UWC

Universitaire Wiskunde Competitie

De Universitaire Wiskunde Competitie (UWC) is een ladderwedstrijd voor studenten, georganiseerd in samenwerking met de Vlaamse Wiskunde Olympiade. De opgaven worden tevens gepubliceerd op de internetpagina http://academics.its.tudelft.nl/uwc

Ieder nummer bevat de ladderopgaven A, B, en C waarvoor respectievelijk 30, 40 en 50 punten kunnen worden behaald. Daarnaast zijn er respectievelijk 6, 8 en 10 extra punten te winnen voor elegantie en generalisatie. Per nummer worden twee prijzen van 100 Euro toegekend: één aan de aanvoerder van de ladder (die daarna weer onderaan begint), en één aan de inzender van de oplossing die de meeste punten behaald heeft (die dan geen punten voor de ladder krijgt). Daarnaast zal twee maal per jaar een ster-opgave worden aangeboden waarvan de redactie geen oplossing bekend is. Voor de eerst ontvangen correcte oplossing van deze ster-opgave wordt eveneens 100 Euro toegekend. Groepsinzendingen zijn toegestaan. Elektronische inzending in LaTeX wordt op prijs gesteld. De inzendtermijn voor de oplossingen sluit op 1 mei 2001. Voor de ster-opgave geldt een inzendtermijn van een jaar.

Eindredactie: Jan van Neerven
Redactieadres: Universitaire Wiskunde Competitie
Vakgroep Toegepaste Wiskundige Analyse
Technische Universiteit Delft
Postbus 5031, 2600 GA Delft
j.vanneerven@its.tudelft.nl

Opgave A

Zij V de verzameling

$$\{(m,n):\ 1\le m\le N, 1\le n\le N,\ m+n\ge N+1,\ \text{ggd}\,(m,n)=1\}.$$

Bewijs dat

$$\sum_{(m,n)\,\in V}\frac{1}{mn}=1.$$

Opgave B

Bewijs voor alle $z\in\mathbf{C}$ de ongelijkheid

$$\left|e^z-\left(1+\frac{z}{k}\right)^k\right|\le\frac{\sqrt{e}}{2}\,\frac{|z|^2}{k}\,e^{\text{Re}\,z+\frac{1}{2}\frac{|z|^2}{k}}.$$

Opgave C

Voor $x\in\mathbf{R}$, $x\ge 1$, en $\alpha\in(0,1)\subset\mathbf{R}$ definiëren we

$$S(x,\alpha):=\sum_{1\le k\le x}\left[\left\{\frac{x}{k}\right\}+\alpha\right].$$

Hier is $[u]$ het grootste gehele getal $\le u$ en $\{u\}:=u-[u]$ het fractionele deel van u. Laat zien dat voor elke $\alpha\in(0,1)$ de limiet

$$\lim_{x\to\infty}\frac{S(x,\alpha)}{x}$$

bestaat. Bepaal voor zoveel mogelijk waarden van α de exacte waarde van deze limiet.

Ster-opgave

Zij $p:[0,1]\to\mathbf{R}$ een continue functie met $p(t)\ge 0$ voor alle $t\in[0,1]$ en

$$\int_0^1 p(t)dt=1.$$

Heeft de gehele functie $f:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ gegeven door

$$f(z):=e^z-\int_0^1 p(t)e^{zt}dt$$

altijd oneindig veel nulpunten?

Editie 2000/3

Op de ronde 2000/3 van de Universitaire Wiskunde Competitie ontvingen we 10 inzendingen. Winnaar van de editieprijs is *Johan Bosman* (RU Utrecht) met 128 punten. De ladderprijs gaat naar het team van *Bart Rodrigues* (KU Leuven). De uitslag volgt na de oplossingen. De volledige uitslag is te vinden op de UWC website (http://academics.its.tudelft.nl/uwc).

Opgave 2000/3-A

Zij driehoek ABC gelijkzijdig en zij P een punt op de omgeschreven cirkel. Definieer $p_1=|PA|$, $p_2=|PB|$, $p_3=|PC|$. Toon aan dat $p_1^2+p_2^2+p_3^2$ en $p_1^4+p_2^4+p_3^4$ beide onafhankelijk zijn van de keuze van het punt P.

