

Patrick Oonincx

Centrum voor Wiskunde en Informatica
Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam
patricko@cwi.nl

Overzichtsartikel

Wavelets: een hype

Wiskunde is spannend en uitdagend. Iemand leest een wiskundig artikel en springt op de eerste trein naar Marseille. Op naar de geboorte van een wiskundig golfje, een 'wavelet'. Het universum zou na de ontdekking van wavelets nooit meer hetzelfde zijn, zo werd destijds gedacht. De hype die rondom wavelettheorie ontstaan is is nog niet voorbij, maar borrelt wel minder sterk dan 5 á 10 jaar geleden. Een ideaal moment om op het verschijnsel wavelets terug te blikken en een blik in de toekomst te werpen.

Al bijna 200 jaar geleden liet Jean Baptiste Fourier in diens befaamde *Théorie analytique de la Chaleur* zien, dat periodieke functies door een reeks van cosinus- en sinusfuncties te beschrijven zijn. Inmiddels beschikken we ook over een analogon voor niet-periodieke functies. De fysische interpretatie van Fouriers resultaat is dat elk signaal te verkrijgen is door een diversiteit aan stemvorken bij elkaar te plaatsen en deze gelijktijdig met mogelijk verschillende krachten aan te slaan. Vaak komen we in de natuur echter verschijnselen tegen, die beter beschreven zouden kunnen worden door de stemvorken niet gelijktijdig aan te slaan en door ze ook na een bepaalde tijd te dempen.

Wat er bij het principe van de stemvorken gebeurt is dat bij de analyse van meetgegevens, via de Fouriertransformatie, naar het frequentiespectrum gekeken wordt om inzicht te krijgen in de energieverdeling die in het betreffende signaal aanwezig is. Een dergelijke analyse is uitermate geschikt voor het analyseren van

stationaire signalen of composities hiervan. Te denken valt hierbij bijvoorbeeld aan het geluid voortgebracht door één of meerdere stemvorken. Een transformatie naar het frequentiedomein door middel van Fourieranalyse biedt voor dit soort signalen het ideale mechanisme, aangezien voor deze types van signalen niet het gedrag in tijd maar in frequentie van belang is.

Een grote klasse van signalen uit de fysische wereld is echter niet stationair. Voor de analyse van dit soort signalen is vaak zowel informatie uit het tijdsdomein als ook informatie uit het frequentiedomein van belang. Een indruk van de frequentiecomponenten in een signaal op een gegeven tijdstip kan verkregen worden door het toepassen van een tijd-frequentie transformatie. Een algemene klasse van dit type transformaties, beschreven door Leon Cohen in 1966, wordt gegeven door

$$\tilde{f}(t, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbf{R}^3} f(u+s/2) \overline{f(u-s/2)} \phi(v, s) e^{-i(tv+\omega s-uv)} ds du dv.$$

Door het maken van geschikte keuzes voor de kernel functie ϕ kunnen uit deze representatieformule enkele welbekende transformaties worden afgeleid. Voor $\phi = 1$ volgt na integratie over u en v de Wigner-Ville distributie, die al in 1932 door Eugene Wigner geïntroduceerd werd in de quantummechanica. Hierbij namen moment en positie de plaats in van tijd en frequentie. Vile introduceerde deze transformatie 16 jaar later in de signaal-analyse.

of toch meer?

Een andere welbekende keuze voor ϕ wordt gegeven door

$$\phi_h(v, s) = \int_{\mathbf{R}} h(u + s/2) \overline{h(u - s/2)} e^{-iuv} du,$$

voor een zekere $h \in L^2(\mathbf{R})$ met $h \neq 0$ op een deelverzameling van \mathbf{R} met positieve maat. Na uitvoering van de integratiestappen volgt $\tilde{f}(t, \omega) = |\hat{f}_h(t, \omega)|^2$. Hierbij is

$$\hat{f}_h(t, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} f(u) \overline{h(u - t)} e^{-i\omega u} du$$

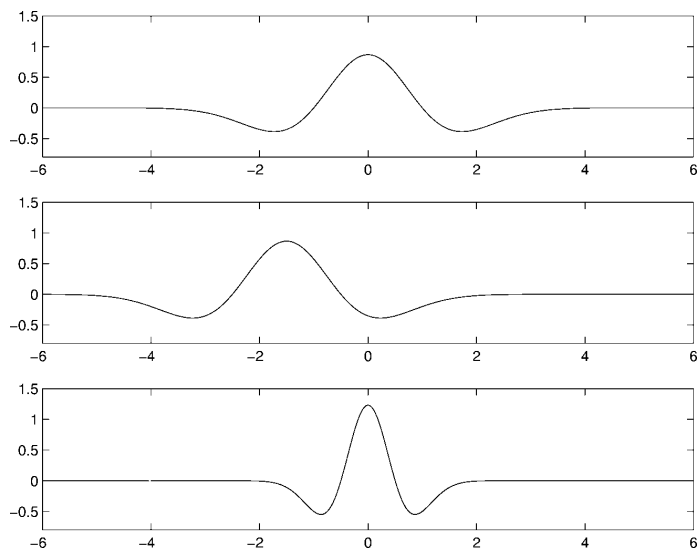
de zogenaamde windowed Fouriertransformatie met window functie h . De uitdrukking \tilde{f} heet het spectrogram van het signaal f . Een bekende keuze voor de window functie h is de Gauss-kromme. De transformatie $f \mapsto \tilde{f}$ heet in dit geval de Gabor-transformatie, genoemd naar Nobelprijswinnar Gabor die deze transformatie in 1946 voor het eerst beschreef.

