

Jan van de Craats

Koninklijke Militaire Academie  
Postbus 90154, 4800 RG Breda  
J.vd.Craats@mindef.nl

# Van vuurleidingstrainer naar vierdegraadsoppervlak

Jan van de Craats is hoogleraar wiskunde aan de Koninklijke Militaire Academie. Uit het onderstaande stukje van zijn hand blijkt dat vragen uit de militaire praktijk soms kunnen leiden tot de ontwikkeling van interessante toepassingen van de analytische meetkunde.

Ook na het opschorten van de opkomstplicht blijft een groot deel van de activiteiten van de krijgsmacht gericht op het oefenen van personeel in de omgang met wapensystemen. Zo is er het programma *Pelotons Vuurleiding Trainer* (PVT) waarmee tankbemanningen de effectiviteit van hun samenwerking kunnen verbeteren. Vanuit een stilstaande tank moet zo'n bemanning vuren op klapdoelen die in het veld opduiken. Het verloop van de oefening wordt vastgelegd via een verbinding met een centrale systeemcomputer die voor elk schot de stand van de loop registreert. Dat geschiedt door middel van twee hoeken, de *azimuthhoek* en de *elevatiehoek*, die vergeleken worden met de 'juiste' waarden, die van tevoren zijn bepaald.

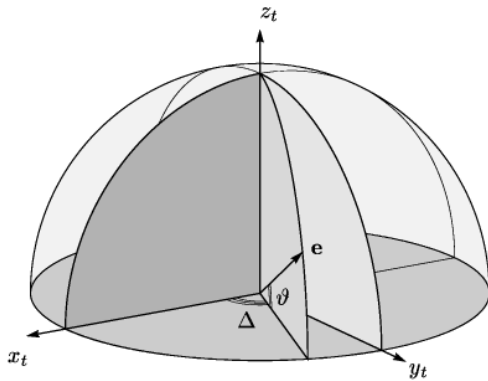
Tijdens onderzoek dat gericht was op het verbeteren van de hierbij gebruikte programmatuur rees de vraag hoe men in de praktijk de positie van de tank in een gegeven rechthoekig coördinatenstelsel kan bepalen als men de coördinaten van drie referentiepunten in het veld kent, alsmede de hoeken waaronder men de referentiepunten vanuit de tank ziet. Wanneer de tank zich bevindt in het door de referentiepunten bepaalde vlak, is dit een eenvoudige planimetrische opgave, maar wanneer alles zich afspeelt in geaccidenteerd terrein is de opgave minder triviaal. Met synthetische meetkunde komt men dan niet ver.

Een analytische aanpak leidt tot een stelsel van drie vierdegraadsvergelijkingen met drie onbekenden. Het numeriek oplossen van zo'n stelsel is voor computergebruikpakketten als MAPLE geen probleem. Zelfs voor een analytische oplossing blijkt MAPLE zijn hand niet om te draaien. Een wiskundige wil echter ook graag begrijpen wat er meetkundig aan de hand is, en weten of MAPLE geen oplossingen over het hoofd ziet. Het zoeken naar een antwoord op die vragen leidde tot interessante resultaten, die zelfs aanknopingspunten bieden met de meetkunde en de analyse op school.

## Azimut en elevatie

De tank beschikt over twee nauwkeurige hoekopnemers die samen de stand van de loop registreren. De ene meet de *azimuthhoek*  $\Delta$ , dat wil zeggen de draaiingshoek van de geschutskoepel, en de andere meet de *elevatiehoek*  $\vartheta$ , dat wil zeggen de hoek die de loop maakt met het draaiingsvlak. Staat de tank horizontaal opgesteld, dan is de azimuthhoek een hoek in het horizontale vlak, en de elevatiehoek de hoek die de loop met het horizontale vlak maakt. In figuur 1 zijn beide hoeken aangegeven; de vector  $\mathbf{e}$  is daarbij een eenheidsvector die de richting van de loop aangeeft. In rechthoekige 'tankcoördinaten'  $(x_t, y_t, z_t)$  geldt

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} \cos \Delta \cos \vartheta \\ \sin \Delta \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{pmatrix}.$$



