

Anne van Streun

Bèta didactiek, Rijksuniversiteit Groningen

Nijenborgh 4, 9747 AG Groningen

A.van.Streun@math.rug.nl

Hoe staat ons Nederlands

In de laatste jaren is de discussie over de kwaliteit van het Nederlandse wiskundeonderwijs verscherpt. Wiskundigen schimpen op de basisvorming voor het vak wiskunde, het ministerie roept trots uit dat Nederland het goed doet in internationale vergelijkingen en het Freudenthal Instituut kent zich een voortrekkersrol toe in de ontwikkeling van het wiskundeonderwijs; wereldwijd, te beginnen in Nederland. Intussen worstelen de eerstegraads leraren in de tweede fase havo-vwo met tegenstrijdige tendensen, die het hen soms heel moeilijk maken nog iets goeds van hun onderwijs te maken.

Waar staan wij eigenlijk met ons wiskunde-onderwijs voor de leeftijdsgroep van 12–16 jarigen? Waar gaan we naar toe? Naar mijn overtuiging bevinden wij ons op een kritiek moment in de geschiedenis van het Nederlandse wiskundeonderwijs en hebben we alle energie en creativiteit nodig om de kwaliteit te behouden en hier en daar te versterken.

In dit artikel gaat het over de verschuiving van wiskundeonderwijs voor een kleine deelgroep van de leerlingenpopulatie naar wiskundeonderwijs voor (nagenoeg) iedereen. Over de resultaten voor die algemeen vormende wiskunde wordt regelmatig in internationaal vergelijkend onderzoek gerapporteerd. Na een analyse van dat onderzoek rijst de vraag hoe goed Nederland het doet in de voortgezette wiskunde. Zo komen we terecht bij de vraag wat we eigenlijk met ons wiskundeonderwijs willen bereiken en hoe het er voorstaat in de nieuwe situatie van het studiehuis. Wat wordt het effect van de terugtrekkende leraar? Welke kansen bieden praktische (onderzoeks)opdrachten en ICT voor het ontwerpen van onderwijs, waarin waardevolle wiskundige activiteiten worden nagestreefd? Ter afsluiting is een aantal stellingen geformuleerd met het oog op het realiseren van een gewenste situatie in het wiskundeonderwijs voor 12–18 jarigen.

Verbreiding van de leerlingenpopulatie

De belangrijkste ontwikkeling in het onderwijs gedurende de laatste honderd jaar is ongetwijfeld de verbreding van de doelgroep van een kleine elite tot de gehele populatie van meisjes en jongens van 12–18 jaar. Daarmee parallel steeg het percentage leerlingen dat onderwijs

in de wiskunde krijgt tot nagenoeg 100% op de leeftijd van 16 jaar. Smid (2000) haalt in het jubileumboek van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren Honderd jaar Wiskundeonderwijs (Goffree, Van Hoorn, Zwaneveld, 2000) aan dat een CBS-statistiek in 1954 vermeldt dat 12,3% van de leerlingen naar het vmo (hbs en gymnasium) ging, 30,6% naar de ulo, 34,1% naar het nijverheidsonderwijs en 23% volgde geen secundair onderwijs. De exacte richtingen van het vmo trokken naar schatting 6 à 7% van de gehele populatie.

Op dit moment is wiskunde verplicht tot en met 3 of 4 mavo-vbo en in de gehele bovenbouw havo-vwo. Bij het verlaten van het voortgezet onderwijs met een diploma was in 1998 de verdeling van de populatie ruwweg 17% vwo, 23% havo, 27% mavo en 33% vbo. De algemeen vormende wiskunde loopt dan door tot en met wiskunde A op het havo, terwijl wiskunde A op het vwo een positie tussen algemeen vormend en exact inneemt. Het percentage leerlingen met een eindexamenvak wiskunde B was op het havo 25% (dus 5,8% van de gehele populatie) en op het vwo 40% (6,8% van de gehele populatie). In totaal kiest al jaren een 13% van de gehele populatie voor wiskunde B, advanced mathematics in termen van het internationaal vergelijkend onderzoek TIMSS. Dat is ongeveer twee keer zoveel als het percentage leerlingen dat in 1953 op hbs of gymnasium de exacte richting koos. In de nieuwe tweede fase ligt dat percentage iets hoger, naar het zich nu laat aanzien.

De tabellen 1 en 2 geven inzicht in de percentages leerlingen die op dit moment in de tweede fase havo en vwo de verschillende profielen kiezen. Tegelijk is kort omschreven wat het minimale wiskundepakket is dat de leerlingen in een bepaald profiel moeten volgen.

TIMSS

Het meest bekende internationaal vergelijkende onderzoek is de TIMSS, wat staat voor Third International Mathematics and Science Study. Onlangs is het resultaat van de wiskunde- en sciencetoets uit 1999 voor leerjaar 2, een herhaling van 1995, gepubliceerd. De bekende Pavlov-reacties zijn al weer gesignaleerd. Het ministerie van OCenW roept tevreden in haar persbericht dat Nederland aan de top

wiskundeonderwijs ervoor?

staat en het Freudenthal Instituut verklaart bij monde van prof.dr. J. de Lange in de Volkskrant dat die toets helemaal niets voorstelt. Het gaat immers om platte toetsopgaven die leerlingen uit alle landen kunnen maken en daarmee komt het unieke, baanbrekende, karakter van het Nederlandse wiskundeonderwijs niet tot zijn recht. Daarmee wordt gemakshalve voorbij gegaan aan het feit dat de betrokken Nederlandse wiskundeleraren wel vinden dat de toetsopgaven goed bij hun onderwijs passen. En dat de alternatieve nationale toets, voor afname in 1995 ontwikkeld met behulp van het CITO en het Freudenthal Instituut, niets anders bleek te meten dan de internationale toets (Kuiper, Bos en Plomp, 1997). Voor de liefhebber zijn alle opgaven overigens te vinden op de website van TIMSS.

Hoe goed doet onze algemeen vormende wiskunde het?

Het is naar mijn mening wel degelijk de moeite waard om het gedegen werk van TIMSS nader te bestuderen. We beginnen met de resultaten op de toetsen over algemeen vormende wiskunde aan het einde van het voortgezet onderwijs, als de leerlingen ongeveer 18 jaar zijn. Op grond van het feit dat Nederland heeft gekozen voor een lange en brede

algemene vorming, met daarin die algemeen vormende wiskunde (nagenoeg) verplicht tot 16 jaar en daarna ook nog veel gekozen, mogen we verwachten dat Nederland hoog scoort. Dat klopt. Zie tabel 3. Deze tabel en de andere tabellen van dit type zijn ontleend aan grotere tabellen (met meer landen) uit de TIMSS rapporten. (Significantie is berekend op 0,05 niveau en gebaseerd op een meervoudige vergelijking van paren landen.)