Blijven we even bij de Gabortransformatie als klassieke tijd-frequentie transformatie, dan vallen twee dingen op. Een functie wordt beschreven door verschoven Gauss-krommen, die alle dezelfde 'breedte' bezitten. Deze Gauss-krommen vormen tezamen geen orthonormale basis voor de functieruimte $L^2(\mathbf{R})$. Het eerste aspect betekent dat een signaal, waar in de tijd diverse verschillende frequenties ofwel schalen optreden, beschreven wordt door een klasse van functies die allen eenzelfde karakteristieke

schaal bezitten. Een praktisch probleem is dan het zo goed mogelijk kiezen van de 'breedte' van de Gauss-kromme zodat een goede approximatie van het signaal door een lineaire combinatie van slechts een gering aantal van deze getransleerde krommen verkregen kan worden. Het voordeel van orthonormaliteit is het eenvoudig en snel kunnen berekenen van de approximatiecoëfficiënten.

Het prille begin

De vooral praktische onvolkomenheden van de Gabor-transformatie speelden de Franse geofysicus Jean Morlet parten. Hij was in dienst van een Franse oliemaatschappij waar hij zich veelal met scattering problemen bezig hield om gelaagdheid van de aarde te kunnen analyseren. Voor de analyse van door de aardlagen gereflecteerde trillingen gebruikte hij tot ongeveer 1982 discrete Gabor decomposities. Elke gereflecteerde trillingen heeft natuurlijk een andere karakteristieke schaal. Daarom bedacht Morlet dat het zinvol zou zijn om de Gauss-kromme in de windowed Fouriertransformatie een dilatatieparameter mee te geven, die de 'breedte' van de kromme kan sturen. Deze dilatatieparameter neemt in de Gabortransformatie vervolgens de plaats in van de frequentieparameter. Verder gaf hij aan de window functie ook nog een fase-draaiing mee. De aldus ontstane transformatie is gebleken het concept te zijn van wat we nu kennen als de wavelet-transformatie.



Figuur 1 Van boven naar beneden zien we de mexican hat wavelet (tweede afgeleide van een Gauss-kromme), een getransleerde mexican hat wavelet en een gedilateerde mexican hat wavelet.

Het idee van Morlet was er een uit de praktijk en was nog niet in een wiskundig raamwerk gegoten. Dit gebeurde wel twee jaar later, na een samenwerking van Jean Morlet met de theoretisch fysicus Grossmann. Alex Grossmann ging uit van het feit dat er net als bij de Gabortransformatie een representatie van een groep te vinden moest zijn die paste bij het concept van Morlet. Deze vond hij in de vorm van een representatie van de $ax + b$ groep. Op deze manier werden de wiskundige hiaten in Morlets wavelettransformatie gladgestreken, zoals het ontbreken van een inverseformule. In het *SIAM Journal of Mathematical Analysis* verscheen in 1984 het artikel *Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape* van de hand van Grossmann en Morlet. De continue wavelettransformatie op $L^2(\mathbf{R})$ zoals wij die nu kennen werd hierin nu voor het eerst beschreven als

$$W_\psi[f](a, b) = a^{-1/2} \int_{\mathbf{R}} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt,$$

met $a > 0$ en $b \in \mathbf{R}$ en waarbij $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ een vrij te kiezen waveletfunctie is, mits deze voldoet aan de zogenaamde admissibility conditie

$$0 < \int_0^\infty \frac{|\hat{\psi}(a\omega)|^2}{a} da < \infty.$$

Deze voorwaarde garandeert het bestaan van een unieke reconstructieformule voor elke functie f uit diens waveletcoëfficiënten $W_\psi[f](a, b)$.

Ten tijde van het uitkomen van het SIAM artikel werd het Centre de Physique théorique van de welbekende Franse Ecole Polytechnique geleid door Jean Lascoux. Hij had de gewoonte zijn medewerkers te voorzien van een haast continue stroom van nieuw gepubliceerde papers, die op hun terrein lagen. Zo gebeurde het dat het SIAM artikel onder ogen kwam van Yves Meyer. Hij zag direct dat de grote ontdekking van Alex Grossmann en Jean Morlet in de wiskunde al sinds 1964 door het leven gaat als Calderon's reproductie formule, genoemd naar diens bedenker [1]. Het verhaal gaat dat Meyer de eerste trein naar Marseille nam, waar Grossmann huisde, om met de auteurs over de nieuwe transformatie te spreken. Hier hielp het lot de wavelettheorie een

eind op weg, want toevallig was in deze periode ook onze zuiderbuur Ingrid Daubechies bij Grossmann, haar oude leermeester, te gast. Zowel Meyer als Daubechies raakten in vervoering over deze wiskunde die in hun ogen veel problemen in het universum zou oplossen. Dit is natuurlijk niet gebeurd, echter wel hebben beiden een groot stempel op de ontwikkeling van dit stukje wiskunde gedrukt. In zulke mate zelfs, dat de huidige hype rondom wavelets zonder hen nooit zo'n omvang zou hebben bereikt.