**Figuur 1** De eenheidsvector  $\mathbf{e}$ , de elevatiehoek  $\vartheta$  en de azimuthoek  $\Delta$ .

Tankcoördinaten zijn dus met de tank verbonden bolcoördinaten. De nulwaarde van  $\Delta$ , die in wezen willekeurig gekozen kan worden, valt samen met de positieve  $x_t$ -as. De nulwaarde van  $\vartheta$  is echter niet vrij; die moet vallen in het draaiingsvlak van de tankkoepel. Het is eigenlijk net zoals bij geografische coördinaten op het aardoppervlak: de nulmeridiaan is willekeurig gekozen, maar de breedtecirkel van nul graden valt samen met de equator.

Als de tank de drie referentiepunten  $\mathbf{p}_1$ ,  $\mathbf{p}_2$  en  $\mathbf{p}_3$  aanricht, worden de azimuthoek  $\Delta_i$  en de elevatiehoek  $\vartheta_i$  van elk referentiepunt gemeten. Hiermee liggen de tankcoördinaten van de eenheidsvectoren  $\mathbf{e}_i$  in de bijbehorende richtingen vast. De inwendige producten  $\langle \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k \rangle$  leveren de cosinussen van de hoeken  $\delta_i$  waaronder men de referentiepunten vanuit de tank ziet:

$$\begin{aligned}\cos \delta_1 &= \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle, \\ \cos \delta_2 &= \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 \rangle, \\ \cos \delta_3 &= \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle.\end{aligned}$$

### Veldcoördinaten

Van de referentiepunten  $\mathbf{p}_i$  zijn de veldcoördinaten  $(p_i, q_i, r_i)$ , dat wil zeggen de coördinaten in een zeker aardgebonden rechtshoekig coördinatenstelsel, nauwkeurig bekend: ze zijn door een landmeetkundige dienst opgemeten. Bij aanvang van de oefening worden de tanks het oefenterrein opgereden. De veldcoördinaten van de positie van zo'n tank moeten dan ter plaatse door meting vanuit de tank worden vastgesteld. Als de vector  $\mathbf{c}$  de positie van de tank aangeeft, moeten de onbekende coördinaten  $(x, y, z)$  van  $\mathbf{c}$  dus berekend worden.

Wil men dit door hoekmeting vanuit de tank doen, dan kan men opnieuw gebruik maken van het inwendig product  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Er gelden immers drie betrekkingen van de vorm

$$\langle \mathbf{c} - \mathbf{p}_2, \mathbf{c} - \mathbf{p}_3 \rangle = |\mathbf{c} - \mathbf{p}_2| |\mathbf{c} - \mathbf{p}_3| \cos \delta_1.$$

Uitschrijven in coördinaten hiervan en kwadrateren om de wortels weg te werken geeft een vierdegraadsvergelijking in  $x$ ,  $y$  en  $z$ , namelijk

$$\begin{aligned}((x - p_2)(x - p_3) + (y - q_2)(y - q_3) + (z - r_2)(z - r_3))^2 \\ = ((x - p_2)^2 + (y - q_2)^2 + (z - r_2)^2) \\ \times ((x - p_3)^2 + (y - q_3)^2 + (z - r_3)^2) \cos^2 \delta_1.\end{aligned}$$

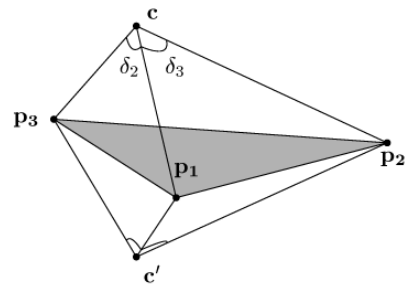
Het is echter overzichtelijker om deze vergelijking in termen van vectoren en inwendige producten te blijven schrijven:

$$\langle \mathbf{c} - \mathbf{p}_2, \mathbf{c} - \mathbf{p}_3 \rangle^2 = \langle \mathbf{c} - \mathbf{p}_2, \mathbf{c} - \mathbf{p}_2 \rangle \langle \mathbf{c} - \mathbf{p}_3, \mathbf{c} - \mathbf{p}_3 \rangle \cos^2 \delta_1.$$

