuivere grote terts F–A_{gt} klinkt de toon A_{gt} dus merkbaar lager dan de A_{kw} die uit de kwintenrij komt. figuur 6 illustreert dit. De zuivere grote terts meet $\log_2(5/4)\times 360 \approx 115.894$ graden (386.314 cent), terwijl de grote terts uit de kwintenrij ongeveer 122.346 graden meet (407.820 cent). Een verschil van ruim zes graden (21.5 cent) in onze figuur, meer dan het vijfde deel van een halve-toonsafstand!



Figuur 6 De valse 'grote terts' F–A_{kw} en de zuivere grote terts F–A_{gt}.

Wie een scherp gehoor heeft, kan het verschil tussen die beide tonen A opmerken wanneer een A_{kw} in een grote-tertsinterval F–A in een melodie optreedt. Maar storend is de A_{kw} vooral wanneer die, zoals in harmonische muziek, *tegelijkertijd* met de toon F klinkt, en zo een valse grote terts F–A_{kw} veroorzaakt. De vijfde boventoon van de F en de vierde boventoon van de A_{kw} vormen dan namelijk een interval met frequentieverhouding $80 : 81$, en dat resulteert in zwevingen. Wanneer de toon A een frequentie van 220 Hz heeft, hoort men elf zwevingen per seconde, een octaaf hoger zijn het er twee maal zo veel, en een octaaf lager twee maal zo weinig (zie figuur 7).

Zulke zwevingen zijn goed hoorbaar wanneer men een clavecimbel of een orgel volgens de kwintenrij gestemd heeft (of volgens de evenredigzwevende stemming, die daar slechts weinig van verschilt).



Figuur 7 De superpositie van de vijfde boventoon van de F en de vierde boventoon van de A_{kw} in de grote terts F–A_{kw} veroorzaakt zwevingen. Hier is voor A_{kw} een toon van 220 Hz genomen, zodat de betreffende boventonen 880 Hz en 869.1 Hz tellen. Er treden dus (bijna) elf zwevingen per seconde op.

Bij een piano zijn ze echter nauwelijks waar te nemen, en dus ook volstrekt niet storend, enerzijds omdat een pianotoon snel uitdempt, maar anderzijds vooral omdat een pianotoon arm aan boventonen is (ook een clavecimbeltoon dempt snel uit, maar daar zijn de zwevingen door de rijke boventonenstructuur wél storend).

De zwevingen die optraden bij de volgens een zuivere kwintenrij gestemde grote terts brachten de middeleeuwse muziektheoretici ertoe om de grote terts als een vals interval te beschouwen en het gebruik ervan af te keuren. Maar de musici lieten zich de wet niet voorschrijven, en ontdekten al snel dat er met grote tertsen wel degelijk fraaie samenklanken geproduceerd konden worden, althans wanneer men ze zuiver, dat wil zeggen in de verhouding $4:5$ intoneerde. De theorie moest dus worden aangepast. Dat gebeurde onder andere door Gioseffo Zarlino (1517-1590), en later ook door Jean Philippe Rameau (1683-1764) en Leonhard Euler (1707-1783), die naast de kwint en het octaaf ook de grote terts als bouwsteen voor toonsystemen opnamen. Maar hoe moest men dan orgels en andere toetsinstrumenten stemmen? De A_{kw} inruilen voor de A_{gt} gaf als probleem dat er dan weer andere valse intervallen ontstonden, bijvoorbeeld de nu veel te klein geworden 'kwint' D–A_{gt}. Reeds in zestiende eeuw bedacht men een compromis-oplossing: de *middentoonstemming*.

De middentoonstemming

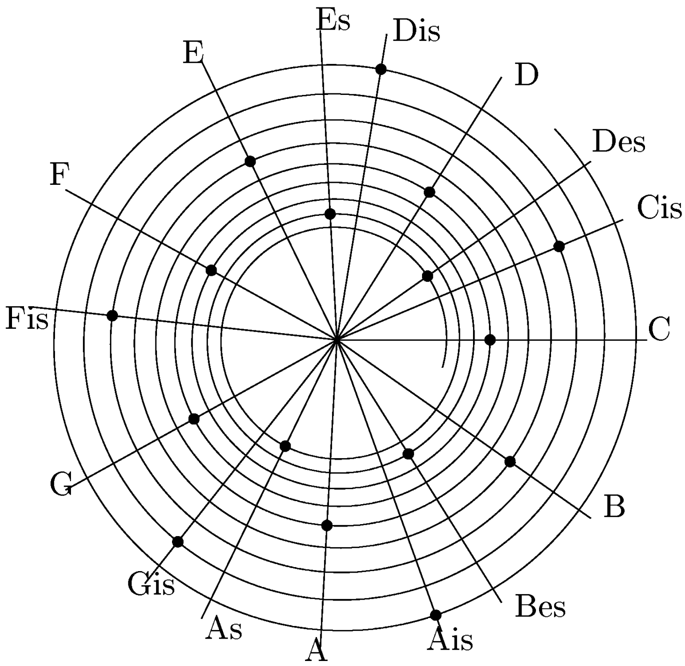
Het idee was simpel en voor de hand liggend: maak alle kwinten zó veel kleiner, dat vier kwinten samen precies een grote terts opleveren. Het verschil tussen A_{kw} en A_{gt} moet dus in vier gelijke stukken worden verdeeld, en elke zuivere kwint wordt met dit bedrag verminderd. Omdat die correctie zo klein is, storen de resulterende zwevingen zelfs een scherp gehoor veel minder dan die van de valse grote tertsen bij de zuivere kwintenrij. De op die manier gecorrigeerde kwintenrij (in het Duits sprak men over 'temperierte Quinten') is als grondslag voor stemmingssystemen tot ver in de achttiende eeuw in gebruik gebleven. We laten hier een iets langer stuk van die 'getempereerde' kwintenrij zien:

– Des – As – Es – Bes – F – C – G – D – A – E – B – Fis – Cis – Gis – Dis – Ais –

In deze rij zijn de grote tertsen Des–F, As–C, . . ., E–Gis, B–Dis, Fis–Ais dus allemaal zuiver. In figuur 8 is diezelfde rij als een spiraal getekend; een volledige omloop correspondeert, net als in de figuren figuur 5 en figuur 6, met één octaaf.