Multiresolutie-analyse van Meyer-Mallat

De eerste wavelettransformatie zoals die verscheen in het SIAM paper staat tegenwoordig bekend als de continue wavelettransformatie. De parameters a en b zijn namelijk continue parameters in het bovenhalfvlak. Nemen we de wavelet getransformeerde van een signaal als functie van deze parameters dan is dit signaal redundant weergegeven, dat wil zeggen dat het betreffende signaal al gereconstrueerd kan worden door slechts de coëfficiënten $W_\psi[f](a, b)$ te kennen op een deelverzameling van het bovenhalfvlak. Voor een vast gekozen a betekent de transformatie niets meer dan een convolutieproduct van een gegeven signaal met een waveletfunctie. Door de admissibility van ψ kunnen we f reconstrueren door deconvolutie. Eigenlijk hoeven we dus $W_\psi[f](a, b)$ allen maar te kennen op elke lijn in het boven halfvlak parallel aan de b -as.

De discrete wavelettransformatie is gebaseerd op bovengenoemde overwegingen. We representeren nu een functie niet meer door diens waveletcoëfficiënten $W_\psi[f](a, b)$, met (a, b) continue variabelen in het bovenhalfvlak, echter we nemen (a, b) als elementen van een discrete deelverzameling in het bovenhalfvlak. Een inmiddels klassieke keuze is de deelverzameling $\{(2^j, 2^j k) \mid j, k \in \mathbf{Z}\}$. De keuze voor een dergelijke verzameling is gebaseerd op het feit dat voor hoge waarden van a de transformatie werkt met een laagfrequente waveletfunctie. In termen van een discrete Gabortransformatie zou dit betekenen dat we een gegeven functie gaan beschrijven met Gauss-krommen van een aanzienlijke 'breedte'. De stappen waarover we dan gaan transleren zullen dan ook dienovereenkomstig groter zijn dan voor het geval we krommen met een kleine 'breedte' beschouwen.

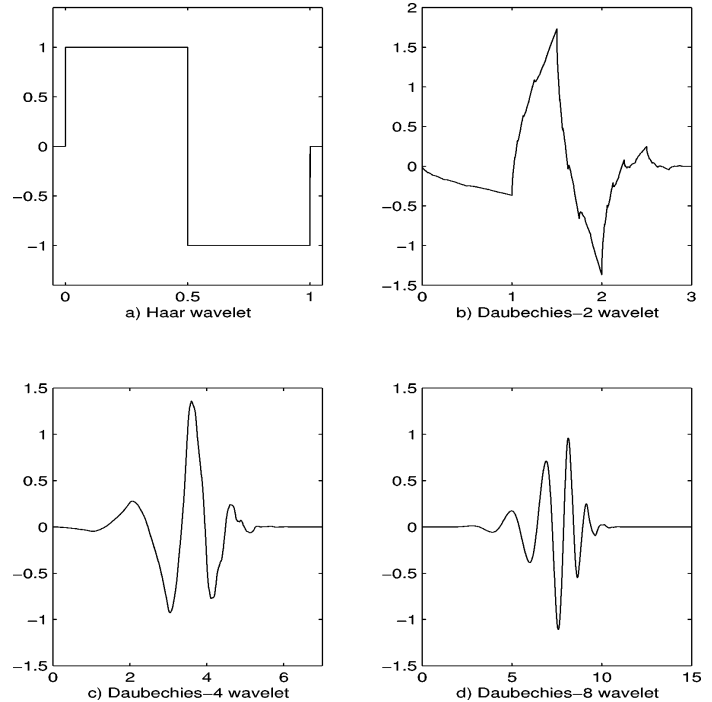
In Daubechies' boek [3] is uitgebreid aandacht besteed aan deze discretisatie van Calderon's identiteit. We zullen hier in dit artikel niet verder op in gaan. Als resultaat is wel van belang, dat als ψ admissible is, met deze keuze de verzameling $\{\psi(2^j \cdot -k) \mid j, k \in \mathbf{Z}\}$ een zogenaamd frame is. Een frame in $L^2(\mathbf{R})$ is een verzameling functies, niet noodzakelijk een basis, waarmee elke L^2 -functie op een (numeriek) stabiele wijze beschreven kan worden en ook weer stabiel gereconstrueerd kan worden. Bijzondere voorbeelden van een frame zijn een Riesz basis, ook wel exact frame genoemd, en een orthonormale basis. Om dit laatste te bewerkstelligen moeten natuurlijk nog meer eisen aan ψ worden opgelegd, waarover meer in de volgende paragraaf.