Voor elk tweetal referentiepunten is er zo'n vergelijking, en in totaal ontstaat op deze manier dus het volgende stelsel van drie vierdegraadsvergelijkingen in de drie onbekenden  $x$ ,  $y$  en  $z$

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{x} - \mathbf{p}_2, \mathbf{x} - \mathbf{p}_3 \rangle^2 &= \langle \mathbf{x} - \mathbf{p}_2, \mathbf{x} - \mathbf{p}_2 \rangle \langle \mathbf{x} - \mathbf{p}_3, \mathbf{x} - \mathbf{p}_3 \rangle \cos^2 \delta_1, \\ \langle \mathbf{x} - \mathbf{p}_3, \mathbf{x} - \mathbf{p}_1 \rangle^2 &= \langle \mathbf{x} - \mathbf{p}_3, \mathbf{x} - \mathbf{p}_3 \rangle \langle \mathbf{x} - \mathbf{p}_1, \mathbf{x} - \mathbf{p}_1 \rangle \cos^2 \delta_2, \\ \langle \mathbf{x} - \mathbf{p}_1, \mathbf{x} - \mathbf{p}_2 \rangle^2 &= \langle \mathbf{x} - \mathbf{p}_1, \mathbf{x} - \mathbf{p}_1 \rangle \langle \mathbf{x} - \mathbf{p}_2, \mathbf{x} - \mathbf{p}_2 \rangle \cos^2 \delta_3.\end{aligned}\quad (1)$$

Om te benadrukken dat het hier om een stelsel vergelijkingen gaat, hebben we  $\mathbf{x}$  in plaats van  $\mathbf{c}$  geschreven; het onbekende tankcentrum  $\mathbf{c}$  is één oplossing van dit stelsel, maar er zijn er in het algemeen meer. Men ziet dat onmiddellijk in als men zich realiseert dat met elke oplossing  $\mathbf{c}$  ook het spiegelbeeld  $\mathbf{c}'$  in het vlak door  $\mathbf{p}_1$ ,  $\mathbf{p}_2$  en  $\mathbf{p}_3$  een oplossing is (zie figuur 2). Maar door het kwadrateren zijn in het stelsel (1) ook oplossingen ingevoerd die horen bij een hoek  $\pi - \delta_i$  in plaats van  $\delta_i$ . In totaal zijn er dus in het algemeen  $2 \times 2 \times 2 = 8$  hoekendrietallen, die ieder voor 2 oplossingen van vergelijking (1) kunnen zorgen. We zullen hieronder bewijzen dat het stelsel ook niet meer dan zestien oplossingen kan hebben; minder kan wel, afhankelijk van de ligging van de punten  $\mathbf{p}_i$  en de grootte van de hoeken  $\delta_i$ .



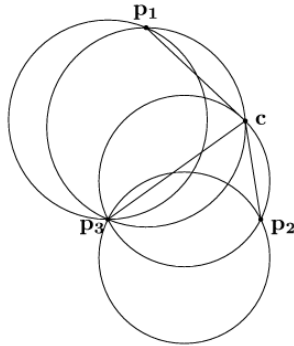
**Figuur 2** De punten  $\mathbf{c}$  en  $\mathbf{c}'$  en de referentiepunten  $\mathbf{p}_i$ .

### Het tweedimensionale geval

Wanneer de punten  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{p}_1$ ,  $\mathbf{p}_2$  en  $\mathbf{p}_3$  in één vlak liggen, is de situatie meetkundig gezien heel eenvoudig. Via een orthogonale transformatie kunnen we er dan voor zorgen dat dit het vlak  $z = 0$  wordt, zodat we alleen nog maar met de onbekenden  $x$  en  $y$  te maken hebben. Twee van de drie vergelijkingen van stelsel (1) zijn nu voldoende om  $\mathbf{c}$  te bepalen; we kunnen ons bijvoorbeeld tot de eerste twee vergelijkingen beperken. Bovendien zal blijken dat de twee vierdegraadsvergelijkingen elk in twee cirkelvergelijkingen gesplitst kunnen worden. De vier bijbehorende cirkels gaan allemaal door  $\mathbf{p}_3$ . Twee van de overige zes snijpunten zijn  $\mathbf{p}_1$  en  $\mathbf{p}_2$ , en onder de andere vier is er precies één die hoort bij de van tevoren bepaalde hoeken  $\delta_1$  en  $\delta_2$ . Daarmee is zijn de coördinaten van  $\mathbf{c}$  gevonden (zie figuur 3).