UWC oplossingen

Oplossing Johan Bosman vond de volgende generalisatie: stel $A_1, \ldots, A_n$ zijn de hoekpunten van een regelmatige n-hoek en zij P een willekeurig punt op de omgeschreven cirkel, waarvan we de straal met R aangeven. Dan geldt voor $m \in \{1, \ldots, n-1\}$:

$$|PA_1|^{2m} + \cdots + |PA_n|^{2m} = nR^{2m}\binom{2m}{m}.$$

Voor het bewijs mogen we aannemen dat $A_i = \zeta_n^i \in \mathbf{C}$, waarbij $\zeta_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$. Dan is $P \in \mathbf{C}$ met $|P| = 1$ en $R = 1$. Er geldt:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} |PA_k|^{2m} &= \sum_{k=1}^{n} |P - \zeta_n^k|^{2m} = \sum_{k=1}^{n} ((P - \zeta_n^k)(P^{-1} - \zeta_n^{-k}))^m \\ &= \sum_{k=1}^{n} (2 - P\zeta_n^{-k} - P^{-1}\zeta_n^k)^m = \sum_{k=1}^{n} \sum_{a+b+c=m} \frac{m!}{a!b!c!} 2^a (-P)^{b-c} \zeta_n^{k(c-b)} \\ &= \sum_{a+b+c=m} \frac{m!}{a!b!c!} 2^a (-P)^{b-c} \sum_{k=1}^{n} \zeta_n^{k(c-b)} = n \sum_{a+2b=m} \frac{m!}{a!b!b!} 2^a,\end{aligned}$$

waar bij de laatste gelijkheid gebruik is gemaakt van het feit dat $\sum_{k=1}^{n} \zeta_n^{kd} = 0$ als $d \in \mathbf{Z} - n\mathbf{Z}$. Wegens $m < n$ is dit hier voor $d = c - b$ het geval indien $b \neq c$. We zien dat de som niet van P afhangt. We kunnen de som exact bepalen door op te merken dat $\sum_{a+2b=m} \frac{m!}{a!b!b!} 2^a$ de coefficient van de constante term is in $(z + 2 + z^{-1})^m$. Deze is gelijk aan de coefficient van z^m in $(z^2 + 2z + 1)^m = (z+1)^{2m}$, te weten $\binom{2m}{m}$. Concluderend zien we dat

$$n \sum_{a+2b=m} \frac{m!}{a!b!b!} 2^a = n\binom{2m}{m}.$$

Opgave 2000/3-B

Een functie $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ wordt een *veeltermbijectie* genoemd indien voldaan is aan de volgende drie voorwaarden:

1. f is een bijectie.
2. f wordt uitgedrukt door middel van veeltermfuncties, dat wil zeggen

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (p_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), p_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, p_n(x_1, x_2, \ldots, x_n))$$

   voor zekere polynomen (veeltermen) $p_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $1 \leq i \leq n$.
3. De inverse functie f^{-1} wordt ook uitgedrukt door middel van veeltermen.

De verzameling $V(\mathbf{R}^n)$ van alle veeltermbijecties van $\mathbf{R}^n$, voorzien van de bewerking $\circ$ (samenstellen van functies), vormt een groep. De graad $\deg(f)$ van een veeltermbijectie f is het maximum van de graden van de veeltermen p_i ($1 \leq i \leq n$) waarmee f wordt uitgedrukt.

Gevraagd:

a. Wat is $V(\mathbf{R}^1)$?

b. Geef een voorbeeld van een injectief groepsmorfisme $\varphi : (\mathbf{R}\backslash\{0\}, \cdot) \to (V(\mathbf{R}^2), \circ)$ zó, dat er een $r \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$ bestaat met $\deg(\varphi(r)) > 1$.

c. Geef een voorbeeld van een groepsmorfisme $\psi : (\mathbf{Z}, +) \to (V(\mathbf{R}^2), \circ)$ zó, dat $\forall M \in \mathbf{N}$ $\exists z \in \mathbf{Z}$ met $\deg(\psi(z)) \geq M$.

Oplossing Onderdeel a. We laten zien

$$V(\mathbf{R}) = \mathrm{Aff}(\mathbf{R}) = \{x \mapsto ax + b : \ a \in \mathbf{R}\backslash\{0\},\ b \in \mathbf{R}\},$$

de verzameling van alle inverteerbare affiene afbeeldingen van de reële rechte.