Om te komen tot een discrete wavelettransformatie kunnen we dus uitgaan van de continue transformatie, waarna we slechts een beperkt aantal mogelijkheden voor de parameters a en b toestaan. Vervolgens leggen we extra eisen op aan de waveletfunctie om resultaten zoals orthonormaliteit te verkrijgen. Yves Meyer had hier andere ideeën over. Hij trachtte waveletbases te construeren met behulp van een zogenaamde Multiresolutie Analyse. Het principe hiervan werkt als volgt. Men start met een schalingsfunctie ϕ ,

die door middel van translaties over de gehele getallen een basis voortbrengt. Dit kan een orthonormale basis zijn, maar ook een Riesz basis is toegestaan. Verder moet ϕ te schrijven zijn als lineaire combinatie van de functies $\phi(2 \cdot -k)$, $k \in \mathbf{Z}$. Met andere woorden, elke schalingsfunctie ϕ moet te schrijven zijn als combinatie van getransleerde versies van een ingedrukte schalingsfunctie. Deze mogelijkheden zien we geïllustreerd in figuur 1.

We kunnen nu een ruimte V_0 definiëren die opgespannen wordt door getransleerden van ϕ . Door het dilateren, indrukken en uitrekken van de schalingsfunctie kunnen we ook ruimten V_j construeren, opgespannen door $\phi(2^j \cdot -k)$, $k \in \mathbf{Z}$. Door deze constructie is V_{-1} bevat in V_0 , V_0 in V_1 en cetera. Meyers idee was nu om op analoge wijze ook ruimten W_j te creëren, die loodrecht stonden op V_j en samen met V_j de ruimten V_{j+1} blijken te zijn. De functie die nu door translaties over gehele getallen een basis zou vormen voor W_j was nu de waveletfunctie ψ . Door de onderlinge loodrechtheid van de ruimten V_j en W_j kan onder zekere voorwaarden inderdaad bewezen worden dat we op deze manier een basis in $L^2(\mathbf{R})$ geconstrueerd hebben van het type $\{\psi(2^j \cdot -k) \mid j, k \in \mathbf{Z}\}$. De voorwaarden op ψ zijn nu direct gerelateerd aan een gegeven functie ϕ . Ook regulariteit van ψ en bijvoorbeeld het hebben van een compacte drager leiden we eenvoudig af uit voorwaarden op ϕ .

Het multiresolutie idee wordt meestal niet geassocieerd met Yves Meyer maar veelal met Stephane Mallat die het in 1989 voor het eerst aan een groot publiek introduceerde in een IEEE journal, zie [5]. Mallat studeerde aan de Ecole Polytechnique waar Meyer werkzaam was. Later verhuisde hij naar de Verenigde Staten waar hij in 1988 in Philadelphia zijn proefschrift verdedigde aan de electrotechnische faculteit. Zijn electrotechnische achtergrond leerde hem dat structuur van geneste deelruimten al lang gebruikt werd in de beeldverwerking, waarbij een plaatje op diverse resolutieniveau's afgebeeld kan worden, van kleine tot grote pixelgrootte. Als een pixel dan wordt weergegeven door een blokfunctie, dan kan elke andere pixel bereikt worden door translaties over een aantal pixels totdat de betreffende pixel bereikt is. Verder kan een vierkante pixel van 2×2 natuurlijk door vier kleinere pixels van 1×1 beschreven worden. Na het formuleren van het multiresolutie idee bedacht Mallat ook nog het zogenaamde pyramide-algoritme. Dit algoritme beschrijft hoe men waveletcoëfficiënten op schaal 2^j efficiënt kan berekenen. Het algoritme is geheel gebaseerd op principes uit de filtertheorie en is van de orde $O(N)$. Ter vergelijking: het wel bekende FFT-algoritme, dat niet alleen in de hedendaagse software wordt gebruikt om de Fouriertransformatie te berekenen, maar ook om snel convolutieproducten weer kan geven, is van de orde $O(N \log N)$. Mallats idee is gebaseerd op een snelle berekening van de coëfficiënten. De toch al snelle berekening zou nog gestroomlijnd kunnen worden als de waveletfunctie compact gedragen zou zijn en samen met diens getransleerden een orthonormale basis zou vormen. Immers hier kan dan bij het berekenen van inwendige producten en bij het reconstrueren van het signaal dankbaar gebruik van worden gemaakt. Yves Meyer dacht dat dit soort waveletfuncties niet konden bestaan. Ingrid Daubechies toonde echter min of meer gelijktijdig in 1988 aan, dat dit soort functies wel bestaan. Dit leverde haar officieus de titel van koningin van de wavelets op.



Figuur 2 Hier zien we vier voorbeelden van de zogenaamde Daubechies wavelet. Merk op dat de drager groter wordt en de regulariteit toeneemt.