Bedenk wel dat de steekproef uit de gehele populatie is getrokken, zodat elders ook leerlingen in de steekproef voorkomen die al jaren geleden hun wiskunde hebben laten vallen. Het recent gepubliceerde resultaat voor 14-jarigen (Bos en Vos, 1999) laat zich mooi vergelijken met de resultaten op dezelfde toets in 1995. Zie daarvoor tabel 4. Het resultaat van 1995 verschilt amper van dat van 1999. Nederland zit beslist niet in de kopgroep met Japan, Korea en Singapore, maar staat daaronder op hetzelfde niveau als elf andere landen zoals Hongarije, Canada, Australië, Rusland, Finland, Bulgarije. Het persbericht van het ministerie spreekt van de zevende plaats en van een verbetering vergeleken met vier jaar geleden. Bij bestudering van het rapport

| Havo 23% v.d. populatie | Inhoud programma | Doelgroep |
|-------------------------|--|--|
| Wiskunde A1 | Funcities, kansrekening en beschrijvende statistiek | Profiel Cultuur en Maatschappij 30% havo of 6,9% populatie |
| Wiskunde A1,2 | Uitbreiding van A1 met toegepaste analyse en de binomiale verdeling | Profiel Economie en Maatschappij 39% havo of 9,0% populatie |
| Wiskunde B1 | Funcities, kansrekening en statistiek met binomiale en normale verdeling en toegepaste analyse. | Profiel Natuur en Gezondheid 16% havo of 3,7% populatie |
| Wiskunde B1,2 | Uitbreiding van B1 met meer analyse en inwisen van de kansrekening en statistiek voor ruimtemeetkunde. | Profiel Natuur en Techniek 15% havo of 3,5% populatie |

Tabel 1 De wiskunde in de tweede fase havo

| Vwo 17% v.d. populatie | Inhoud programma | Doelgroep |
|------------------------|--|---|
| Wiskunde A1 | Funcities, kansrekening, grafen en matrices en statistiek. | Profiel Cultuur en Maatschappij 18% vwo of 3,1% populatie |
| Wiskunde A1,2 | Uitbreiding van A1 met toegepaste analyse, lineair programmeren, discrete dynamische modellen. | Profiel Economie en Maatschappij 35% vwo of 6,0% populatie |
| Wiskunde B1 | Toegepaste analyse met differentiaalvergelijkingen, kansrekening en statistiek. | Profiel Natuur en Gezondheid 28% vwo of 4,8% populatie |
| Wiskunde B1,2 | Uitbreiding van B1 met Euclidische meetkunde en rijen. | Profiel Natuur en Techniek 19% vwo of 3,2% populatie |

Tabel 2 De wiskunde in de tweede fase vwo

| Land | Nederl. | Denem. | Frank. | Canada | Oosten. | Duitsl. | Ver. St. |
|----------|---------|--------|--------|--------|---------|---------|----------|
| Nederl. | | ○ | △ | △ | △ | △ | △ |
| Denem. | ○ | | △ | △ | △ | △ | △ |
| Frank. | ▽ | ▽ | | ○ | ○ | △ | △ |
| Canada | ▽ | ▽ | ○ | | ○ | △ | △ |
| Oosten. | ▽ | ▽ | ○ | ○ | | △ | △ |
| Duitsl. | ▽ | ▽ | ▽ | ▽ | ▽ | | △ |
| Ver. St. | ▽ | ▽ | ▽ | ▽ | ▽ | ▽ | |

Tabel 3 Paarsgewijze vergelijking van de scores op de algemeen vormende wiskunde, aan het einde van het secundair onderwijs op de leeftijd van 18 jaar

Legenda: △ : significant hoger gemiddelde dan het daarmee vergeleken land
○ : geen significant verschil
▽ : significant lager gemiddelde dan het daarmee vergeleken land

blijken beide proclamaties statistisch niet significant te zijn. Van de dertig deelnemende landen zit Nederland in de groep van 6 tot en met 12, ex aequo.

In tabel 5 staat het resultaat van dezelfde jaargroep uit 1999 vier jaar eerder, toen ze in groep 6 zaten. Het is wel opvallend en significant dat Nederland in die vier jaar is gezakt uit de kopgroep van Aziatische tijgers naar een niveau lager. Dat lijkt mij een nader onderzoek in Nederland waard. Wat is er in die laatste jaren van de basisschool en in de basisvorming gebeurd?

| Land | Japan | Nederl. | Hong. | Canada | Ver.St. | Engel. |
|---------|-------|---------|-------|--------|---------|--------|
| Japan | | △ | △ | △ | △ | △ |
| Nederl. | ▽ | | ○ | ○ | △ | △ |
| Hong. | ▽ | ○ | | ○ | △ | △ |
| Canada | ▽ | ○ | ○ | | △ | △ |
| Ver.St. | ▽ | ▽ | ▽ | ▽ | | ○ |
| Engel. | ▽ | ▽ | ▽ | ▽ | ○ | |

Tabel 4 Paarsgewijze vergelijking van de scores op de algemeen vormende wiskunde, toetsafname in 1995 en in 1999, 14 jaar

| Land | Japan | Nederl. | Hong. | Canada | Ver.St. | Engel. |
|---------|-------|---------|-------|--------|---------|--------|
| Japan | | ○ | △ | △ | △ | △ |
| Nederl. | ○ | | △ | △ | △ | △ |
| Hong. | ▽ | ▽ | | △ | △ | △ |
| Canada | ▽ | ▽ | ▽ | | ○ | ○ |
| Ver.St. | ▽ | ▽ | ▽ | ○ | | ○ |
| Engel. | ▽ | ▽ | ▽ | ○ | ○ | |

Tabel 5 Paarsgewijze vergelijking van de scores op de algemeen vormende wiskunde, 1995, 10 jaar.

Mijn conclusie is dat wij ons in Nederland geen zorgen hoeven te maken over het peil van de basiskennis op het gebied van de algemeen vormende wiskunde. De vraag blijft of wij (voor alle leerlingen) tevreden mogen zijn over het bereiken van deze eenvoudige leerdoelen, voor alle leerlingen. Niet voor niets blijkt uit de evaluatie van de basisvorming dat er (veel) meer differentiatie naar (denk)niveau nodig is om de potentiële mogelijkheden van leerlingen te ontwikkelen.

Voortgezette wiskunde

Universitaire bètawetenschappers klagen regelmatig over het lage peil van de instromende studenten, over de geringe aantrekkingskracht van hun studies en dus (!) over het bèta-onderwijs in het vwo. Laten we

maar even afzien van de oude historie van dergelijke klachten, zie hiervoor het jubileumboek Honderd jaar Wiskundeonderwijs, en van het gebrek aan logische bewijsvoering. Het gaat die wetenschappers dan met name om de voortgezette wiskunde, natuurkunde en scheikunde. Hoe doet Nederland het op dat gebied? Kan het ministerie van OCenW dan nog zo tevreden zijn? Helaas doet Nederland juist voor die leeftijdsgroep niet mee aan TIMSS! Dat is inderdaad jammer, want het ligt voor de hand dat de brede algemene vorming met een internationaal record aan verplichte vakken ten koste zal gaan van de diepgang. Hoe staat dat er voor bij andere landen?