Het is duidelijk dat $\mathrm{Aff}(\mathbf{R}) \subseteq V(\mathbf{R})$. Zij omgekeerd een $f \in V(\mathbf{R})$ gegeven. Er bestaat dan een veeltermfunctie $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ met $f \circ g = g \circ f = 1_{\mathbf{R}}$, waarbij $1_{\mathbf{R}}(x) := x$ voor alle $x \in \mathbf{R}$. Daar f en g beide veeltermfuncties zijn in één variabele, geldt $\deg(f \circ g) = \deg(f) \cdot \deg(g)$. (Merk op dat de situatie dat $f \equiv 0$ of $g \equiv 0$ niet kan voorkomen.) Anderzijds is ook $\deg(f \circ g) = \deg(1_{\mathbf{R}}) = 1$, waaruit volgt dat $\deg(f) = \deg(g) = 1$, met andere woorden, $f \in \mathrm{Aff}(\mathbf{R})$.

UWC
oplossingen

Onderdeel b. Definieer $\varphi : \mathbf{R}\backslash\{0\} \to V(\mathbf{R}^2)$ door $\varphi(r) := p_r$, waar $p_r : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ gegeven is door

$$p_r(x,y) := \left(x + y^2 \ln|r|,\ \frac{r}{|r|}y\right).$$

Het is duidelijk dat $\deg(\varphi(r)) = 2$ voor alle $r \neq \pm 1$. Uit $(p_r)^{-1} = p_{r^{-1}}$ volgt dat p_r een veelterm*bijectie* is. Om na te gaan dat φ aan de gevraagde voorwaarden voldoet, moeten we enkel nog nagaan dat $p_{rs} = p_r \circ p_s$. Maar dit volgt uit

$$\begin{aligned}(p_r \circ p_s)(x,y) = p_r(p_s(x,y)) &= p_r\left(x + y^2 \log|s|,\ \frac{s}{|s|}y\right)\\ &= \left(x + y^2(\log|s| + \log|r|),\ \frac{rs}{|rs|}y\right) = p_{rs}(x,y).\end{aligned}$$

Onderdeel c. Definieer $p \in V(\mathbf{R}^2)$ door $p(x,y) = (y,\ x+y^2)$. Merk op dat $p^{-1}(x,y) = (y - x^2,\ x)$, zodat p een veeltermbijectie is. We kunnen nu eenvoudig een morfisme $\psi(\mathbf{Z},+) \to (V(\mathbf{R}^2),\circ)$ definiëren door $\psi(z) = p^z$, waarbij p^z wordt uitgerekend in de groep $(V(\mathbf{R}^2),\circ)$. Er geldt

$$p^2(x,y) = p(p(x,y)) = (y^2 + x,\ y^4 + x^2 + 2xy^2 + y).$$

We beweren nu dat voor alle $n \in \mathbf{N}_0$ geldt:

$$p^{2n}(x,y) = (y^{2^{2n-1}} + q_n(x,y),\ y^{2^{2n}} + r_n(x,y))$$

waarbij $q_n(x,y)$ een veelterm is van graad $< 2^{2n-1}$ en $r_n(x,y)$ een veelterm is van graad $< 2^{2n}$. We bewijzen dit door volledige inductie naar n. Voor $n = 1$ hoeven we slechts te kijken naar de uitdrukking voor p^2 hierboven. Laat nu $n \geq 2$ gegeven zijn en neem aan dat de bewering juist is voor alle waarden strikt kleiner dan n. Met enig rekenwerk vinden we:

$$\begin{aligned}p^{2n}(x,y) = p^2(p^{2(n-1)}(x,y)) &= p^2\left(y^{2^{2n-3}} + q_{n-1}(x,y),\ y^{2^{2n-2}} + r_{n-1}(x,y)\right)\\ &= \left(y^{2^{2^n-1}} + q_n(x,y),\ y^{2^{2n}} + r_n(x,y)\right)\end{aligned}$$

waarbij q_n en r_n aan de gestelde voorwaarden voldoen. Hiermee is aangetoond dat ψ een morfisme is met de verlangde eigenschappen.

Opgave 2000/3-C

Bij een priemgetal $p \geq 3$ definiëren we een functie $\chi_p : \mathbf{Z} \to \{-1,0,1\}$ door middel van

$$\chi_p(a) := \begin{cases} (\frac{a}{p}) \text{ als } p \nmid a, \\ \ 0 \ \text{ als } p \mid a, \end{cases}$$

waarbij $(\frac{a}{p})$ het welbekende Legendre-symbool is. Verder definiëren we voor m, $n \in \mathbf{N}$: $s(m) := \sum_{a=0}^{m} \chi_p(a)$ en $S(n) := \sum_{m=0}^{n} s(m)$. Toon aan:

a. $\quad S\left(\frac{p-1}{2}\right) = \frac{p+3}{6} \cdot s\left(\frac{p-1}{2}\right) \quad$ als $p \equiv 3 \pmod 8$;

b. $\quad S\left(\frac{p-1}{2}\right) = \frac{p+1}{2} \cdot s\left(\frac{p-1}{2}\right) \quad$ als $p \equiv 7 \pmod 8$.