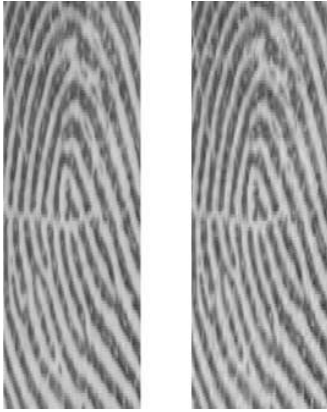
Daubechies-wavelets

Daubechies creëerde een verzameling schalingsfuncties, en hiermee ook de corresponderende waveletfuncties (via de multiresolutie-analyse), door deze niet in formulevorm proberen te vinden maar door constructie. Haar uitgangspunt in [2] was dat een schalingsfunctie uit te drukken was in met een factor 2 ingedrukte schalingsfuncties. De gedilateerde schalingsfuncties kunnen dan natuurlijk ook weer geschreven worden in termen van nog sterker ingedrukte functies ϕ . Zo kunnen we de schalingsfunctie dus ook uitdrukken in de met een factor 4 ingedrukte functies ϕ . Zij nu α het rijtje coëfficiënten in de ontwikkeling van ϕ in de functies $\phi(2 \cdot -k)$, dan levert dit onder een Fouriertransformatie

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{j=1}^J \hat{\alpha}(2^{-j}\omega) \hat{\phi}(2^{-j}\omega).$$

De volgende stap van Daubechies was het vinden van voorwaarden op het rijtje α zodat voor $J \rightarrow \infty$ het product naar een limietfunctie convergeert. Aan deze voorwaarden voegde Daubechies twee eisen toe, namelijk het compact gedragen zijn van ϕ en dus ook van ψ , en de orthonormaliteit van de gegenereerde basis.

Het hebben van een compacte drager vertaalt zich in de mooie eigenschap dat de rij coëfficiënten α eigenlijk een eindig rijtje is en dus een polynoom in het Fourierbeeld. Daubechies koos in haar constructie vervolgens voor nader te bepalen rijtjes α ter lengte $2N$. Het net van voorwaarden op α sluit zich op deze manier en zo kon Daubechies, weliswaar numeriek, de coëfficiënten α en dus ook ϕ en ψ bepalen. Uiteindelijk bleek dat door deze constructie wavelets met drager ter lengte $2N - 1$ geconstrueerd waren, die tevens $N/5$ keer continu differentieerbaar zijn voor grote waarden van N . Een analytische uitdrukking voor de Daubechies-wavelets bestaat helaas alleen voor het geval $N = 1$. In figuur 2 zien we een aantal Daubechies-wavelets voor verschillende waarden van N .



Figuur 3 Links een fingerprint uit de FBI kaartenbak en rechts dezelfde afdruk met een factor 13 gereduceerd met behulp van een wavelettransformatie. Er is vrijwel geen verschil!

De Daubechies-wavelet voor het geval $N = 1$ is precies gelijk aan de Haar-functie,

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1/2, \\ -1, & 1/2 \leq x < 1, \\ 0, & \text{elders,} \end{cases}$$

die de Duitser Alfred Haar reeds in 1910 introduceerde. Hij liet destijds al zien dat voor deze functie $\{\psi(2^j \cdot -k) \mid j, k \in \mathbf{Z}\}$ een orthonormale basis is voor $L^2(\mathbf{R})$. Verwonderlijk is het zeker niet dat de Daubechies-1 wavelet met Haars functie samenvalt. Immers Daubechies liet ook zien dat haar wavelets de enig mogelijke klasse van compact gedragen functies vormen die door middel van translaties en dilataties een orthonormale basis van $L^2(\mathbf{R})$ vormen.

Daubechies' vondst heeft een grote impact gehad op de ontwikkeling van waveletanalyse in alle jaren die volgde. Samen met de groepentheorie van Grossmann en de multiresolutie-analyse van Meyer en Mallat vormen de compact gedragen orthonormale wavelets van Daubechies wel zo'n beetje de wiskundige peilers van het krachtige instrument waveletanalyse. Wiskundigen uit verschillende disciplines konden na het neerzetten van deze peilers zich natuurlijk in ruime mate uitleven op de peiler die het dichtst bij hun onderzoeksgebied kwam. Zo zijn er vanuit de groepentheorie variaties bedacht op de continue wavelettransformatie voor meer dimensies. De schalingsparameter a is dan vervangen door een parameter a vermenigvuldigd met een rotatiematrix. Ook heeft zich een grote groep wiskundigen gestort op het bedenken van mogelijke waveletfuncties. Zo bestaan er naast de Daubechies-wavelet en de Haar-wavelet ook natuurlijk de Morlet en Meyer-wavelets en, wellicht wat minder natuurlijk, de Coiflets, de Battle-Lemarié-wavelets en de Vetterli-wavelets. Deze wavelets verschillen van elkaar in het type basis dat ze voortbrengen, de regulariteit van de waveletfunctie zelf, het al dan niet compact gedragen zijn en ga zo maar door. Sommige van deze nieuwe geschapen waveletfuncties kunnen uiterst nuttig zijn, bijvoorbeeld met het oog op een bepaalde toepassing. Andere lijken eerder ontworpen om in een hype mee te kunnen spelen, dan vanwege het nut ervan. Het gaat zelfs zo ver dat bepaalde soorten wavelets gepatenteerd werden. Dit zijn niet direct de meest bekende en wiskundig meest waardevolle wavelets.