De naam middentoonstemming komt voort uit de manier waarop men haar realiseert: stem eerst via zuivere kwinten en kwarten binnen één octaaf de tonen F, C, G, D, en via een zuivere grote terts F–A de toon A. Verklein vervolgens de vier kwinten allemaal zo veel, dat de toon G (de middentoon) precies tussen de F en de A terecht komt. Via zuivere grote tertsen kan men daarna de andere tonen stemmen.

Ook de middentoonspiraal is weer een 'oneindig' toonsysteem: je kunt de spiraal naar beide zijden onbeperkt voortzetten. Er ontstaan dan telkens weer nieuwe tonen. In figuur 8 zijn zestien tonen getekend, van Des tot en met Ais. Bij klavieren met twaalf tonen per octaaf kiest men uit de middentoonspiraal een segment van twaalf opvolgende tonen.



Figuur 8 De middentoonspiraal

Na twaalf van zulke getempereerde kwintenstappen is men echter veel verder verwijderd van de zeven octaven dan bij de zuivere kwintenrij. Dat is gemakkelijk na te rekenen. Vier gestapelde middentoonskwinten vormen samen een grote terts plus twee octaven, dus een verhouding van $1:5$. Een opeenstapeling van twaalf van die kwinten levert dus de verhouding $1:5^3 = 1:125$. Dat is minder dan zeven octaven, want $1:2^7 = 1:128$. Ook in figuur 8 zijn de verschillen duidelijk te zien: het verschil tussen Cis en Des, Gis en As, Dis en Es, Ais en Bes, die allemaal twaalf middentoonskwinten van elkaar verwijderd zijn, bedraagt $\log_2(128/125) \times 360 \approx 12.31765752$ graden (41.059 cent), ongeveer het vijfde deel van een hele-toonsafstand. Bovendien gaat de afwijking nu de andere kant op, met als gevolg dat in de middentoonstemming de Cis juist *lager* klinkt dan de Des, et cetera, terwijl dat bij de zuivere kwintenstemming andersom is.

Zoals gezegd, wanneer men slechts de beschikking heeft over twaalf tonen per octaaf, zoals bij een orgel of een clavecimbel, dan moet men kiezen welk segment van twaalf opvolgende tonen uit de middentoonspiraal men gebruikt. In de oude muziek nam men vaak het segment

Es – Bes – F – C – G – D – A – E – B – Fis – Cis – Gis

Wil men op een zodanig gestemd klavier een toon As spelen, dan zal men daarvoor de Gis gebruiken. De 'kwint' As–Es wordt dan echter het uitermate valse interval Gis–Es (655.520 cent, tegen 701.955 cent voor de zuivere kwint, dus bijna een kwart toon te klein). De zwevingen daarvan vergeleek men destijds met het huilen van een wolf, vandaar de term 'wolfskwint'. Ook de grote tertsen Des–F, As–C, B–Dis en Fis–Ais, die men op een zodanig gestemd klavier moet vervangen door respectievelijk Cis–F, Gis–C, B–Es en Fis–Bes, klinken storend vals (427.373 cent, tegen 386.3145 cent voor de zuivere grote terts). Zulke intervallen en alle akkoorden die men daarmee maken kan, moet men dus in de middentoonstemming zoveel mogelijk vermijden. Dat legt grote beperkingen op aan de toonsoorten die men op zo'n instrument gebruiken kan.

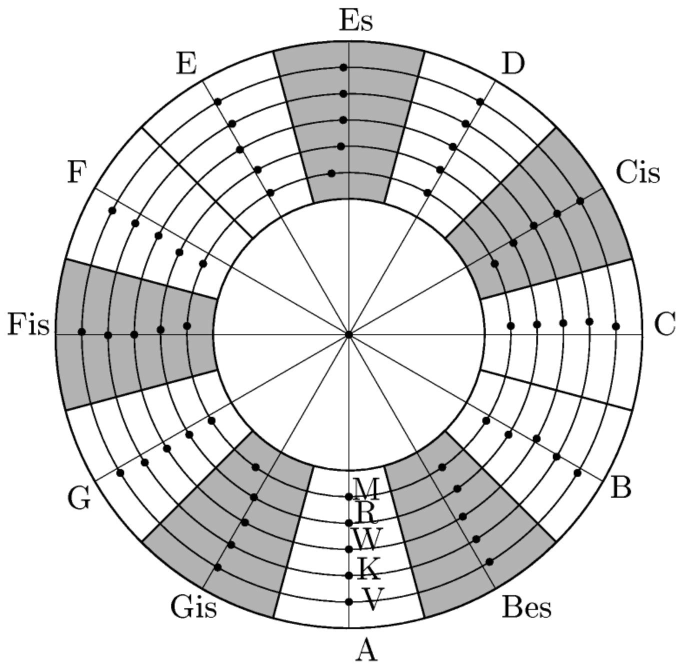
Andere stemmingswijzen

Het waren met name orgelbouwers die met dit probleem worstelden: bij een spinet, virginaal, clavichord of clavecimbel kan men immers zonder veel bezwaar enige snaren bijstemmen om aldus de middentoonstemming aan de toonsoort aan te passen waarin men spelen wil. Juist orgelbouwers, maar ook muziektheoretici en componisten zoals Rameau, hebben daarom gezocht naar stemmingswijzen die het musiceren in veel meer toonsoorten mogelijk maakten, zonder dat de verworvenheden van de zuivere grote tertsen te zeer werden gecompromitteerd. Vaak verkreeg men zulke oplossingen via combinaties van zuivere en middentoonskwinten. De auteurs Fred Bettenhaussen, Frits en Hans van Krevelen behandelen in hun boek *Clavecimbel, clavichord en pianoforte — stemmen, stemmingen en onderhoud* [2] naast de middentoonstemming nog vier andere stemmingen: die van Rameau (1725), Werckmeister III (1691), Kirnberger III (1779) en Valotti (1779). Overigens, in de zestiende, de zeventiende en de achttiende eeuw zijn er nog vele tientallen andere stemmingsvarianten gepubliceerd. Een uitgebreid overzicht daarvan is te vinden in J. Murray Barbour, *Tuning and Temperament* [1].