In tabel 6 is de volgorde voor advanced mathematics (calculus, geometry, equations) voor een aantal landen samengevat op de leeftijd van 18 jaar. Frankrijk is nu de onbetwiste koploper. Vergeleken met de algemeen vormende wiskunde op die leeftijd rukt Rusland uit de regionen waar de Verenigde Staten (tabel 2) daar staat op naar de tweede plaats! Voor een goede interpretatie moet natuurlijk rekening worden gehouden met het percentage leerlingen dat een vorm van voortgezette wiskunde volgt. Zie tabel 7. (Rusland kent een heel lage participatiegraad van 2%.)

Het is duidelijk dat Frankrijk, Denemarken en Canada het goed doen, ook als je rekening houdt met de participatiegraad. De onderlinge rangorde verandert niet als van elk land alleen de top 10% wordt genomen, dus een hoog percentage leerlingen dat voortgezette wiskunde kiest behoeft de prestatie (van de top 10%) niet te drukken.

Waar schatten we nu Nederland in? De participatie in wiskunde B op havo en vwo was de laatste jaren ongeveer 13 %, de nieuwe natuurprofielen trekken ongeveer 15% van de populatie. Niet erg hoog vergeleken met de omringende landen. De complicatie in Nederland is Wiskunde A1,2, met wat calculus. De advanced mathematics, zoals dat door TIMSS is gedefinieerd, omvat veel meer calculus en ook meetkunde en algebraïsch oplossen van vergelijkingen. De twee laatste onderwerpen komen niet in wiskunde A1,2 voor. Rekenen we de keuze voor wiskunde A1,2 voor een deel mee dan kunnen we wel zeggen dat Nederland zeker gemiddeld meedoet in de participatie aan de voortgezette wiskunde.

Het discussiepunt is natuurlijk het niveau of de diepgang van de meer exacte wiskunde. Een vergelijking van eindexamenopgaven (Van Streun 1994, AFT 1997) geeft aan dat de toptanden in het TIMSS onderzoek voor advanced mathematics duidelijk meer variatie in examenopgaven kennen en een grotere moeilijkheidsgraad. Van de collega's van de schoolvakken natuurkunde en scheikunde hoor ik soortgelijke geluiden. In ieder geval was het de bedoeling om in de vwo-vakken die specifiek voor Natuur en Techniek zijn ontworpen, dus wiskunde B2, natuurkunde B2 en scheikunde B2, door te stoten naar een hoger niveau met een meer exact of natuurwetenschappelijk karakter dan in de oude situatie met de veel bredere doelgroep mogelijk was. Wat komt daar van terecht?

Wat willen we eigenlijk bereiken?

De onlangs op de leeftijd van 106 jaar overleden historicus en wiskundige Dirk Struik beschrijft in het jubileumboek Honderd jaar Wiskundeonderwijs zijn wiskundeonderwijs op de hbs, omstreeks 1910. Onder het kopje: 'Waarom wiskunde op school?' vinden we de volgende typeering.

"Het wiskundeonderwijs was uitstekend, omvatte rekenen (worteltrekking, logaritmen), algebra (tot tweedegraadsvergelijkingen), vlakke en ruimtelijke meetkunde (van driehoeken en cirkels tot bollen en veel-

vlakken) volgende de Griekse methode (axioma's, bewijs, enzovoort), gonio- en trigonometrie (heel wat gereken). We vroegen ons wel eens af waar al die wiskundige geleerdheid nu eigenlijk goed voor was. Dan werd wel gewezen naar de sterrenkunde, de natuurkunde of de werktuigkunde, of we hoorden dat de wiskunde goed was om het verstand te scherpen. Vele leerlingen die het nu eenmaal aan belangstelling voor sterren en hellende vlakken ontbrak, en die ten aanzien van dat verstand scherpen een zeker voorbehoud hadden, vonden dat die wiskunde eigenlijk een beetje buiten de menselijke werkelijkheid stond. Ikzelf behoorde tot de leerlingen die de wiskunde beoefende omdat ze er plezier in hadden."

Dit citaat geeft goed weer waar de discussie over de doelen van het wiskundeonderwijs in de laatste honderd jaar om draaide. Wiskunde om *toe te passen* in andere disciplines, wiskunde voor het *intellectuele genoeg*, wiskunde om het *verstand te scherpen*. In de werkelijkheid van het dagelijkse wiskundeonderwijs kregen de vaardigheden in het rekenen (met formules, algebraïsche vormen, gonio, meetkundige eigenschappen) de meeste tijd en aandacht. Dat kon ook goed worden getoetst op proefwerken en centrale examens en het laat zich goed trainen met veel oefeningen.

Het was de eminente wiskundige en didacticus Polya (1887–1985) die al in 1946 schreef dat het in *algemeen vormend* wiskundeonderwijs om twee hoofddoelen gaat. In de eerste plaats moeten leerlingen leren *problemen op te lossen*, hun hersens leren gebruiken. Wiskunde en meetkunde in het bijzonder zijn bijzonder geschikte terreinen om denkmethode onder de knie te krijgen. In de tweede plaats moeten leerlingen leren toegepaste situaties te formuleren in *wiskundige modellen*, zoals formules of vergelijkingen, want daar gaat het om bij het toepassen van wiskunde. Voor de wiskundige bewerking of analyse van die modellen huur je later, aldus Polya (in 1946), maar wiskundigen in. Tegenwoordig kun je daarvoor ook vaak wiskundige software inzetten.

In Nederland probeerde mevrouw Ehrenfest voor en na de tweede wereldoorlog het verstarde onderwijs in de meetkunde, gebaseerd op de Elementen van Euclides, te vitaliseren met een nieuw didactisch concept. Het ging haar niet om de meetkunde zelf, maar om het *wiskundig en logisch* denken, dat aan de hand van meetkundige problemen kan worden ontwikkeld. In dat denken, zegt zij, is het stellen van vragen inbegrepen, het zoeken van relaties en combinaties, het formuleren van vermoedens, het controleren en zoeken naar een sluitende redenering. Op die manier komt men tot een beter begrip van de zojuist gevonden relatie; men ziet hoe ze past in het totale beeld dat men bezig is op te bouwen. Tenslotte blijft het formuleren van het al gevonden bewijs over. Zij constateert dat het gangbare meetkundeonderwijs in haar tijd heel weinig doet aan het bewust ontwikkelen van deze wiskundige *denkactiviteiten*, maar vooral gericht is op het (onbegrepen) *reproduceren* van stellingen en bewijzen.

In de New Math beweging uit de zestiger jaren en in een groot deel van het universitaire wiskundeonderwijs domineerde de overtuiging dat leerlingen of studenten in de eerste plaats de wiskundige systemen en structuren, voorheen ontwikkeld en in boeken beschreven, moeten leren en op tentamens reproduceren. Daar past de rol van de docent als *uitlegger* en *overdrager* van die wiskunde bij terwijl de leerlingen en studenten moeten proberen te begrijpen wat er staat geschreven en door oefenen met opgaven in staat moeten zijn om de theorie en de technieken te reproduceren.