Het fenomeen wavelets is echter niet groot geworden in de wiskunde zelf, maar in de dagelijkse praktijk van het gebruik van wiskunde. Waarschijnlijk is er zelden een stuk wiskunde geweest

dat zoveel wetenschappers uit uiteenlopende disciplines bijeengebracht heeft als wavelettheorie. Van medische beeldverwerking tot de analyse van de Dow Jones en van het ontdekken van typen van fractaal groei gedrag in bacteriekweken tot het analyseren van seismische data, waarmee het dus ooit begon, iedereen leek baat te hebben bij dit nieuwe gereedschap. Inmiddels weten we natuurlijk beter, niet alle problemen uit het universum zijn met wavelets op te lossen. Zo zijn er een aantal toepassingen weer snel van het toneel verdwenen. Enkele toepassingen gaven zoveel feedback dat wiskundigen en toepassers elkaar vonden en tot mooie resultaten kwamen, zowel in de wiskunde als in toepassingsgebieden.

Wavelets in gebruik

Enkele gebieden waarin waveletanalyse na 1990 een grootse ontwikkeling doormaakte zijn onder andere toepassingsgebieden zoals datacompressie, ruisonderdrukking en (medische) beeldverwerking. In de wiskunde zien we wavelets de laatste jaren vooral opduiken in de approximatietheorie en de numerieke behandeling van integraal en differentiaalvergelijking. Een aantal van deze gebieden zullen we nu kort wat nader bekijken.

Datacompressie Het idee achter datacompressie is dat een discreet signaal op een dusdanige wijze geschreven kan worden dat het aantal datapunten in de nieuwe schrijfwijze verminderd is. Vaak wordt bij compressie uitgegaan van een tweestapstechniek, eerst wordt het signaal getransformeerd naar een andere basis en vervolgens worden de ontwikkelingscoëfficiënten efficiënt gecodeerd. Voor het coderen van alle zuivere tonen zou bijvoorbeeld de Fouriertransformatie erg geschikt zijn. Immers dan worden alle datapunten die bij zo'n toon horen vervangen door één enkele Fouriercoëfficiënt behorend bij de desbetreffende toon.

Compressie door middel van het slechts geschikt transformeren en coderen van signalen wordt ook wel *lossless* compressie genoemd, omdat er geen gegevens verloren gaan. Een andere vorm van compressie is *lossy* compressie. Hierbij worden alleen coëfficiënten gecodeerd die een substantiele bijdrage aan de decompositie geven. Met name op dit gebied heeft de wavelettransformatie in de beeldverwerking haar kracht bewezen. Door het geschikt kiezen van een 2D lokaal gedragen waveletfunctie kunnen saillante details in plaatjes goed worden weergegeven op lage schalen (hoog frequent). Op de hogere schalen in de multiresolutie-analyse vinden we de laag frequente delen van een plaatje terug, zoals de achtergrond van een foto. Visueel is het van belang dat de details in een plaatje nauwkeurig behandeld worden. De bijbehorende coëfficiënten worden dan ook gecodeerd en verstuurd of opgeslagen. Alle andere minder van belang zijnde aspecten in het plaatje zullen door een klein aantal minder goed gelocaliseerde wavelets (op hoge schaal dus) gerepresenteerd worden. Deze coëfficiënten worden dan grotendeels verwaarloosd.

Een van de bekendste voorbeelden van het gebruik van wavelets komt uit de beeldcompressie. De Amerikaanse FBI zat halverwege de jaren '90 met het probleem dat ze elke dag zo'n 30 à 50 duizend nieuwe vingerafdrukken binnen kregen van opgepakte verdachten. Dit resulteerde in 1996 al in een totaal van 200 miljoen kaarten met 14 vingerafdrukken in een kaartenbak. Als dit alles in een computer opgeslagen zou moeten worden zou el-

ke kaart zo'n 10 MB computergeheugen kosten. Bij het opvragen van een vingerafdruk uit deze kaartenbak zou het natuurlijk een eeuwigheid duren eer de gevraagde afdruk uit de bak gesorteerd zou zijn. Er moest dus op een slimme manier met deze afdrucken worden omgegaan. Lossy compressie met behulp van wavelets maakte het mogelijk het archief te recoderen tot zo'n 8% van het originele archief. In figuur 3 zien we twee dezelfde vingerafdrukken. De linker afdruk is de originele afdruk, de rechter is de gecomprimeerde afdruk, waarbij een op de dertien waveletcoëfficiënten op 0 gesteld zijn. Het belangrijkste, namelijk het behoud van de contouren van de vinger, blijkt behouden gebleven ondanks de hoge compressieratio.