Het is vermeldenswaard dat Werckmeister zijn stemming als 'wohltemperiert' omschrijft, 'goed getempereerd', hetgeen grond zou kunnen geven aan het vermoeden dat Johann Sebastian Bach zijn beide verzamelingen preludes en fuga's 'Das wohltemperierte Klavier' voor een dergelijke stemming bedoeld heeft. In elk geval wordt de vaak gehoorde bewering dat Bach dit werk voor de evenredigzwevende stemming geschreven heeft, door even zovele autoriteiten tegengesproken. Volledige eenstemmigheid hierover lijkt onder de deskundigen niet te bestaan.

	M	R	W	K	V
Es	21	8	5	4	4
Bes	17	17	7	6	6
F	14	14	9	8	8
C	10	10	10	10	6
G	7	7	7	7	4
D	3	3	3	3	2
A	0	0	0	0	0
E	−3	−3	2	−3	−2
B	−7	−7	3	−1	−4
Fis	−10	−5	0	0	−2
Cis	−14	−3	2	0	0
Gis	−17	−1	3	2	2

Tabel 1 Afwijkingen van de evenredigzwevende stemming in cents voor vijf onevenredige stemmingen: de middentoonstemming (M), Rameau (R), Werckmeister III (W), Kirnberger III (K) en Valotti (V). De stemmingen zijn allemaal genormeerd op de toon A.

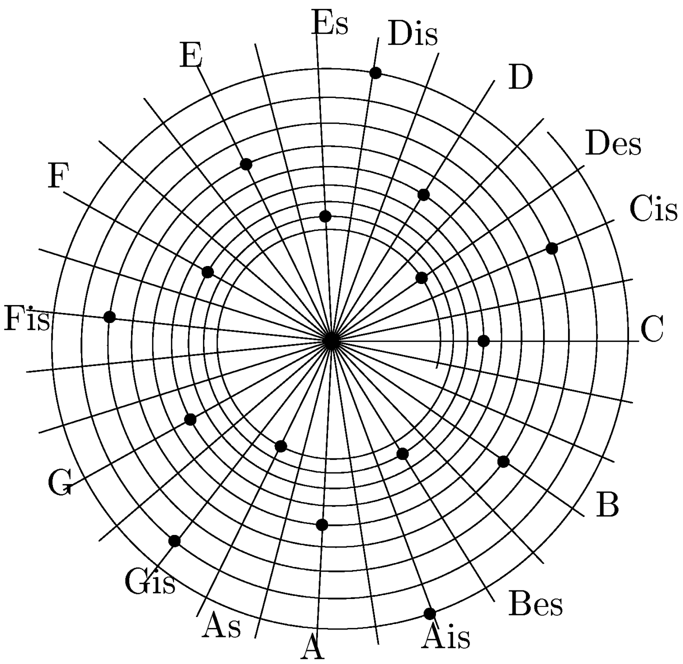


Figuur 9 De vijf onevenredigzwevende stemmingen van tabel 1

Hieronder vatten we de gegevens over de vier genoemde stemmingen samen; voor meer bijzonderheden en aanwijzingen hoe men zo'n stemming daadwerkelijk kan realiseren, verwijzen we naar de geciteerde boeken. De auteurs daarvan meten, zoals zo veel muziektheoretici, muzikale intervallen in cents en wij zullen dat hier ook doen. We brengen daarvoor in herinnering dat in onze figuren 5 tot en met 9 een bedrag van 10 cent overeenkomt met een hoek van 3 graden. Zo meet een octaaf 1200 cent, een zuivere kwint 701.9550 cent en een middentoonskwint 696.5784 cent. Een zuivere grote terts meet 386.3137 cent. In de evenredigzwevende stemming, die het octaaf in twaalf gelijke delen verdeelt, meet elke halve-toonsafstand 100 cent, de 'kwint' 700 cent en de 'grote terts' 400 cent.

1. *Rameau (1725)*
   Zuivere kwinten op B, Fis en Cis, middentoonkwinten (696.5784 cent) op Bes, F, C, G, D, A, E, 'overmatige kwinten' (709.0430 cent) op Gis en Es.
2. *Werckmeister III (1691)*
   Vrijwel zuivere kwinten (701.7108 cent) op Es, Bes, F, A, E, Fis, Cis, Gis, middentoonkwinten (696.5784 cent) op C, G, D en B.
3. *Kirnberger III (1779)*
   Zuivere kwinten op Es, Bes, F, E, B, Cis, Gis, evenredig zwevende kwint (700 cent) op Fis, middentoonkwinten (696.5784 cent) op C, G, D en A. Samen is dit een vrijwel gesloten kwintencirkel; het verschil bedraagt minder dan 0.002 cent
4. *Valotti (1779)*
   Zuivere kwinten op Es, Bes, B, Fis, Cis, Gis, verkleinde kwinten (698.0450 cent) op F, C, G, D, A, E.