Onder invloed van prominente wiskundigen als Polya, Freudenthal, Kline en anderen is eveneens sinds de zestiger jaren een andere onderwijsvisie ontwikkeld, die stelt dat het niet gaat om het reproduceren van

| Land | Frank. | Denem. | Canada | Duitsl. | Ver.St. | Oosten. | Nederl. |
|---------|--------|--------|--------|---------|---------|---------|---------|
| Frank. | | △ | △ | △ | △ | △ | ? |
| Denem. | ▽ | | ○ | △ | △ | △ | ? |
| Canada | ▽ | | | △ | △ | △ | ? |
| Duitsl. | ▽ | ▽ | ▽ | | ○ | △ | ? |
| Ver.St. | ▽ | ▽ | ▽ | ○ | | ○ | ? |
| Oosten. | ▽ | ▽ | ▽ | ▽ | ○ | | ? |
| Nederl. | ? | ? | ? | ? | ? | ? | ? |

Tabel 6 Paarsgewijze vergelijking van de scores op de voortgezette wiskunde, 18 jaar.

| Land | Frank. | Denem. | Canada | Duitsl. | Ver.St. | Oosten. | Nederl. |
|-----------|--------|--------|--------|---------|---------|---------|---------|
| Adv.Math. | 20% | 21% | 16% | 26% | 14% | 33% | ? |

Tabel 7 Percentage leerlingen dat voortgezette wiskunde kiest

kant-en-klare wiskunde, maar om de wiskundige activiteiten zelf. Het gaat in die wiskunde als *menselijke activiteit* (Freudenthal) om het zelf opsporen van verbanden en stellingen, het zelf kiezen en aanpakken van een wiskundige onderzoeksvraag, het zelf leren axiomatiseren van een deelgebied, het zelf mathematiseren van een realistische probleemsituatie, het zelf exploreren, vermoedelijke eigenschappen formuleren en die vervolgens proberen te bewijzen.

Deze opvatting heeft nu in een bredere onderwijskundige kring voor allerlei vakgebieden ondersteuning gevonden in de *constructivistische* leertheorieën. Kort gezegd komen die er op neer dat kennisoverdracht niet mogelijk is maar dat kennis steeds opnieuw moet worden *geconstrueerd* door de lerende. Gebeurt dat laatste niet dan is er geen sprake van een zinvolle, geïntegreerde en functionele kennis, die wendbaar kan worden ingezet voor het oplossen van problemen. 'Knowledge how' is daarom veel belangrijker dan 'Knowledge what' (Polya).

Gaan we nog even terug naar de beschrijving van Dirk Struik aan het begin van deze paragraaf. Het algebraïsch rekenen, dat tot voor kort zo'n grote plaats in het wiskundeonderwijs innam, kan steeds meer worden overgelaten aan software. Zoals de cijfervaardigheid (bijvoorbeeld staartdelingen) als leerdoel op de basisschool is verdrongen door het handig rekenen met een rekenmachine, kan nu ook het wiskundig rekenen worden uitbesteed aan apparatuur. (Zoals bekend probeert in California een monsterverbond van reactionaire politici en conservatieve wiskundigen met een 'back to basics' leerplan die ontwikkeling terug te draaien. Weg met de calculators en computers.)

De toepassingsgebieden bepalen in Nederland nu in hoge mate de wiskundeprogramma's in de bovenbouw havo-vwo, met wiskunde A1,2 gericht op de gammawetenschappen en wiskunde B1,2 op de natuurwetenschappen en de technische wetenschappen. Het plezier dat Struik aan de wiskunde als hersenactiviteit beleefde was in zijn tijd met de leerstof van toen maar voor een beperkte groep leerlingen bereikbaar. Het recente statistiekproject van het CBS en de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, de Nationale Doorsnede (CBS, 2000) liet zien dat voor de leerlingen van leerjaar 1 en 2 de (algemeen vormende) wiskunde van de basisvorming na het vak gymnastiek het populairste schoolvak is. Dat heeft alles te maken met de genoemde menselijke activiteit, voor die leeftijdsgroep nu zo georganiseerd dat het leuk is om te doen.

De vraag blijft of in de basisvorming en de bovenbouw van havo-vwo het denken wordt bevorderd, leerlingen leren om problemen op te lossen, om de gewenste onderzoeksvaardigheden ontwikkelen. Het boeiende is nu dat de genoemde algemene doelen voor wiskunde-

onderwijs alles te maken hebben met de algemene vaardigheden, die in de tweede fase havo-vwo zo centraal zijn gesteld. En in de aanbevelingen van Polya of Ehrenfest (meer dan een halve eeuw geleden!) gaat het (in andere woorden) voortdurend over het bevorderen van *reflectie*, het *monitoren*, het *zelf construeren* van kennis, kortom over het ontwikkelen van *metacognitieve vaardigheden*! De kernvraag in de tweede fase havo-vwo is of het zal lukken om binnen de vakken de vakoverstijgende algemene vaardigheden te incorporeren.

Welke functie heeft de wiskundeleraar nog?

In de eerste jaren dat ik begon les te geven, vanaf 1964, zag het didactisch repertoire van de leraar wis- en natuurkunde er nog eenvoudig uit. Al doende leerde hij zijn vakkennis gebruiken om een goede uitleg te bedenken, een frontaal leergesprek bij geschikte problemen te leiden en adequaat zin en onzin uit de opgaven van het leerboek te onderscheiden. Dat leerboek bestond uit theorie die voor leerlingen in die vorm onbegrijpelijk was en uit heel veel opgaven. De docent als uitlegger van de voorgeschreven leerstof. Leerlingen werden geacht om op een bepaald moment kennis te reproduceren en algoritmen feilloos uit te voeren. De docent zorgde voor de kennisoverdracht en toetste of die overdracht gelukt was. Veel training op analoge opgaven leidde meestal tot bevredigende resultaten. In de les zelfstandig sommen laten maken was ook toen al heel gebruikelijk. Het korte termijn doel, slagen voor het examen of tentamen, werd bereikt.

Aan dit eenvoudige onderwijsmodel, gebaseerd op de rol van de docent als informatiedrager die kennis overdraagt, is in het voortgezet onderwijs een einde gekomen. Dit is niet de plaats voor een historisch overzicht, maar mijns inziens zijn vier factoren van belang.