Natuurlijk hebben we hier in wezen te maken met de bekende stelling uit de vlakke meetkunde over de omtrekshoek en de middelpuntshoek in een cirkel. Die stelling is met het nieuwe VWO-profiel Natuur & Techniek weer in het schoolcurriculum teruggekeerd, maar wie zich net als deze auteur ergert aan de moeiza-

me wijze waarop de schoolboeken die stelling thans synthetisch trachten te 'bewijzen', zou als alternatief eens kunnen denken aan de volgende analytische afleiding, die slechts gebruik maakt van de meest elementaire eigenschappen van het inwendige product (of, zo men wil, de cosinusregel).



Figuur 3 Het tweedimensionale geval.

**Stelling.** Als een hoek  $\delta$  (met  $0 < \delta < \pi$ ) en twee verschillende punten  $\mathbf{p}$  en  $\mathbf{q}$  in het vlak gegeven zijn, dan bestaat de verzameling van alle punten in het vlak van waaruit men het lijnstuk  $\mathbf{pq}$  onder een hoek  $\delta$  of een hoek  $\pi - \delta$  ziet, uit twee congruente cirkels door  $\mathbf{p}$  en  $\mathbf{q}$ . Vanuit het middelpunt van zo'n cirkel ziet men het lijnstuk  $\mathbf{pq}$  onder een hoek  $2\delta$  als  $0 < \delta \leq \pi/2$ , en  $2(\pi - \delta)$  als  $\pi/2 < \delta < \pi$ .

**Bewijs.** Zonder beperking van de algemeenheid nemen we aan dat  $0 < \delta \leq \pi/2$ . De verzameling van alle punten  $\mathbf{x} = (x, y)$  die aan de gegeven voorwaarden voldoen, wordt beschreven door de vergelijking

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{x} - \mathbf{q} \rangle = \langle \mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{x} - \mathbf{p} \rangle \langle \mathbf{x} - \mathbf{q}, \mathbf{x} - \mathbf{q} \rangle \cos^2 \delta. \quad (2)$$

Kies coördinaten zo, dat  $\mathbf{p} = (-1, 0)$ ,  $\mathbf{q} = (1, 0)$ , dan geldt

$$\begin{aligned} (x^2 - 1 + y^2)^2 &= ((x + 1)^2 + y^2)((x - 1)^2 + y^2) \cos^2 \delta \\ &= ((x^2 + y^2 + 1)^2 - 4x^2) \cos^2 \delta \\ &= ((x^2 + y^2 - 1)^2 + 4y^2) \cos^2 \delta, \end{aligned}$$

oftewel

$$(x^2 + y^2 - 1)^2 \sin^2 \delta = 4y^2 \cos^2 \delta. \quad (3)$$

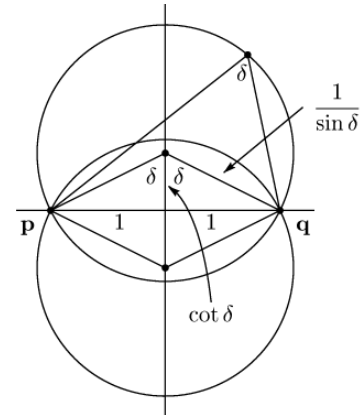
Wanneer  $\delta = \pi/2$  staat hier twee maal de eenheidscirkel; in het andere geval staan hier de cirkels

$$x^2 + (y - \cot \delta)^2 = \frac{1}{\sin^2 \delta} \quad \text{en} \quad x^2 + (y + \cot \delta)^2 = \frac{1}{\sin^2 \delta}, \quad (4)$$

waaruit het gestelde volgt (zie ook figuur 4). □

**Een vierdegraadsoppervlak**

We hebben de bovenstaande eenvoudige afleiding mede gegeven omdat een generalisatie naar drie (of meer) dimensies op precies dezelfde wijze verloopt. Vergelijking (2) blijft dan ongewijzigd.