In tabel 1 geven we voor deze stemmingen de afwijkingen van de evenredig zwevende stemming, afgerond op gehele cents. Achtereenvolgens: de middentoonstemming (M), Rameau (R), Werckmeister (W), Kirnberger (K) en Valotti (V). Als referentietoon is de toon A gekozen. Die kan men bijvoorbeeld op de thans gebruikelijke toonhoogte van 440 Hz fixeren, of naar believen op een andere toonhoogte.



Figuur 10 De middentoonspiraal en het 31-toonssysteem van Huygens

Opmerkelijk is het feit dat de tabel laat zien dat de drie laatste stemmingen allemaal slechts weinig afwijken van de evenredigzwevende stemming, die uiteindelijk het pleit gewonnen heeft, ondanks de onzuivere tertsen. Dit verklaart mede dat men in deze stemmingen reeds 'alle' toonsoorten kon gebruiken zonder dat er hinderlijke wolfskwinten opdoken. En het zou ook kunnen betekenen dat 'Das wohltemperierte Klavier' van Bach in de thans gebruikelijke evenredigzwevende stemming op het punt van de stemming nauwelijks anders klinkt dan het in Bachs oren geklonken moet hebben.

In figuur 9 zijn de vijf onevenredigzwevende stemmingen nog eens in een cirkeldiagram weergegeven. Ook daarin is te zien hoe gering de afwijkingen van de laatste drie stemmingen zijn van de evenredigzwevende stemming, die overeenkomt met de twaalf spaken van het wiel.

De evenredigzwevende stemming als winnaar

Men kan twee ontwikkelingen in de muziekgeschiedenis aanwijzen als oorzaak voor het verdwijnen van de verschillende onevenredigzwevende stemmingen en de eindoverwinning van de octaafverdeling in twaalf gelijke delen als stemmingswijze voor instrumenten met twaalf tonen per octaaf, ondanks de valse grote tertsen die in deze stemming optreden.

De eerste is het feit dat componisten bij langere stukken steeds vaker gingen *moduleren*, dat wil zeggen dat zij het tonale centrum, en daarmee de gehele tonenvoorraad, tijdelijk verschoven, bijvoorbeeld een kwint omhoog of een kwint omlaag. Zo is het in de zogenaamde klassieke sonatevorm gebruikelijk dat de tweede themagroep 'in de dominant' staat, dat wil zeggen dat het tonale centrum tijdelijk een kwint omhoog schuift. In de middentoonstemming kan dat problemen geven: bepaalde samenklanken die in de centrale toonsoort goed klinken, bevatten na de modulatie een wolfskwint of een valse grote terts. Nog veel erger wordt dat probleem bij modulaties over een grote terts, die incidenteel bij Mozart, veel vaker nog bij Beethoven, en in vrijwel alle composities van Schubert voorkomen, dikwijls met een verrassend en ontroerend muzikaal effect. Latere romantische componisten zoals Liszt, Wagner en Franck, stapelen voortdurend modulatie op modulatie. Dit proces bevorderde de acceptatie van de evenredigzwevende octaafverdeling, waarin alle toonsoorten 'even vals' klinken.

De tweede ontwikkeling die hier sterk aan bijdroeg was het feit dat op de piano, die in de negentiende eeuw het dominerende muziekinstrument werd — bijna alle grote componisten waren ook goede pianisten en er is geen muziekinstrument met een rijker repertoire aan onbetwiste meesterwerken — de valse grote tertsen nauwelijks storend zijn omdat een pianotoon betrekkelijk arm is aan boventonen. De enigen die echt last van stemmingsproblemen bleven houden, waren blazers en strijkers die met een piano samenspeelden. Zij werden, en worden nog steeds, voortdurend geconfronteerd met conflicten tussen de 'zuivere' intervallen, waaraan ze gewend zijn als ze alleen of met 'soortgenoten' spelen, en de daarvan afwijkende 'valse' tonen van de evenredigzwevende stemming van de piano. Zij zullen daarmee moeten leven of een ander begeleidingsinstrument moeten zoeken.

De 31-toonsstemming van Huygens

Vanuit historisch, wiskundig en muzikaal oogpunt bezien is het interessant om ook aandacht te schenken aan een heel andere oplossing van de stemmingsproblematiek. Een oplossing die het uiteindelijk niet gehaald heeft, maar die in de vorige eeuw weer een opmerkelijke revival beleefde door de inspanningen van de fysicus A.D. Fokker (1887-1972). Het gaat hier om het voorstel uit 1691 van Christiaan Huygens [6] voor een evenredigzwevende verdeling van het octaaf in niet minder dan 31 gelijke delen.

Huygens, die behalve wiskundige, astronoom en natuurkundige ook een enthousiast amateurmusicus was, had zich zoals zoveel wetenschappers in zijn tijd ook met de theoretische grondslagen van de muziek beziggehouden. Hij was goed op de hoogte van het verband tussen muzikale intervallen en frequentieverhoudingen en de functie van het octaaf, de kwint en de grote terts als fundamentele bouwstenen voor toonsystemen. Hij kende ook het tertsenprobleem voor orgels, clavecimbels en andere toetsinstrumenten en de noodzaak om bij zulke instrumenten 'getempereerde kwinten' te gebruiken om hinderlijk valse grote tertsen te vermijden. Net als vrijwel alle musici uit die tijd verwierp Huygens de evenredigzwevende twaalftoonsstemming (die onder andere door Simon Stevin gepropageerd was) juist vanwege de daarin voorkomende valse tertsen. Voor Huygens was de middentoonstemming, door hem in zijn Franstallige publicaties *le temperament ordinaire* (het gewone temperament) genoemd, de norm.

Natuurlijk kende Huygens wel degelijk ook het grote voordeel van de evenredigzwevende stemming, namelijk het feit dat je daarin zonder beperkingen kunt transponeren, dat wil zeggen dat je elk van de twaalf tonen als *tooncentrum* kunt nemen, en dus in elke toonsoort even goed, of, zo je wilt, even slecht kunt musiceren. Anders gezegd: alle toonsoorten klinken even vals.