- Allereerst de overtuiging dat kennis (met name begrip, inzicht, transfer) niet kan worden *overgedragen*, maar zelf door de lerende moet worden *geconstrueerd*.
- In de tweede plaats krijgen jongelui in onze cultuur buiten het onderwijs steeds meer de ruimte om *zelf* beslissingen te nemen en *zelf* verantwoordelijkheid te dragen. (Zie de baantjes, de reclame, de opvoeding thuis.) Daar past het overdrachtsmodel waarin alle sturende functies door de docent worden vervuld minder goed bij.
- In de derde plaats beschikken leerlingen mede als gevolg van de onderwijspolitiek (nadruk op *zelfstandig* werken) over begrijpelijk lesmateriaal en melden zij aan hun docent dat zijn uitleg niet nodig is. (Dat houdt maar op.) Mijn wiskunde-uitgever in Groningen vertelde mij dezer dagen dat tot zijn verbazing (en genoegen) de antwoorden- of uitwerkingenboekjes sinds kort net zo goed worden verkocht als de leerlingenboeken. Bijna iedere leerling in onder- of bovenbouw beschikt zelf over de uitwerkingen van de opdrachten. Dat schiet lekker op bij zelfstandig werken!
- Daar komt met groeiende impact de rol van computersoftware en internet bij. Niet alleen is er geen monopolie meer voor de leraar als informatiedrager, maar ook diens rol als *expert* staat ter discussie. Overal zie je gebeuren dat leerlingen handiger en sneller zijn met software, ook de vakgerichte software, dan hun docenten.

Mijn observatie is dat door externe factoren de vanzelfsprekende rol van de leraar als informatie(over)drager ter discussie staat. Het is onmiskenbaar dat een aantal functies van de wiskundeleraar worden overgenomen door het schriftelijk lesmateriaal (uitleg, antwoorden controleren) en de digitale hulpmiddelen (exploreren van een probleemsituatie, informatie opzoeken). Daar wordt door leraren verschillend op gereageerd. In het studiehuis komt de terugtrekkende leraar

veel voor, dat is de leraar die zich beperkt tot het individueel begeleiden van leerlingen, die gestuurd door het Programma van Toetsing en Afsluiting en de Studiewijzers zich door een rijstebrijberg van schriftelijke opdrachten werken. Aan de andere kant van het spectrum vind je de leraar die tegen de stroom in probeert zoveel mogelijk zijn oude lespatroon te handhaven. Daartussen bevinden zich de leraren die proberen van de soms sterk afgenomen contacttijd het beste te maken, soms klassikaal handelend op verzoek van leerlingen, soms naar eigen inzicht tegen een zekere weerstand in klassikale interactie organiserend. De onzekerheid over de eigen rol is daarbij groot. Ook de posities van de schoolleidingen variëren sterk, van 'Klassikale instructie mag niet meer' en een minimaal aantal contacturen tot 'Geen persoonlijke werktijd in het rooster'. De aandacht voor het bereiken van de vakgerichte leerdoelen is sterk afgenomen.

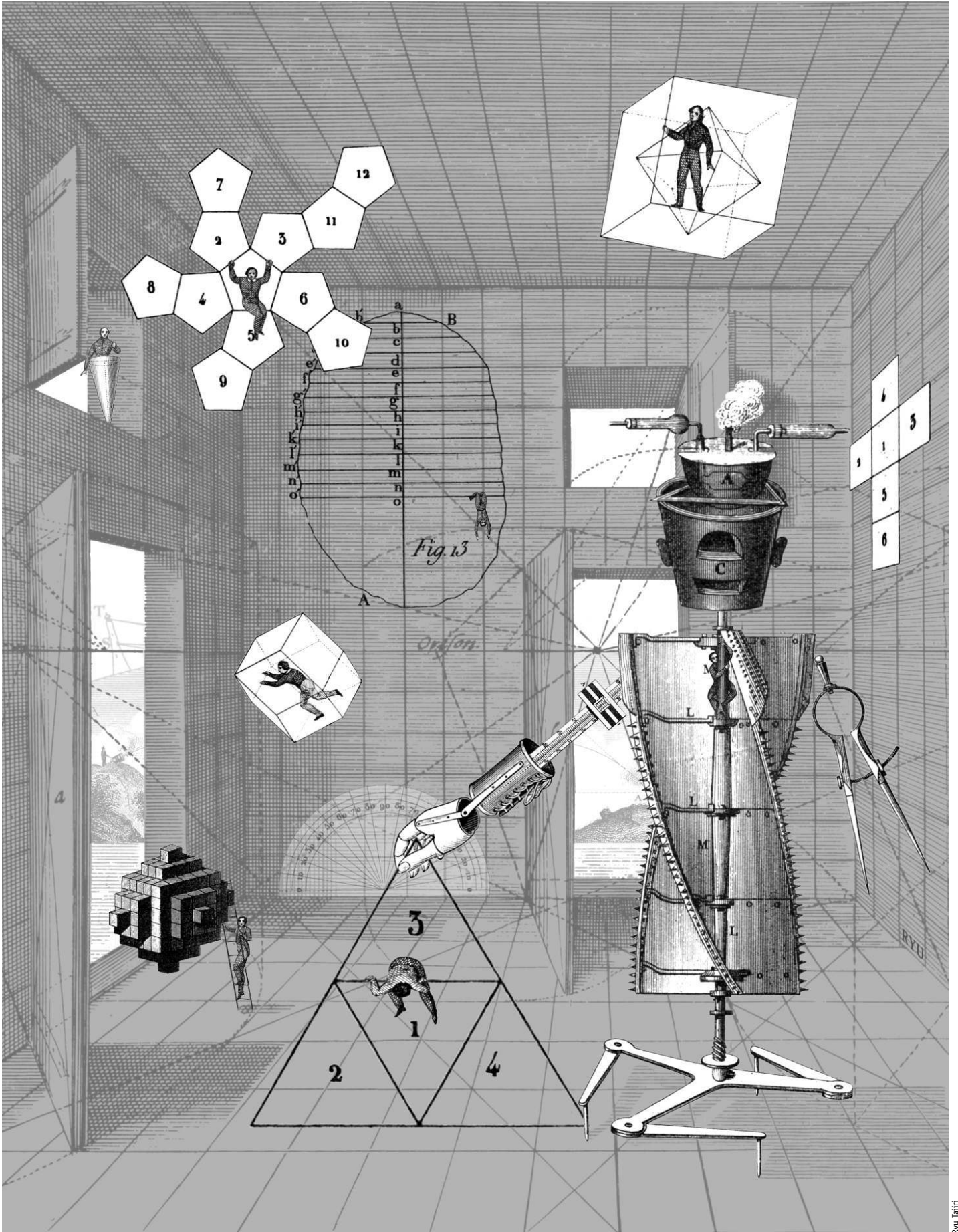
Engeland als afschrikwekkend voorbeeld

Onder invloed van theorieën over onderwijs in heterogene groepen schakelde ruim vijftien jaar geleden in Engeland het reken- en wiskundeonderwijs voor 11-16 jarigen massaal over op de individueel-zelfstandig-werken werkvorm. De docent werd *begeleider* en *organisator*. Het lesmateriaal was opgesplitst in kleine eenheden, die door leerlingen op eigen kracht en in eigen tempo werden doorgewerkt. Klappers met antwoorden en uitwerkingen stonden in elk lokaal, zelftoetsen waren beschikbaar en de leraar zat achter zijn bureau om de rij wachtende leerlingen met vragen over de tientallen verschillende onderwerpen één voor één af te handelen. Indertijd bezocht ik een dozijn scholen in verband met het verkrijgen van de rechten van de grootste Engels methode School Mathematics Project voor de Nederlandse bewerking Wiskunde Lijn. Verbazingwekkend hoe soepel de leerlingen erin slaagden hun eigen plannings te maken, zichzelf te corrigeren, enzovoort. *Organisatorisch perfect*. Het feit dat die leerlingen nog wel in hetzelfde lokaal zaten te werken als hun leraar voorkwam de vervreemding, die ontstaat als een hen onbekende (steeds wisselende) begeleider optreedt, zoals in sommige scholen in het studiehuis het geval is.