Oplossing De volgende oplossing is ontleend aan de inzending van het team van Bart Rodrigues. Wegens

$$S(n) = \sum_{m=0}^{n} s(m) = \sum_{m=0}^{n}\sum_{k=0}^{m} \chi(k) = \sum_{k=0}^{n} (n+1-k)\chi(k)$$

geldt voor elk oneven priemgetal p, met $p^* := (p-1)/2$,

$$S(p^*) = \sum_{k=0}^{p^*} (p^* + 1 - k)\chi(k) = \frac{p+1}{2} s(p^*) - \sum_{k=0}^{p^*} k\chi(k).$$

UWC oplossingen

Met behulp van deze gelijkheid ziet men eenvoudig in dat het voldoende is aan te tonen dat
$$\sum_{k=0}^{p^*} k\chi(k) = \begin{cases} \frac{p}{3}s(p^*), & \text{als} \quad p \equiv 3 \bmod 8, \\ 0, & \text{als} \quad p \equiv 7 \bmod 8. \end{cases}$$

Nu is, gebruikmakend van de periodiciteit en de volledige multipliciteit van χ en het feit dat in onze gevallen $\chi(-1) = -1$,
$$\sum_{k=0}^{p-1} k\chi(k) = \sum_{k=0}^{p^*} k\chi(k) + \sum_{k=0}^{p^*} (p-k)\chi(p-k) = 2\sum_{k=0}^{p^*} k\chi(k) - p\sum_{k=0}^{p^*} \chi(k).$$

Ook is
$$\sum_{k=0}^{p-1} k\chi(k) = \sum_{k=0}^{p^*} 2k\chi(2k) + \sum_{k=0}^{p^*} (p-2k)\chi(p-2k) = \chi(2)\left(4\sum_{k=0}^{p^*} k\chi(k) - p\sum_{k=0}^{p^*} \chi(k)\right).$$

Als $p \equiv 7 \bmod 8$, dan is zoals bekend $\chi(2) = 1$, met als gevolg dat
$$2\sum_{k=0}^{p^*} k\chi(k) - p\sum_{k=0}^{p^*} \chi(k) = 4\sum_{k=0}^{p^*} k\chi(k) - p\sum_{k=0}^{p^*} \chi(k).$$

Hieruit volgt dat $\sum_{k=0}^{p^*} k\chi(k) = 0$.
Als $p \equiv 3 \bmod 8$, dan is $\chi(2) = -1$, zodat
$$\sum_{k=0}^{p-1} k\chi(k) = -ps(p^*) + 2\sum_{k=0}^{p^*} k\chi(k) = ps(p^*) - 4\sum_{k=0}^{p^*} k\chi(k),$$

oftewel $6\sum_{k=0}^{p^*} k\chi(k) = 2ps(p^*)$.

Opgave 2000/3-ster Op het ster-vraagstuk ontvingen we twee inzendingen, van *Johan Bosman* en *Lenny Taelman*, die beide een correct bewijs gaven van de gevraagde identiteiten en de prijs van 100 Euro delen. Omdat beide oplossingen tot interessante generalisaties leiden, zullen Bosman en Taelman een gezamenlijke uitwerking publiceren in een volgend nummer van het Nieuw Archief voor Wiskunde.

Uitslag 3e editie
De weging van de opgaven is 3 : 4 : 5.

	Naam	A	B	C	*Totaal*
1.	Johan Bosman (Utrecht)	12	8	12	128
2.	Lenny Taelman (Gent)	8	7	12	112
3.	Bart Rodrigues e.a. (Leuven)	7	7	12	109
4.	Jan Tuitman (Groningen)	8	4	12	100
5.	Filip De Smet (Gent)	11	4	2	59

Ladderstand Universitaire Wiskunde Competitie na twee rondes
Bij gelijk puntenaantal is alfabetisch gerangschikt.

	Naam	*Punten*
1.	Bart Rodrigues e.a. (Leuven)	203
2.	Steven Lippens (Gent)	191
3.	Herbert Beltman (Twente)	177
4.	Filip de Smet (Gent)	155
5.	Joeri Van der Veken e.a. (Leuven)	127