Maar Huygens stelde een oplossing voor die de voordelen van de middentoonstemming zou combineren met de onbeperkte transpositiemogelijkheden van de evenredigzwevende stemming: een veel fijnmaziger octaafverdeling. Als je het octaaf in N gelijke deelintervallen verdeelt, kun je ervoor zorgen dat alle tonen van de middentoonstemming goed benaderd worden door N groot genoeg te kiezen.

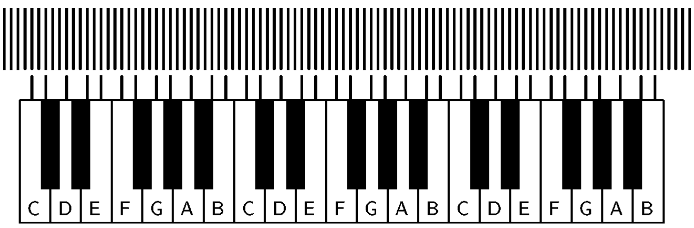
Aan de hand van het spiraaldiagram van figuur 8 kunnen we dit duidelijk maken. Daarin is de middentoonskwint, die $(1/4) \times \log_2(5) \times 1200 \approx 696.5784$ cent meet, de bouwsteen: elke toon in de middentoonstemming is op octaaftransposities na opgebouwd uit een geheel aantal van die kwinten. Huygens heeft ontdekt dat de breuk $18/31$ een zeer goede benadering is van de breuk $696.5784/1200$ die in figuur 8 de verhouding tussen de middentoonskwint en het octaaf aangeeft. Die laatste breuk is namenlijk, op zes decimalen afgerond, gelijk aan 0.580482 terwijl $18/31 \approx 0.580645$. Als je dus het octaaf in 31 gelijke delen verdeelt, komen 18 schaaldelen vrijwel overeen met de middentoonskwint. Het verschil bedraagt, omgerekend in cents, minder dan 0.2 cent. Door accumulatie zal het verschil bij de andere tonen groter worden, maar zelfs na 12 stappen bedraagt het nog steeds minder dan 2.4 cent. Kortom, binnen het 31-toonssysteem van Huygens is de middentoonstemming vrijwel zonder hoorbare afwijkingen realiseerbaar. In figuur 10 wordt dit geïllustreerd. Bovendien kan nu elk van de 31 tonen als tooncentrum genomen worden, want het systeem is cyclisch. Binnen het systeem van Huygens kan men dus onbeperkt transponeren.

Het enige nadeel is natuurlijk dat een klavier met 31 toetsen per octaaf in de praktijk lastig te construeren en te bespelen is. Huygens stelde daarom voor om een toetsinstrument te bouwen met weliswaar 31 snaren per octaaf, maar met daarboven een verplaatsbaar normaal klavier van 12 toetsen per octaaf, met aan de onderzijde van de toetsen pennen die de gewenste selectie van 12 snaren bedienen. Door het klavier te verschuiven kan men een andere selectie kiezen, waarbij de pennen dus boven een ander twaalftal snaren terecht komen. Figuur 11 geeft een schematische tekening van zo'n constructie.

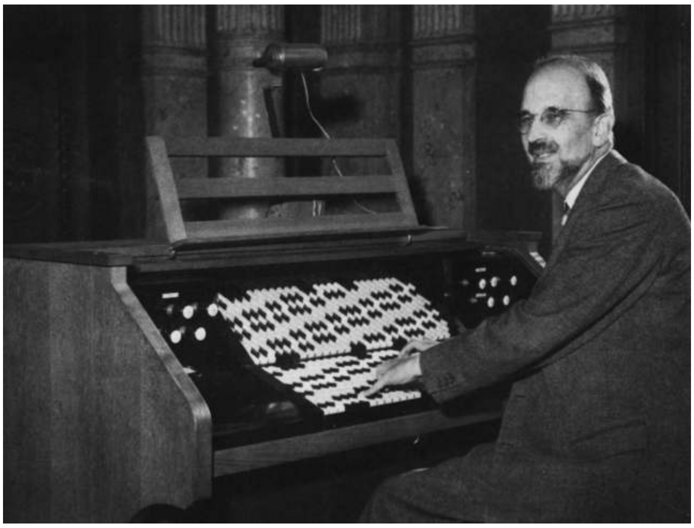
Hoewel Huygens gedetailleerde tekeningen gemaakt heeft voor zo'n instrument, is het niet helemaal duidelijk of het ooit daadwerkelijk gebouwd is. De fysicus A.D. Fokker heeft echter kort na de Tweede Wereldoorlog voor Teylers Museum te Haarlem een 31-toonsorgel laten bouwen, niet met een verplaatsbaar klavier, maar met een toetsenbord met 31 toetsen per octaaf naast en boven elkaar, zo ongeveer als bij de toetsen van een schrijfmachine (zie figuur 12). Daarnaast heeft het orgel ook een 'gewoon' 12-toetsenklavier, waarmee naar keuze een selectie uit de 31 tonen gemaakt kan worden, bijvoorbeeld volgens de middentoonstemming.

Waarom eenendertig?