Het meest recente onderzoek naar de effecten van deze individueel-zelfstandig-werken werkvorm werd enige jaren geleden op de BBC gepresenteerd in een documentaire door prof.dr. David Burghes van Exeter. In het internationaal vergelijkend onderzoek scoort Engeland tegenwoordig veel lager dan in eerder onderzoek met vergelijkbare landen (TIMSS en het Kassel-onderzoek.) De conclusie van Burghes is dat de neergang in Engeland een gevolg was van de overgang naar nagenoeg *schriftelijk onderwijs* door het zelfstandig werken. Klassikale uitleg en vooral *interactie* rondom het expliciteren van concepten en probleemaanpak, hard nodig in een leerproces gericht op hogere leerdoelen, waren door de *organisatie* van het onderwijs onmogelijk geworden. De documentaire eindigde met zijn oproep aan leraren om weer meer interactief te onderwijzen: TEACHER TEACH! Zwaar gesponsord door grote bedrijven heeft zijn universiteit inmiddels een netwerk opgezet om leraren weer te trainen in werkvormen zoals klassikale instructie, een vraaggesprek of leergesprek leiden, interactief reflecteren op probleemaanpak, problem solving sessies leiden, enzovoort. Voorbeeldlessen op video, ontleend aan het Hongaarse (!) wiskundeonderwijs, worden gebruikt als model. (Zie de website van zijn instituut <http://www.ex.ac.uk/cimt> en Burghes, 2000.)

Het (wiskundig) denken bevorderen

Het is nu niet het moment om te proberen het wiskundig denken scherp te definiëren en te onderscheiden van het denken in het algemeen.



Daar zijn al boeken over vol geschreven. Waar het mij hier om gaat is om een onderscheid te maken tussen onderwijzen en leren dat gericht is op *reproductie* en onderwijs en leren dat het *productieve denken* stimuleert. De effecten van het eerste type kunnen heel goed in schriftelijke toetsen als van TIMSS worden gemeten. En vanouds past daar ook de imitatie-didactiek heel goed bij, voordoen-nadoen-oefenen. Op korte termijn, als die specifieke kennis en vaardigheden nog actueel beschikbaar zijn en er ruime oefentijd is ingezet, geeft dat ook redelijke resultaten. De basisstof in de schoolboeken richt zich daar in de praktijk op, zodat leerlingen in een lineair leerproces en zelfstandig werkend aan opgaven succes kunnen boeken op reproductieve toetsen. Binnen deze aanpak maakt het nog wel verschil of het schoolboek vanaf het begin mikt op de opbouw van een rijk cognitief schema of zich eerst beperkt tot het aanbrengen van geïsoleerde vaardigheden. Dus bijvoorbeeld eerst trainen op allerlei typen vergelijkingen, los van de relatie met grafieken, tabellen of functies of toepassingen versus een opbouw waarin alle betekenissen direct aan elkaar worden gekoppeld. In het laatste geval is transfer en overzicht beter te bereiken (Van Streun, 1989).

Voor het bereiken van inzicht, overzicht, probleemoplossingsbekwaamheden en onderzoeksvaardigheden is meer nodig. Van Schalkwijk (1998) geeft in zijn proefschrift prachtige voorbeelden van onderzoekend wiskunde leren, waarbij leerlingen al discussiërend er proberen achter te komen of de door hen geformuleerde stelling en het bewijs klopt. Zwaneveld (1999) laat in zijn proefschrift zien hoe belangrijk het is dat studenten en leerlingen overzicht gaan krijgen over de concepten en operaties op een deelgebied van de wiskunde. En hij constateert dat er aan dat verkrijgen van overzicht in havo-vwo te weinig gebeurt. In een bespreking van het nieuwe onderwerp Voortgezette Meetkunde uit wiskunde B2 (Van Streun 2000) wijs ik op de fraaie mogelijkheden om met behulp van de dynamische meetkundige software Cabri leerlingen te laten exploreren, vermoedens te laten formuleren en systematisch naar bewijzen te laten zoeken. (Zie bijvoorbeeld Moderne Wiskunde B2-1 1999.) Met de al eerder geciteerde denkers over wiskundeonderwijs (Polya, Kline, Ehrenfest, Freudenthal) en de toonaangevende onderwijspsychologen zijn deze en andere wiskundendidactici het er roerend over eens dat interactie met groepen leerlingen essentieel is om de noodzakelijke reflectie en gewenste niveauverhoging te realiseren. Maar past dat nog wel in de organisatie en de sfeer van het studiehuis?

Ontwerpen van het eigen onderwijs

Het wordt tijd om terug te komen op de rol van de docent in de nabije toekomst. Op dit moment trekt menig leraar in het studiehuis havo-vwo zich terug op de rol van individuele begeleider. Anderen (auteurs, uitgevers) hebben leermiddelen bedacht met uitwerkingen en software, de sectie en de schoolleiding maakten studiewijzers (veelal spoorboekjes voor de leerlingen), leerlingen en leraar lopen dat pad samen af. Ad hoc en niet gepland helpt zo'n leraar de leerlingen verder. In dat geval wordt het bedoelde interactieve onderwijs, met de leraar als rolmodel voor het leren oplossen van problemen en het leren leren en de leraar als intermediair om te komen tot niveauverhoging, niet gerealiseerd. In plaats daarvan komt een soort van *geprogrammeerde instructie*, waarin leerlingen hun best doen zo snel mogelijk van A naar B te komen door reeksen kleine opdrachten te maken. Dat gaat met name ten koste van de interactie met groepen leerlingen en daarmee volgens alle beschikbare onderwijspsychologische literatuur ten koste van het bereiken van de hogere leerdoelen, waarvoor interactieve reflectie en het expliciteren van concepten, denkmethoden, metacog-

nitieve vaardigheden en conceptmapping noodzakelijk zijn. Ook het reguliere lesmateriaal, geschikt gemaakt voor zelfstandig werken door opsplitsing in kleine hapklare brokjes en voorzien van uitwerkingen, leent zich veelal niet voor het bereiken van die hogere leerdoelen.