Figuur 4 Omtreks- en middelpuntshoeken.

Met de keuze  $\mathbf{p} = (-1, 0, 0)$  en  $\mathbf{q} = (1, 0, 0)$  wordt vergelijking (3) nu:

$$(x^2 + y^2 + z^2 - 1)^2 \sin^2 \delta = 4(y^2 + z^2) \cos^2 \delta. \quad (5)$$

Voor  $\delta = \pi/2$  staat hier twee maal de eenheidsbol; voor  $0 < \delta < \pi/2$  of  $\pi/2 < \delta < \pi$  is (4) een omwentelingsoppervlak dat ontstaat door de beide cirkels van (4) rond de  $x$ -as te wentelen. De doorsnede met een vlak door die as, bijvoorbeeld het vlak  $z = 0$ , bestaat uit twee cirkels met middelpunten op een afstand  $\cot \delta$  van de as, en straal  $1/\sin \delta$ .

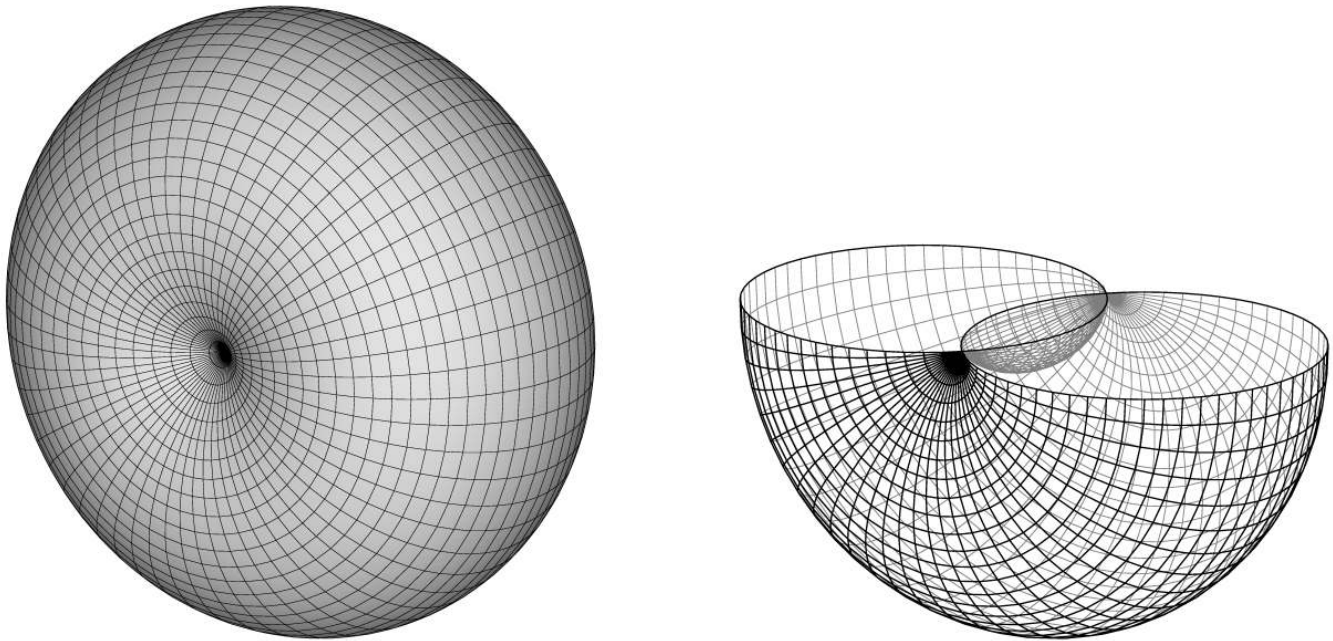
Een parametervoorstelling van het oppervlak verkrijgt men door eerst  $y = r \cos v$ ,  $z = r \sin v$  te stellen. Dat leidt tot de vergelijkingen (3) en (4), maar dan met  $r$  in plaats van  $y$ . Een parametrisering voor  $x$ ,  $y$  en  $z$  die uit elk van de beide gevallen van (4) (met  $r$  in plaats van  $y$ ) kan worden afgeleid, luidt