Ruisonderdrukking Het principe van ruisonderdrukking bij gebruik van een wavelettransformatie is gebaseerd op min of meer dezelfde ideeën als datacompressie. Uitgaande van een model voor de ruis kan een gemeten signaal worden opgevat als de gemiddelde ruis gesuperponeerd op een zuiver signaal. De waveletcoëfficiënten van de gemeten datareeks bestaat nu ook uit een superpositie van coëfficiënten behorende bij respectievelijk zuiver signaal en gemeten ruis. Het idee is nu dat gegeven het ruismodel een schatting gemaakt kan worden van de bijdrage aan de waveletcoëfficiënten als gevolg van de ruis. In het geval van witte ruis, een veel gebruikt model voor achtergrondruis bij metingen, zal de bijdrage aan de coëfficiënten uitgesmeerd zijn over alle coëfficiënten. Indien de bijdrage die het zuivere signaal aan de coëfficiënten zal toevoegen piekt in een kleine set van coëfficiënten, dan is ruisonderdrukking goed mogelijk. Dit gebeurt dan door een schatting voor de ruisbijdrage van alle coëfficiënten af te trekken, *hard thresholding*, of door de coëfficiënten in stand te laten als de schattingswaarde wordt overtroffen en de overige op nul te stellen, *soft thresholding*.

De meest bekende en opzienbarende toepassing van wavelets voor ruisonderdrukking komt wel van de hand van Coifman, hoogleraar aan Yale University. Hij beschikte over een oude geluidsofopname waarop Brahms' 'Eerste Hongaarse dans' uit 1889 te horen was. Natuurlijk was deze opname niet te vergelijken met de huidige geluidskwaliteit op een compact disc. Coifman presteerde het echter om met behulp van op wavelets gebaseerde ruisonderdrukking de opname 'ruisvrij' te maken, waarna deze klonk als anno '94 op een CD opgenomen. Verdere voorbeelden van het opschonen van data met behulp van wavelets zien we bijvoorbeeld bij Röntgenfoto's en scans, satellietbeelden en geofysische data.

Numerieke wiskunde In de numerieke wiskunde werkt men vaak bij het oplossen van integraal- en differentiaalvergelijkingen met eindige elementen methoden en multigrid methoden. Deze methoden zijn erop gebaseerd, dat het domein waarop het probleem gedefinieerd is opgedeeld wordt in elementen van een grid. Op deze elementen worden dan basisfuncties gedefinieerd waarmee de diverse termen in de vergelijking beschreven kunnen worden. Bij multigrid kunnen deze grids desgewenst verfijnd worden.

Naast de reeds bekende basisfuncties kunnen we nu natuurlijk ook de orthonormale waveletbasis gebruiken. Het verfijnen van deze wavelets komt dan overeen met wat er zich afspeelt bij het gebruik van multigrid methoden. Een mooie bijkomstigheid is dat integraalvergelijkingen van een bepaald type (met een Calderon-Zygmund operator) na overgang op een geschikte waveletbasis



Ingrid Daubechies

numeriek op te lossen zijn door het oplossen van een lineair stelsel waarin een ijle matrix betrokken is. De overgang naar een waveletbasis is in dit soort gevallen natuurlijk een uiterst geschikte preconditioner.

Wavelets in de 21ste eeuw

Naast de nu reeds traditionele waveletanalyse bestaat er sinds kort ook wavelets van de tweede generatie. Deze werd bedacht door de Belgische numeriek wiskundige Wim Sweldens, die thans bij AT&T de plek van Daubechies heeft ingenomen, nadat zij naar Princeton vertrokken is. Sweldens keek naar de praktijk waarin vaak een discrete datastroom geanalyseerd dient te worden. Wat er dan eigenlijk bij een Haar-wavelet gebeurt, is dat de meetpunten onderverdeeld worden in paren van 2 (elkaars burens), waarna de Haar-wavelet elk paar door een getal vervangt: de afstand van het eerste getal in het paar tot het gemiddelde van het paar. Het gemiddelde zelf wordt onthouden door de schalingsfunctie in de multiresolutie-analyse. Op een hogere schaal (lagere frequentie), worden deze gemiddelden weer in paren verdeeld, et cetera.

Sweldens' idee is eenvoudig. Je verdeelt je data in twee sets, bijvoorbeeld data op even en oneven meetwaarden. Vervolgens introduceer je twee operaties, een predictor (P) en een update operator (U). De even meetpunten vervang je nu door de even meetpunten minus het resultaat van P werkend op de oneven meetpunten. In het geval van de Haar-wavelet is P de identiteit en zijn de nieuwe waarden van de even meetpunten gedeeld door een factor 2 precies de waveletcoëfficiënten na toepassing van de Haar-wavelet. Het resultaat van de operatie U werkend op de vernieuwde even meetpunten levert nu ook vernieuwde oneven meetpunten. In het geval van de Haartransformatie geldt $U = 1/2$. Immers dan wordt de afstand tot het gemiddelde opgeteld bij de oneven meetpunten, die dan de waarden van de gemiddelden aannemen.