Het alternatief is dat docenten zich niet tevreden stellen met de rol van uitvoerder, maar als professionele vakmensen het *eigen* onderwijs gaan *ontwerpen*. Zelf actief werken aan niveauverhoging, onderzoeksopdrachten maken, practica ontwerpen, nieuwe mogelijkheden met computersoftware passend maken voor het eigen onderwijs, duidelijke niveaueisen stellen en leerlingen daarop beoordelen. Dat ontwerpen van het eigen onderwijs leidt tot een *verrijking* van het *didactisch repertoire* en het *vakmanschap* van de docenten. Professionele docenten zijn zeker te motiveren voor extra aandacht voor algemene vaardigheden als die sterk gekoppeld zijn aan hun vakgebied. De leerling of student als jonge onderzoeker, de docent als hun coach. De student die werkt aan geschikte opdrachten en problemen, soms individueel, maar vaker in duo's of kleine groepen. Op een natuurlijke manier doet zich de noodzaak voor om te *communiceren* en de resultaten van het werk te *presenteren* aan de andere studenten. Naar behoefte kan de docent helpen bij het zoeken naar de noodzakelijke informatie en vakinhoudelijke kennis, maar er is veel te vinden in handboeken, bibliotheken, databases en internet. Alles hangt af van de kwaliteit van de opdrachten die de docent heeft geformuleerd. Relevante vakkennis moet aan de orde komen als het er mede om gaat inzicht, kennis en vaardigheden op een bepaald vakgebied te verwerven. Ik denk niet alleen aan integrerende praktijkopdrachten, zoals bij probleemgestuurd onderwijs vaak het geval is, maar ook aan theoretische opdrachten die het inzicht in de theorie kunnen verdiepen. De winst van deze activerende werkwijze is dat direct voor studenten duidelijk is dat het niet alleen om de leerstof gaat, maar ook om de denkmethoden, het redeneren en argumenteren, de natuurwetenschappelijke methoden, de onderzoeksvaardigheden. Door de noodzaak om bij het werken aan opdrachten te plannen, het werk te verdelen, te communiceren, te presenteren en informatie op te zoeken zijn de algemene vaardigheden *functioneel* bij het verwerven van vakwetenschappelijke kennis, vaardigheden en inzichten.

De kansen met het N&T-profiel

In het eerder genoemde artikel (Van Streun 2000) merkte ik het volgende op.

“Voor het eerst sinds het verdwijnen van het vak wiskunde 2 op het vwo mogen wij, wiskundeleraren, weer wiskundeonderwijs verzorgen voor echte bètaleerlingen. En niet aan een heel klein keuzegroepje, zoals bij wiskunde 2, maar aan alle leerlingen die de keuze voor een technische of bètastudie open willen houden. Voor de toelating tot bijna alle natuurwetenschappelijke en technische universitaire studies is opname van het vak wiskunde B1,2 in het vakkenpakket immers verplicht, bijvoorbeeld in combinatie met het profiel Natuur en Gezondheid. Kennelijk hechten de wetenschappelijke disciplines veel waarde aan de manier van denken die in wiskunde B2 wordt ontwikkeld. Door die toelatingseisen heeft het vak wiskunde B2 een sleutelrol gekregen in de voorbereiding op een studie in de bètawetenschappen.

Kijken we naar het examenprogramma dan heeft de Voortgezette meetkunde de overrijde uitdunning van de programma's goed doorstaan. Binnen de beschikbare tijd moet het mogelijk zijn om met deze groep leerlingen een aantal van de geformuleerde hogere doelen te bereiken. Dat zal met vallen en opstaan gaan, omdat weinig wiskundeleraren nog ervaring hebben met de speciale didactiek van

Ter discussie

In dit artikel wordt veel overhoop gehaald. Zoals gebruikelijk in het onderwijs heeft alles met alles te maken. Het zij zo. Om de discussie te stimuleren formuleer ik mijn conclusies in een zestal stellingen, die vanuit een analyse van de huidige situatie in het onderwijs een gewenste situatie in de nabije toekomst beschrijven.

Stelling 1. Algemeen vormende wiskunde

Het peil van de *basiskennis* op het gebied van de algemeen vormende wiskunde voor iedereen is goed. Er is binnen de basisvorming (veel) meer differentiatie naar (denk)niveau nodig om de *potentiële* mogelijkheden van leerlingen te ontwikkelen.

Stelling 2. De terugtrekkende leraar

Als gevolg van de keuzes van het schoolmanagement, de misvattingen over zelfstandig werken en de door docenten ervaren overbelasting is het dominante beeld in veel scholen dat van de terugtrekkende leraar, die zich beperkt tot individuele begeleiding en uitvoering van door anderen bedacht onderwijs.

Stelling 3. Zelfsturing door leerlingen

Het leermiddelenpakket en in toenemende mate de computertechnologie maken het mogelijk dat leerlingen voor het leren van *rou-tinematige* kennis en vaardigheden in een lineair leerproces meer mogelijkheden hebben voor zelfsturing en een aantal klassieke functies van de leraar kunnen overnemen, zoals uitleggen, huiswerk controleren, informatie aandragen, toetsen.

Stelling 4. Interactie en reflectie onmisbaar

Interactie en reflectie onder leiding van de expert op het vakgebied is onmisbaar voor het bereiken van *hogere leerdoelen*, zoals het verwerven van inzicht in concepten en overzicht op het kennisdomein, het ontwikkelen van een goede probleemaanpak, het bevorderen van transfer en het verwerven van algemene vaardigheden, waaronder onderzoeksvaardigheden en informativaardigheden en samenwerkingsvaardigheden.

Stelling 5. De leraar als ontwerper

De intellectuele potentie en bagage van de professionele docent moet worden ingezet om inspirerende opdrachten te ontwerpen, die leerlingen intrinsiek motiveren tot intentioneel leren, om de leerprocessen bedoeld in stelling 3 te stimuleren. Universitaire disciplines kunnen daarbij helpen. De schoolorganisatie moet in de taakverdeling ruimte geven voor ontwerpactiviteiten, naast interactief lesgeven, individueel begeleiden en oppassen bij persoonlijke werktijd.

Stelling 6. Bèta-component versterken

De bèta-componenten in de tweede fase in de vakken wiskunde B2, natuurkunde 2 en scheikunde 2 voor de echte bèta-leerlingen moeten worden versterkt met behulp van de universitaire disciplines in de richting van het ontwikkelen van wiskundige en natuurwetenschappelijke denkmethoden en onderzoeksvaardigheden, waarbij speciale master classes een stimulerende rol kunnen spelen.

dit vak. Van het tweede domein, de Voortgezette analyse, is helaas weinig over gebleven. Helaas, omdat juist de verbinding met de gewone analyse is geschrapt. Wat overblijft is de studie van rijen als een afzonderlijk onderwerp, met een enkel uitstapje naar het oneindige. Wellicht zal in de komende jaren juist bij wiskunde B2 blijken dat er wel ruimte is voor het oorspronkelijke programma met heel interessante wiskundige en toegepaste problemen.

Zal er in ons onderwijs van het vak wiskunde B2 iets terecht komen van dat ontwikkelen van goede denkmethoden aan de hand van de voortgezette meetkunde en analyse? De voortekenen zijn gunstig. Uit een tiental nascholingsbijeenkomsten over de voortgezette meetkunde die wij in Groningen tot nu toe hebben gegeven zijn twee conclusies te trekken. Het is allereerst echt een vak waarbij je ook als leraar bij de opgaven je hersens weer moet gebruiken, want voor je het weet zit je op een verkeerd spoor. Niet eenvoudig dus om leerlingen te helpen bij het ontwikkelen van een goede aanpak en een correcte bewijsvoering. Wel uitdagend om te doen. Mijn tweede conclusie is dat ik de laatste 25 jaar op een nascholing nooit zoveel echt plezier in een 'nieuw' wiskundig onderwerp heb meegemaakt. Ik noem de verbetering om er zelf uit te willen komen, de voldoening als je een oplossing heb gevonden, de verassing bij het horen van een andere oplossing, het zoeken naar de meest elegante oplossing."