In zijn artikel legt Huygens niet uit hoe hij aan het aantal van 31 gekomen is. Gewoon proberen? Dat lijkt niet zo waarschijnlijk, te meer daar het in zekere zin de best mogelijke praktisch realiseerbare oplossing is van het stemmingsprobleem zoals hij zich dat gesteld zou kunnen hebben: *het zo goed mogelijk inpassen van de middentoonstemming in een evenredigzwevende stemming met een niet al te groot aantal tonen per octaaf.* Waar dat op neer komt, is het benaderen van de middentoons-kwintverhouding $\mu = (1/4) \times \log_2(5) \approx 696.5784/1200$ door breuken met een niet al te grote noemer. De wiskundige denkt dan direct aan *kettingbreuken* (zie bijvoorbeeld Hoofdstuk 14 van het boek *Getaltheorie voor beginners* [3]). Met behulp van de kettingbreukontwikkeling van μ kun je namelijk een rij gewone breuken p_n/q_n opstellen, de zogenaamde *convergenten*, die het getal μ 'zo goed



Figuur 11 Schema van Huygens ontwerp voor een verplaatsbaar twaalftoetsenklavier met pennen die bevestigd zijn aan de toetsen waarmee een selectie uit de snaren van het 31-toonssysteem gemaakt kan worden. Verschuiven van het klavier geeft een andere selectie. De pennen zijn zo gemonteerd dat de zwarte toetsen staan voor Cis, Es, Fis, Gis en Bes.



Figuur 12 A.D. Fokker achter het grote klavier van het 31-toonsorgel

mogelijk benaderen'. Met dat laatste wordt bedoeld dat die convergenten de eigenschap hebben dat p_n/q_n de beste rationale benadering van μ is met een noemer kleiner dan q_{n+1}. In het bijzonder vormen de noemers altijd een strikt stijgende rij natuurlijke getallen.

De kettingbreukontwikkeling van μ begint als volgt:

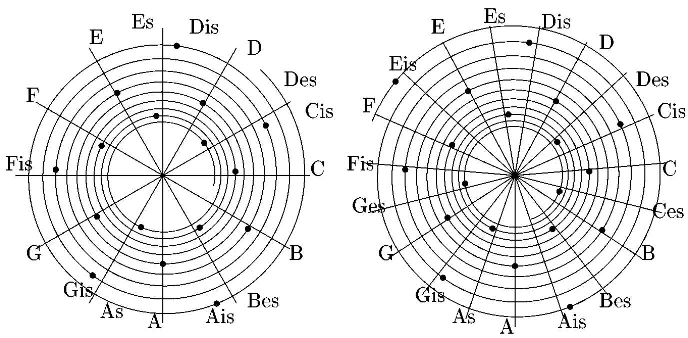
$$\mu = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}}}}}}$$

De convergenten van μ, krijg je door de ontwikkeling na een aantal stappen af te breken, dat wil zeggen de stippeltjes en het daaraan voorafgaande plusteken te verwijderen. Na vereenvoudiging van de resulterende samengestelde breuk vinden we

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{7},\ \frac{7}{12},\ \frac{11}{19},\ \frac{18}{31},\ \frac{101}{174},\ \frac{119}{205},\ \ldots$$

De eerste convergenten zijn natuurlijk nog te grof. De breuk $7/12$ komt echter al aardig in de buurt. Die hoort dan ook bij de bekende evenredigzwevende twaalftoonsstemming, waarin de kwint zeven halve-toonsafstanden meet. De volgende breuk $11/19$ levert een nog betere benadering op (met echter toch nog duidelijk hoor- en zichtbare afwijkingen, zie figuur 13), maar spectaculair goed is $18/31$, vooral ook omdat de volgende convergent $101/174$ zo'n veel grotere noemer heeft. Van alle breuken met een noemer kleiner dan 174 geeft, volgens de bovengenoemde eigenschap van kettingbreuken, $18/31$ de beste benadering van μ.

Ten aanzien van de convergent $11/19$ kan nog worden opgemerkt dat men een klavier met 19 toetsen per octaaf kan maken door de vijf zwarte toetsen van een gewoon klavier te verdubbelen en nog twee zwarte toetsen toe te voegen: een toets tussen E en F en een toets tussen B en C. In zijn *Syntagma Musicum*, II, Chap. XI, p. 63 maakt Praetorius (1571-1621) gewag van een clavecimbel met 77 toetsen over vier octaven dat op een dergelijke wijze was geconstrueerd, en dat



Figuur 13 De middentoonspiraal in het 12-toonssysteem (links, vergelijk ook tabel 1) en in het 19-toonssysteem (rechts). De stippen geven de tonen aan volgens de middentoonstemming; de namen van de tonen zijn langs de rand vermeld. De spaken markeren de betreffende evenredigzwevende verdeling.

hij gezien had ten huize van de hoforganist van keizer Rudolf II (1552–1612) in Praag. (Deze informatie ontlenen we aan Helmholtz, [4], p. 320.) Op zo'n klavier kan men 19 opvolgende tonen van de middentoonspiraal, bijvoorbeeld van Ces tot en met Eis, weergeven, en figuur 13 laat zien hoe deze tonen in een evenredigzwevende 19-toonsstemming benaderd worden.

Hoe realiseerde Huygens zijn 31-toonsstemming?

Huygens behandelde ook de vraag hoe men zo'n 31-toonsstemming kan realiseren. Er waren in die tijd natuurlijk nog geen electronische stemapparaten, maar er was wel het *monochord*, een primitief 'snaarinstrument', dat slechts bestaat uit één strak gespannen snaar met een beweegbare kam in het midden die langs een schaalverdeling verschoven kan worden. Houdt men de spanning in de snaar constant, dan is de (variabele) lengte van het deel dat trilt omgekeerd evenredig met de frequentie, precies zoals dat bij een viool, een cello of een contrabas het geval is. Maar terwijl de musicus bij die instrumenten zuiver op het gehoor speelt, kan men bij het monochord de schaalverdeling gebruiken om de toonhoogte exact vast te stellen. In figuur 14 is zo'n monochord getekend, met dwarslijntjes op de plaatsen waar de kam moet worden gezet om de 31 tonen van 31-toonsstemming van Huygens te verkrijgen. Het klinkende deel van de snaar is dan het lange gedeelte links van de kam. Iets dikkere dwarslijnen geven de tonen van de middentoonstemming aan (vergelijk ook figuur 10). We zullen nu verklaren hoe Huygens deze schaalverdeling berekend heeft. In figuur 15 hebben we Huygens oorspronkelijke tabel gereproduceerd.