$$\begin{cases} x = \frac{\cos u}{\sin \delta}, \\ y = \frac{\cos \delta + \sin u}{\sin \delta} \cos v, \\ z = \frac{\cos \delta + \sin u}{\sin \delta} \sin v, \end{cases} \quad \text{waarbij } 0 \leq u, v \leq 2\pi.$$

Met zo'n parametrisatie en een geschikt tekenprogramma kan men de computer vervolgens het oppervlak laten tekenen. In figuur 5 is gebruik gemaakt van een orthogonale parallelprojectie (zie bijvoorbeeld [1], pp. 107–110, voor een toelichting) en van het tekenprogramma PostScript (zie [2] voor een bruikbare handleiding). De parameterlijnen zijn getekend met tussenruimten van 6 graden. In de linker figuur zijn de grijs tinten bepaald door de richting van de normaal op het oppervlak (berekend met behulp van de parametrisatie) te vergelijken met de projectierichting. De rechter figuur geeft het parameternet van de onderste helft van het oppervlak; de beide cirkels die de doorsnede vormen met het vlak  $z = 0$  zijn duidelijk te zien. Ze snijden elkaar in de punten  $\mathbf{p}$  en  $\mathbf{q}$ . In deze figuur is  $\delta = 42^\circ$  gekozen.

**Waarom hoogstens zestien oplossingen?**

Zo'n vierdegraadsoppervlak bestaat uit een appelvormig buitenoppervlak en een soort klokhuis dat er binnenin ligt. Als  $\delta$  dicht bij 90 graden ligt, zal het klokhuis dicht tegen de schil aanliggen,



**Figuur 5** Parameterlijnen op het vierdegraads omwentelingsoppervlak dat hoort bij een hoek  $\delta = 42^\circ$ .

met als gevolg dat verschillende oplossingen van het stelsel (1) eveneens dicht bij elkaar komen te liggen. Hoewel figuur 5 een goed beeld geeft van één zo'n vierdegraadsoppervlak, is het toch lastig om een helder idee te krijgen van het aantal en de ligging van alle snijpunten van drie van die oppervlakken. We hebben op meetkundige gronden al het bestaan van zestien mogelijke snijpunten aannemelijk gemaakt. Wanneer alle hoeken  $\delta_i$  gelijk zijn aan  $\pi/2$ , ontwaarden de drie vierdegraadsoppervlakken in drie dubbel tellende bollen, en dan zijn er maar twee snijpunten. Wijken de hoeken  $\delta_i$  allemaal slechts weinig af van  $\pi/2$ , dan lijken die twee punten zich inderdaad in twee maal acht snijpunten te splitsen, maar hoe zit het als de afwijking van  $\pi/2$  groter wordt? En zien we toch geen andere snijpunten over het hoofd? Bij drie vierdegraadsvergelijkingen zou men immers in bepaalde gevallen zelfs tot niet minder dan  $4 \times 4 \times 4 = 64$  oplossingen kunnen komen.

Kenner van de algebraïsche meetkunde zullen opmerken dat elk van de drie vierdegraadsoppervlakken van het hier beschouwde stelsel (1) het vlak op oneindig raakt volgens de kegelsnede  $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ , en dat elk van de punten  $\mathbf{p}_1$ ,  $\mathbf{p}_2$  en  $\mathbf{p}_3$  een singulier punt is van twee van de drie oppervlakken. Men kan daaruit inderdaad afleiden dat er in het eindige gebied niet meer dan zestien (eventueel complexe) oplossingen kunnen zijn. Maar ook zonder zulke geavanceerde hulpmiddelen kunnen we de zaken hier tot klaarheid brengen, en laten zien dat het stelsel inderdaad hoogstens zestien oplossingen heeft.