Helaas hebben de universiteiten (de technische universiteiten voorop) het laatste jaar op een onzinnige manier gemorrelt aan de toelatingseisen en daarmee aan de profielen. Nu zijn leerlingen van het vwo al zonder meer toelaatbaar met een Natuur en Gezondheid pakket. Typisch een voorbeeld van het ontbreken van transfer van het logisch denken uit de eigen discipline naar het onderwijspolitieke denken. Onzinnig want van de kennelijk gehoopte extra instroom naar de technische of natuurwetenschappelijke studies valt weinig goeds (kwantitatief en kwalitatief) te verwachten als die leerlingen op het vwo al niet een N&T-profiel kiezen!

Onzinnig in het licht van de steeds weer door dezelfde bestuurders herhaalde verwijt dat het vwo voor een betere aansluiting moet zorgen op het wo. Onzinnig omdat hierdoor het gehele profiel N&T op losse schroeven komt te staan. Het (geheime) bestuurlijke overleg met de VSNU over afschaffing van het N&T-profiel is op dit moment (december 2000) al begonnen. Daarmee dreigen de echte bètavakken met potentie, zoals wiskunde B2, natuurkunde 2 en scheikunde 2, in de schoolpraktijk nog verder (dure groeps grootte) te worden gemarginaliseerd of opgeheven.

Positieve stimulans vanuit de universitaire disciplines

In Nederland overheerst op het ogenblik het generalistische denken. Het strekt tot aanbeveling als een nieuwe minister van Onderwijs of van Verkeer en Waterstaat inhoudelijk geen vakman is. In veel scholen is het management doel op zich geworden en is er voor de vakontwikkeling door de vaksecties geen tijd meer. Niet een vakbekwame, algemeen gewaardeerde, eerstegraads docent wordt bevorderd tot schaal 12, maar het middenmanagement, de hulpjes van de centrale schoolleiding. Recent loopbaanonderzoek wees uit dat juist daardoor de academisch opgeleide leraren vergeleken met collega's in het bedrijfsleven of bij de overheid ver achterblijven in salarisperspectief. (Dat geldt niet voor door het hbo opgeleide docenten in vergelijking met hun hbo-collega's.) Ondanks dat beleven veel jonge wiskundeleraren nog veel voldoening in hun werk. (Zie onze website bij de referenties.) Maar rugdekking door de universitaire disciplines ter ondersteuning van het belang van de vakken is hard nodig.

Het is duidelijk dat disciplines als wiskunde, natuurkunde en scheikunde er alle belang bij hebben dat er een sterke relatie wordt ontwikkeld met het vwo en de leraren in die vakken. Die disciplines zijn de spraakmakende en invloedrijke groepen die het voor het vakmanschap van leraren moeten opnemen. Zij hebben de mogelijkheden om leraren te helpen om voor hun leerlingen opdrachten te ontwikkelen die inspirerend en motiverend een beeld geven van het wetenschappelijke werk in hun discipline. Zij werken in een goed ontwikkelde ICT-omgeving om goed materiaal voor websites te ontwikkelen. Zij kunnen via masterclasses in samenwerking met leraren rechtstreeks leerlingen bereiken.

Zij kunnen zich in het bijzonder druk maken over het belang van de echte bètacomponenten op school in de vakken wiskunde B2, natuurkunde 2, scheikunde 2. Zij kunnen hun afstuderende studenten, niet alleen in de Communicatie en Educatie variant maar ook in de P-variant voor onderzoekers, de opdracht geven om (populariserend) materiaal aan te leveren voor praktische opdrachten en profielwerkstukken, aan de hand waarvan leerlingen kunnen ervaren hoe boeiend die disciplines zijn. Samen met hun leraren kunnen de leerlingen dan ervaren dat er levenslang plezier te beleven is aan het (wiskundig en natuurwetenschappelijk) denken! 

Literatuur

- American Federation of Teachers, *What Students Abroad Are Expected To Know About Mathematics*, Washington, 1997.
- Bos, K., Vos, F.P., *Nederland in TIMSS 1999*. Universiteit Twente, 2000.
- Burghes, D., MEP: 'The First Three Years'. In: *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 2000, july 1st.
- Goffree, F., Hoorn, M. van, Zwaneveld, B., *Honderd jaar wiskundeonderwijs*, Leusden, 2000.
- Kuiper, W., Bos, K., Plomp, T.J., *De TIMSS nationale optietoets*. In: *Nieuwe Wiskrant*, 17, 1, 1997.
- Polya, G., *How to solve it*, Princeton, 1946.
- Schalkwijk, L.T.J.M. van, *Onderzoekend wiskunde leren*, dissertatie, Katholieke Universiteit Nijmegen, 1998.
- Smid, H.J., 'Wiskundeonderwijs in vergeten scholen'. In: Goffree, F., Hoorn, M. van, Zwaneveld, B., *Honderd jaar wiskundeonderwijs*, Leusden, 2000.
- Streun, A. van, *Heuristisch wiskundeonderwijs*, dissertatie, Rijksuniversiteit Groningen, 1989.
- Streun, A. van, 'Wiskunde B in de nieuwe profielen'. In: *Nieuwe Wiskrant*, 1994, 13, 4, 17-24.
- Streun, A. van, 'Euclides is terug. Van exploreren naar bewijzen'. In: *Euclides*, 75, 4, 2000.
- TIMSS, *Achievements reports*, Boston University. Zie de website.
- Zwaneveld, B., *Kennisgrafien in het wiskundeonderwijs*, dissertatie, Open Universiteit Nederland, 1999.
- Moderne Wiskunde, vwo, B2 deel1, Voortgezette meetkunde. Wolters Noordhoff, 1999.

Websites

- www.nationaledoorsnede.nl
Leerlingen over hun leven en onderwijs.
- www.ex.ac.uk/cimt/
Informatie over effecten van individueel zelfstandig werken en het Kassel project van het Centre for Innovation in Mathematics Teaching.
- www.ex.ac.uk/cimt/ijmtl/
Het vrij toegankelijke tijdschrift *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, met onder andere het artikel van David Burghes.
- www.timss.bc.edu
- www.nces.ed.gov/timss
Vanaf deze sites zijn rapporten te downloaden. Het recente Nederlandse rapport is op dit moment te downloaden van de website van het ministerie onder actueel, www.minocw.nl.
- www.math.rug.nl/didactiek
Op deze website komen jonge wiskundeleraren aan het woord over hun beroep en zijn voorbeelden te vinden van probleemstellingen en uitwerkingen van praktische opdrachten.