Figuur 14 Een monochord met een evenredigzwevende 31-toonsverdeling van het octaaf C–C. Het klinkende deel van de snaar bevindt zich links van de verplaatsbare kam. De dwarslijnen die horen bij de (benaderde) middentoonstemming (zie de kolommen IV en V in figuur 15) zijn dik getekend.

Huygens stelde de totale lengte van de snaar op 100000 eenheden, en regelde de spanning van de snaar zo, dat de gehele snaar een toon C liet horen. Plaatst men de kam daarna precies halverwege (dus op 50000 eenheden), dan laat het vrije deel ook weer een C horen, maar nu een octaaf hoger. Alle schaalposities tussen 50000 en 100000 geven tonen die binnen dat octaaf liggen, en het gaat er dus om de schaalwaarden te vinden die corresponderen met de evenredige 31-toonsverdeling. We laten Huygens zelf aan het woord, waar hij de samenstelling uitlegt van de eerste twee kolommen van de door hem voor dat doel opgestelde tabel:

Ik heb [...] *de logaritme van* 2, *die* 0.30102999566 *is, door* 31 *gedeeld, hetgeen het getal* $N = 0.0097106450$ *oplevert, dat ik steeds opgeteld heb bij de logaritme van* 50000, *die* 4.6989700043 *is; en van die optellingen zijn de logaritmen van de [eerste] kolom afgeleid, tot aan de grootste,* 4.9999999993, *die, doordat deze zo weinig van* 5.0000000000 *verschilt, laat zien dat de berekening goed is uitgevoerd. Zij die de logaritmen begrijpen, weten dat men zo te werk moet gaan als men dertig middelevenredigen wil hebben tussen* 100000 *en* 50000.

De bijbehorende snaarlengten in de tweede kolom haalde Huygens uit de beroemde logaritmetafel in tien decimalen van Adriaan Vlacq uit 1628. Opmerkelijk is daarbij dat Huygens bij het opzoeken (of bij het overschrijven) op de derde regel een fout maakte: 52278 moet zijn 52287. Met moderne rekenapparatuur kunnen we dat (en de correctheid van alle overige numerieke gegevens uit de tabel!) onmiddellijk verifiëren.

De laatste twee kolommen van de tabel zijn gereserveerd voor de middentoonstemming, in kolom V de schaalwaarden van het monochord, en in kolom VI de logaritmen ervan. We herkennen in kolom V de terts E met schaalwaarde 80000 ($4/5$ van 100000) en de terts Gis daarop, met schaalwaarde 64000 ($16/25$ van 100000). Huygens geeft van 16 tonen uit de middentoonstemming, dezelfde als in figuur 10, de schaalwaarden en hun logaritmen. Hij vergelijkt ze met bijbehorende benaderingen in de 31-toonsstemming en constateert dat de verschillen zeer gering zijn. In de kolommen III en IV staan de bijbehorende toonnamen, waarbij hij Fis als $\mathrm{F}^{\times}$ noteert, enzovoort.

Division de l'Octave en 31 parties égales.				Division de l'Octave suivant le Temperament ordinaire.	
I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
N 97106450					
4,6989700043	50000	UT 2	C 2	50000	4,6989700043
4,7086806493	51131				
4,7183912943	52278				
4,7281019393	53469	SI	B x	53499	4,7283474859
4,7378125843	54678				
4,7475232293	55914	SA	B	55902	4,7474250108
4,7572338743	57179	*	*	57243	4,7577249574
4,7669445193	58471				
4,7766551643	59794	LA	A	59814	4,7768024824
4,7863658093	61146				
4,7960764543	62528	*	*	62500	4,7958800173
4,8057870993	63942	SOL x	G x	64000	4,8061799740
4,8154977443	65388				
4,8252083893	66866	SOL	G	66874	4,8252574989
4,8349190343	68378				
4,8446296793	69924				
4,8543403243	71506	FA x	F x	71554	4,8546349804
4,8640509693	73122				
4,8737616143	74776	FA	F	74767	4,8737125054
4,8834722593	76467				
4,8931829043	78196				
4,9028935493	79964	MI	E	80000	4,9030899870
4,9126041943	81772				
4,9223148393	83621	MA	E b	83592	3,9221675119
4,9320254843	85512	*	*	85599	4,9324674685
4,9417361293	87445				
4,9514467743	89422	RE	D	89443	4,9515449935
4,9611574193	91444				
4,9708680643	93512	*	*	93459	4,9706225184
4,9805787093	95627	UT x	C x	95702	4,9809224750
4,9902893543	97789				
4,9999999993	100000	UT	C	100000	5,0000000000