Allereerst kiezen we daartoe een coördinatenstelsel zo, dat het vlak door  $\mathbf{p}_1$ ,  $\mathbf{p}_2$  en  $\mathbf{p}_3$  gegeven wordt door de vergelijking  $z = 0$ . Omdat in (2a) dan  $r_2 = r_3 = 0$  geldt, krijgt deze vergelijking nu de vorm:

$$(x^2 + y^2 + z^2 + a_1x + b_1y + c_1)^2 = (x^2 + y^2 + z^2 + a_2x + b_2y + c_2) \times (x^2 + y^2 + z^2 + a_3x + b_3y + c_3) \cos^2 \delta_1.$$

Hetzelfde geldt voor de twee andere vergelijkingen. Stellen we

$$w = x^2 + y^2 + z^2, \quad (6)$$

dan krijgen we een stelsel van drie *tweedegraads* vergelijkingen in de onbekenden  $x$ ,  $y$  en  $w$  (de variabele  $z$  is nu verdwenen!). Zo'n stelsel heeft hoogstens  $2 \times 2 \times 2 = 8$  oplossingen, waarbij elke oplossing  $(x, y, w)$  via (7) aanleiding geeft tot twee (eventueel samenvallende of complexe) oplossingen  $(x, y, z)$  van het oorspronkelijke stelsel (1). Inderdaad heeft het stelsel (1) dus hoogstens zestien oplossingen, zoals we wilden aantonen.

#### De berekening van de veldcoördinaten van $\mathbf{c}$

Rest de vraag hoe men de oplossingen van het oorspronkelijke stelsel (1) in de praktijk berekent, en hoe men uit de maximaal zestien oplossingen het juiste coördinatendrietal van het tankcentrum  $\mathbf{c}$  selecteert. Een computeralgebrapakket als MAPLE heeft geen moeite met het oplossen van een stelsel als (1). Indien gewenst levert het zelfs een analytische oplossing, die het scherm vult met een overstelpende hoeveelheid wortelvormen. Maar ook voor numerieke oplossingen schrikt zo'n pakket natuurlijk niet terug: men krijgt dan in het algemeen een lijst van zestien coördinatendrietalen, waaronder ook vaak complexe oplossingen voorkomen. Door bij iedere reële oplossing met behulp van het inwendige product het teken van de cosinus van elke hoek  $\delta_i$  te vergelijken met dat van de juiste, van tevoren berekende waarde, kan men die lijst tot twee kandidaatoplossingen terugbrengen. Omdat men in het algemeen wel over een ruwe benadering beschikt van de coördinaten van het tankcentrum, zal het selecteren van het juiste coördinatendrietal daarna als regel geen problemen meer opleveren. Zo nodig kan men daarbij gebruik maken van het teken van de determinant  $\det(\mathbf{c} - \mathbf{p}_1, \mathbf{c} - \mathbf{p}_2, \mathbf{c} - \mathbf{p}_3)$ .

### Hoe gaat de oefening verder?

Zijn eenmaal de veldcoördinaten van het tankcentrum  $\mathbf{c}$  gevonden, dan bestaat de volgende stap uit het bepalen van de *scheefstand* van de tank. Ook dat kan men doen door gebruik te maken van de gemeten azimut- en elevatiehoeken van de eenheidsvectoren  $\mathbf{e}_i$  in de richting van de referentiepunten. Merk hiertoe op dat

$$\mathbf{e}_i = \frac{1}{|\mathbf{p}_i - \mathbf{c}|} (\mathbf{p}_i - \mathbf{c}),$$