Samen met Ingrid Daubechies toonde Wim Sweldens aan dat men elke klassieke wavelettransformatie ook kan schrijven in een eindig aantal van dit soort manipulaties. Het voordeel van dit soort manipulaties is dat het opdelen van de data geheel willekeurig mag zijn. Hierdoor wordt ook mogelijk om wavelets op

irreguliere grids te bekijken. Zelfs wavelets op een bol konden hiermee beschreven worden. Iets dat in de klassieke analyse totaal onmogelijk is, omdat deze in de berekeningen steeds terug valt op Fourieranalyse. Verder zijn alle berekeningen in-place, dat wil zeggen, er hoeven geen aparte geheugenposities worden vrij gemaakt om coëfficiënten te berekenen en op te slaan.

JPEG2000 Wat voor velen *de* erkenning is voor hun werk aan wavelets is het feit dat de wavelettransformatie in de onlangs verschenen nieuwe JPEG beeldcompressiestandaard wordt gebruikt. In de eerdere JPEG-versies codeerde men coëfficiënten die afkomstig waren van een discrete cosinus transformatie. Hierbij werd een plaatje geconvolveerd met een rij scalaires die afkomstig waren van meetpunten op een verschoven cosinusfunctie. De wavelettransformatie was net iets te laat in haar ontwikkeling om bij de vorige standaard betrokken te worden, echter bij de nieuwste versie wordt zowel gebruik gemaakt van klassieke wavelets als van tweede generatie wavelets.

De klassieke wavelettransformatie wordt gebruikt voor *lossy* compressie, zoals we al eerder bij de FBI fingerprintcollectie gezien hebben. Verder zit er ook voor zekere doeleinden een *lossless* versie ingebouwd in JPEG2000. Deze methode is gebaseerd op constructies met behulp van tweede generatie wavelets die gehele getallen op gehele getallen af kunnen beelden. Sweldens en Daubechies lieten zien dat hiermee reeds een compressiefactor 2 behaald kan worden. Onlangs echter werd ook een factor 4 aangetoond.

Hype of meer?

Is waveletanalyse nu echt het onmisbare stukje wiskunde waar iedereen al jaren op zat te wachten of is het gewoon een stukje Fouriertheorie aangevuld met gebakken lucht? Bij een bezoek aan een congres waar waveletanalyse centraal staat, komen we beide

tegen. Vaak zien we dan de rijpe vruchten van een succesverhaal, zoals in het geval van JPEG2000, maar helaas zijn er genoeg wetenschappers die geheel zonder reden in hun toepassingsgebied de Fourieranalyse overboord zetten ten gunste van wavelets. Welnu, voor waveletanalyse is er zeker bestaansrecht, maar naast de bewezen kwaliteiten van Fourieranalyse. Het komt niet zelden voor dat de grootste vooruitgang in een bepaald toepassingsgebied wordt behaald door een combinatie van beide aanpakken.

De toekomst van wavelets zal vooral liggen in het deskundig toepassen ervan in allerlei applicaties, echter ook in de wiskunde zelf zijn er nog zeer interessante open vragen. Hierbij kunnen we denken aan waveletbases voor L^p -approximatie en aan analyse van (pseudo)differentiaaloperatoren en integraalvergelijkingen. Met name valt te denken aan studies aan operatoren die wellicht onder een wavelettransformatie beter te analyseren zijn. Op dit moment is deze groep van operatoren nog heel klein. Een open gebied ligt natuurlijk nog bij numerieke methoden op irreguliere grids, gezien de grid-onafhankelijke structuur van tweede generatie wavelets. Verder zijn er ook nog ontwikkelingen waarin de wavelettransformatie gecombineerd wordt met transformaties, die extra informatie over een signaal kunnen inbrengen. Een voorbeeld hiervan is de Radontransformatie, die in de tomografie veel gebruikt wordt.

In Nederland zien we waveletanalyse terug bij zowel wiskundig georiënteerde als bij fysische onderzoeksgroepen. Zo zien we in ons land onderzoek naar niet-lineaire waveletmethoden en naar wavelets voor het numeriek oplossen van partiële differentiaalvergelijkingen en integraalvergelijkingen. Ook zien we hier onderzoek naar waveletmethoden voor (medische) beeldverwerking, klimaatonderzoek, seismiciteit en exploratie-geofysica, het zoeken naar olie, waarmee we weer terug zijn bij de godfather Jean Morlet. ◀

Referenties

- 1 A. Calderón, 'Intermediate spaces and interpolation, the complex method', *Stud. Math.*, 24, 113–190, 1964.
- 2 I. Daubechies, 'Orthonormal bases of compactly supported wavelets', *Comm. Pure Appl. Math.*, 41, 909–996, 1988.
- 3 I. Daubechies, *Ten lectures on wavelets*, SIAM, Philadelphia, 1992.
- 4 B. Hubbard, *The world according to wavelets*, AK Peters, 1996.
- 5 S. Mallat, 'A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation', *IEEE Trans. Pat. Anal. & Mach. Intell.*, 11, 674–693, 1989.
- 6 P. Oonincx, *Mathematical signal analysis: Wavelets, Wigner distribution and a seismic application*, CWI Tract 130, CWI, 2001.