Figuur 15 De tabel van Huygens

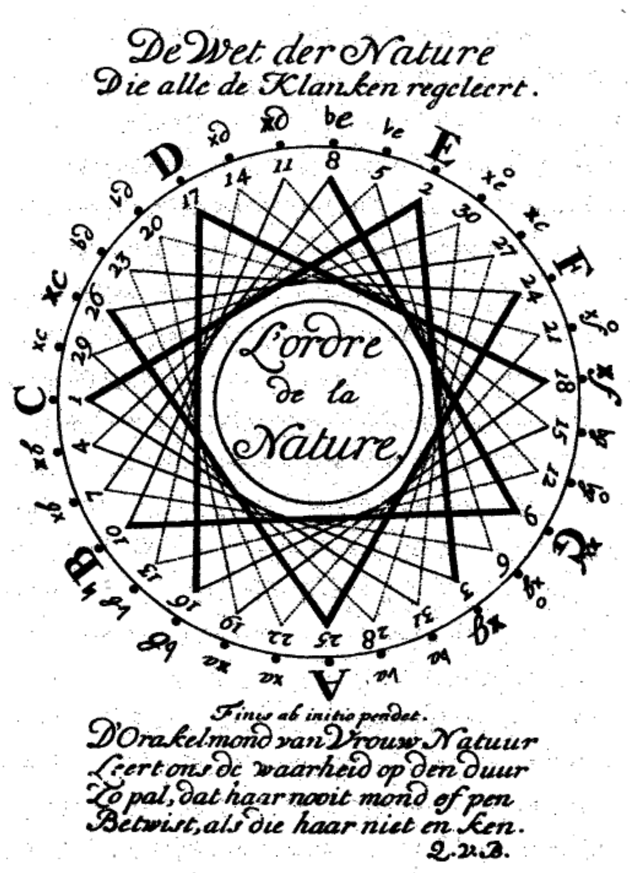
Opmerkelijk is dat Huygens onze Bes als B noteert (zoals dat thans ook nog steeds in het Duits gebeurt) en onze B als B$^\times$ (in het Duits gebruikt men daar tegenwoordig de letter H voor). De zogenaamde 'enharmonische' tonen Ais, As, Dis en Des, die in de evenredigzwevende twaalftoonsstemming samenvallen met respectievelijk Bes, Gis, Es en Cis maar die in de 31-toonsstemming aparte tonen zijn, zijn met sterretjes aangegeven.

Nadat Huygens de samenstelling van zijn tabel nog wat verder heeft toegelicht, waarbij hij steeds gebruik maakt van de in die tijd nog tamelijk nieuwerwetse logaritmen, sluit hij zijn betoog af met de ontboezeming: *Er is niets zo handig bij muzikale berekeningen als het gebruik van logaritmen*, een uitspraak waarbij we ons van harte kunnen aansluiten, want onze cirkel- en spiraaldiagrammen konden natuurlijk ook alleen maar tot stand komen omdat we Maple en PostScript met logaritmen konden laten werken.

Huygens invloed op de muziektheorie

Christiaan Huygens publiceerde zijn verhandeling over muziek als brief aan de redacteur in het tijdschrift *Histoire des Ouvrages des Sçavans* dat opgericht was door de naar De Nederlanden gevluchte hugenoot Henri Basnage de Beauval. Het betreffende tijdschriftnummer werd drie maal herdrukt, en een vertaling ervan in het Latijn door Willem Jacob 's-Gravesande verscheen in 1724 onder de titel *Novus cyclus harmonicus*. In die tijd vond Huygens voorstel voor een octaafverdeling in 31 gelijke deelintervallen wel degelijk weerklank, getuige ook een tekening ervan in de *Elementa musica* (Den Haag, 1739) van de organist Quirinus van Blankenburg (1654-1739) (zie figuur 16, ontleend aan [6], p. 105). Hij plaatste de 31 tonen van Huygens systeem langs de omtrek van een cirkel, en verbond de 'grote tertsen', die in het systeem vrijwel zuiver worden weergegeven, door lijnen. Zo ontstond een 'ster-31-hoek', die je op kunt vatten als een soort grote-tertsencirkel, naar analogie van de kwintencirkel die bij de evenredigzwevende twaalftoonsstemming behoort. De acht grote tertsen van de middentoonstemming zijn daarbij door dikke lijnen aangegeven.

Het is instructief om de namen van de verschillende tonen te bestuderen. Merk ook op dat de prent van Van Blankenburg in wezen niet anders is dan onze figuur 10. De beide figuren passen, op een verticale spiegeling na, volledig op elkaar. Ondanks Huygens autoriteit en de steun van een aantal invloedrijke muziektheoretici heeft zijn 31-toonssysteem nooit echt ingang gevonden. Gezegd moet worden dat Huygens voorstel voor een verplaatsbaar klavier boven een instrument met 31 snaren per octaaf ook op onoverkomelijke praktische bezwaren



Figuur 16 De plaat die Quirinus van Blankenberg ontwierp als illustratie van het 31-toonssysteem van Huygens. Vergelijk ook met figuur 10.

stuitte, zeker in die tijd. Daar komen de reeds eerder genoemde ontwikkelingen bij die de middentoonstemming, in zekere zin de grondslag van Huygens systeem, steeds meer naar de achtergrond schoven, waarmee ook het 31-toonssysteem tot een museumstuk gedegradeerd werd. Of de pogingen van A.D. Fokker om het daar weer uit te bevrijden uiteindelijk succesvol zullen blijken, zal de toekomst moeten leren.

Dankbetuiging

De auteurs zijn Aad Goddijn erkentelijk voor zijn commentaar op een eerdere versie van dit artikel.

Referenties

1 J. Murray Barbour, *Tuning and Temperament — A Historical Survey*, Michigan State College Press, East Lansing, 1951.

2 Fred Bettenhaussen, Frits & Hans van Krevelen, *Clavecimbel, clavichord en pianoforte — stemmen, stemmingen en onderhoud*, Uitg. De Toorts, Haarlem, 1984.

3 Frits Beukers, *Getaltheorie voor beginners*, Epsilon Uitgaven nr. 42, Utrecht, 1999.

4 Hermann L.F. Helmholtz, *On the Sensations of Tone* (Engelse vertaling en uitgebreide bewerking (1885) door Alexander J. Ellis van *Die Lehre von den Tonempfindungen*, Heidelberg, 1862, 1877), heruitgave Dover, New York, 1954.

5 James Jeans, *Science & Music*, Cambridge Univ. Press, 1937, heruitgave Dover, New York, 1968.

6 Christiaan Huygens, *Le cycle harmonique* (Rotterdam 1691), *Novus cyclus harmonicus* (Leiden 1724), *with Dutch and English translations*. Edited by Rudolf Rasch. Diapason Press, Utrecht, 1986.