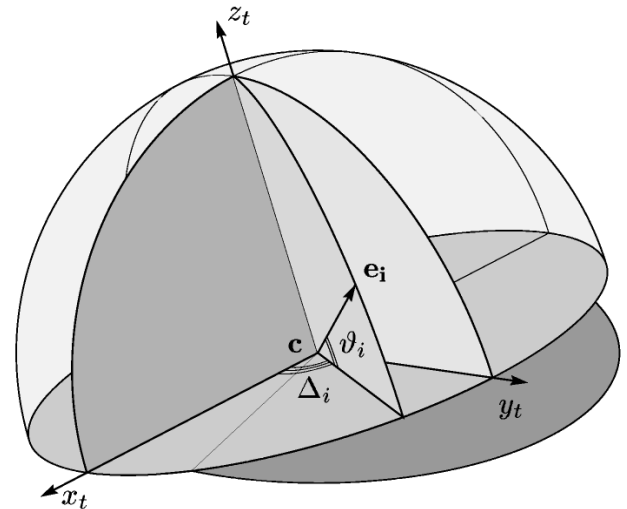
waardoor men van de vectoren  $\mathbf{e}_i$  niet alleen de via meting van de azimut- en elevatiehoek gevonden 'scheve' tankcoördinaten  $(e_{i1}^t, e_{i2}^t, e_{i3}^t)$  kent, maar nu ook ook *horizontale tankcoördinaten*  $(e_{i1}^h, e_{i2}^h, e_{i3}^h)$ , dat wil zeggen veldcoördinaten waarbij de oorsprong naar het tankcentrum  $\mathbf{c}$  is verplaatst. Het verband tussen de scheve tankcoördinaten en de horizontale tankcoördinaten wordt gegeven door een orthogonale coördinatentransformatie waarvan men de matrix  $\mathbf{U}$  direct kan bepalen via de relatie:

$$\mathbf{U} \begin{pmatrix} e_{11}^t & e_{21}^t & e_{31}^t \\ e_{12}^t & e_{22}^t & e_{32}^t \\ e_{13}^t & e_{23}^t & e_{33}^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{11}^h & e_{21}^h & e_{31}^h \\ e_{12}^h & e_{22}^h & e_{32}^h \\ e_{13}^h & e_{23}^h & e_{33}^h \end{pmatrix}.$$

Het eindresultaat van dit alles is dat men zo de beschikking heeft over transformatieformules om veldcoördinaten om te zetten in scheve tankcoördinaten, en omgekeerd. En aangezien de veldcoördinaten van alle klapdoelen in het oefenterrein bekend zijn, kan men die nu direct omrekenen naar tankcoördinaten, zodat daarmee de schietprestaties van de tankbemanning tijdens de oefening beoordeeld kunnen worden.

### Praktische implementatie

We hebben hierboven laten zien hoe men behulp van een eenvoudig softwareprogramma de positie en de scheefstand van de tank uit drie metingen kan bepalen. In de praktijk zijn er altijd extra complicaties, die bijvoorbeeld te maken hebben met de



Figuur 6 De scheefstaande tank.

calibratie van de hoekopnemers en met het feit dat de loop van het kanon excentrisch ten opzichte van het draaicentrum van de tankkoepel bevestigd is. Op het moment dat dit artikel geschreven werd, was het betreffende project nog niet afgerond, en de implementatie ervan dus ook nog niet gerealiseerd.

De lezer zal zich misschien ook afvragen of men voor de positiebepaling van zo'n tank niet veel beter gebruik kan maken van het NAVSTAR Global Positioning System (GPS). Het bereiken van een grote nauwkeurigheid daarbij is echter geen sinecure (zie bijvoorbeeld [3] voor een beschrijving van de mogelijkheden en beperkingen). De hierboven geschetste methode is in elk geval veel eenvoudiger, en bovendien met behulp van de toch al aanwezige apparatuur uit te voeren. Niettemin mag verwacht worden dat satellietssystemen zoals GPS op den duur ook bij dit soort tankoefeningen een rol zullen gaan spelen. ←

### Dankwoord

De auteur dankt ir. L.P.J. Gielen voor het onder zijn aandacht brengen van het probleem waaruit dit artikel is ontstaan.

### Referenties

- 1 Jan van de Craats, *Vectoren en Matrices – een inleiding in de Lineaire Algebra*, Epsilon Uitgaven 45 2000.
- 2 Adobe Systems Inc., *PostScript Language, Tutorial and Cookbook*, Addison Wesley, 1985.
- 3 Joost van Kasteren, *Ander frequentiegebied verbetert nauwkeurigheid van GALILEO*, Delft Integraal, 16, nummer 3 (2000), 9–13.