UWC Universitaire Wiskunde Competitie

Opgave A

Gegeven vier punten in het vlak, waarvan er geen drie op een rechte lijn liggen. Kies drie van de vier punten. Deze vormen een driehoek $\triangle$, waarvan de omgeschreven cirkel middelpunt M en straal R heeft. Noem het vierde punt P. Toon aan:

$$\text{Oppervlakte}(\triangle) \times (PM^2 - R^2)$$

is onafhankelijk van de keuze van de drie punten.

Opgave B

Zij $p, k \in \mathbf{N} \setminus \{0,1\}$. Bewijs de volgende ongelijkheden:

$$\frac{(k^p - (k-1)^p))^2}{k^{2p-1} - (k-1)^{2p-1}} < \frac{((k+1)^p - k^p))^2}{(k+1)^{2p-1} - k^{2p-1}} < \frac{p^2}{2p-1}.$$

Opgave C

Men wil uit n personen (met $n \geq 2$) een winnaar aanwijzen door volmaakt eerlijke loting, maar heeft daartoe slechts de beschikking over één geldstuk. De kansen op kruis of munt zijn daarbij niet noodzakelijkerwijs $\frac{1}{2}$, maar wèl is het zeker dat die kansen constant zijn. Een voorschrift voor het spel (en zo'n voorschrift zal een protocol genoemd worden) is bij $n = 2$ bijv. het volgende: Men werpt net zolang twee keer achter elkaar totdat de uitkomsten van de laatste twee keer verschillend zijn. Is dat KM (K betekent kruis, M betekent munt) dan wint speler 1, is het MK dan wint speler 2. Er is een kans 0 dat het werpen oneindig lang duurt: dat nemen we voor lief.

De lengteverwachting van het protocol is de verwachtingswaarde van het aantal worpen. Gemakshalve wordt bij de berekening van die lengteverwachting ervan uitgegaan dat de kans op kruis $\frac{1}{2}$ is (terwijl het protocol juist bedoeld is voor de omgang met oneerlijke munten). In het bovengenoemde voorbeeld is de lengteverwachting 4.

a. Toon aan dat er voor $n = 2$ een protocol bestaat met lengteverwachting $< \frac{7}{2}$.
b. Voor $n = 3$ is er een eenvoudig protocol waarvan de lengteverwachting ook weer 4 is. Toon aan dat er een protocol betsaat met lengteverwachting < 4.
c. Bewijs dat er een constante C bestaat zo dat er bij elke n een protocol bestaat met lengteverwachting $< C \log n$.
d. Bewijs dat er bij geen enkele n een getal G bestaat zodanig er een protocol is dat de afloop binnen G worpen garandeert.

De Universitaire Wiskunde Competitie (UWC) is een ladderwedstrijd voor studenten, georganiseerd in samenwerking met de Vlaamse Wiskunde Olympiade. De opgaven worden tevens gepubliceerd op de internetpagina http://academics.its.tudelft.nl/uwc

Ieder nummer bevat de ladderopgaven A, B, en C waarvoor respectievelijk 30, 40 en 50 punten kunnen worden behaald. Daarnaast zijn er respectievelijk 6, 8 en 10 extra punten te winnen voor elegantie en generalisatie. Per nummer worden twee prijzen van 100 Euro toegekend: één aan de aanvoerder van de ladder (die daarna weer onderaan begint), en één aan de inzender van de oplossing die de meeste punten behaald heeft (die dan geen punten voor de ladder krijgt). Daarnaast zal twee maal per jaar een ster-opgave worden aangeboden waarvan de redactie geen oplossing bekend is. Voor de eerst ontvangen correcte oplossing van deze ster-opgave wordt eveneens 100 Euro toegekend.
Groepsinzendingen zijn toegestaan. Elektronische inzending in LaTeX wordt op prijs gesteld. De inzendtermijn voor de oplossingen sluit op 1 februari 2000. Voor de ster-opgave geldt een inzendtermijn van een jaar.

Eindredactie: Jan van Neerven
Redactieadres: Universitaire Wiskunde Competitie
Vakgroep Toegepaste Wiskundige Analyse
Technische Universiteit Delft
Postbus 5031, 2600 GA Delft
j.vanneerven@its.tudelft.nl

Editie 2000/2 Op de tweede ronde van de Universitaire Wiskunde Competitie ontvingen we slechts 5 inzendingen. Winnaar van de editieprijs is *Filip de Smet* (RU Gent) met 87 punten. Hij verdient de editieprijs van 100 Euro (en geen ladderpunten). De ladderprijs, eveneens 100 Euro, gaat naar *Mark Veraar* (TU Delft). Zie verderop voor de complete deeluitslag en de ladderstand. De volledige uitslag is te vinden op de UWC website (http://academics.its.tudelft.nl/uwc).

Opgave 2000/2-A Bij een gegeven stelsel van $n+1$ vectoren $\{x_i\}_{i=1}^{n+1}$ in $\mathbf{R}^n$, zó dat $\|x_i\| = 1$ voor alle i, beschouwen we de som van de inwendige producten

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n+1} x_i \cdot x_j.$$

a. Wat is de minimale waarde die deze som kan aannemen?
b. Geef een voorbeeld van zo'n stelsel, waarbij het minimum wordt aangenomen en de

UWC oplossingen

hele $\mathbf{R}^n$ wordt opgespannen.
c. Karakteriseer de stelsels, waarvoor de minimale waarde wordt aangenomen.

Oplossing Vrijwel iedereen merkte op dat uit

$$0 \leq \Big(\sum_{i=1}^{n+1} x_i\Big) \cdot \Big(\sum_{i=1}^{n+1} x_i\Big) = \sum_{i=1}^{n+1} \|x_i\|^2 + \sum_{1 \leq i,j \leq n, i \neq j} x_i \cdot x_j = (n+1) + 2\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n+1} x_i \cdot x_j$$

onmiddellijk volgt dat

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n+1} x_i \cdot x_j \geq -\frac{n+1}{2},$$

en dat het minimum $-\frac{1}{2}(n+1)$ wordt aangenomen dan en slechts dan als $\sum_{i=1}^{n+1} x_i = 0$. Een fraai voorbeeld van een stelsel $M_{n+1} = \{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$ dat de hele $\mathbf{R}^n$ opspant en waarvoor het minimum $-\frac{1}{2}(n+1)$ wordt aangenomen is het stelsel hoekpunten van het regelmatige $(n+1)$-simplex met centrum 0. Dit wordt inductief gegeven door $M_2 = \{-1, 1\}$ en voor $k = 2, \ldots, n$:

$$M_{k+1} = \Big\{(1, 0, \ldots, 0), \{(-\tfrac{1}{k}, \tfrac{1}{k}\sqrt{k^2-1}\, M_k)\}\Big\}.$$

Met volledige inductie is gemakkelijk in te zien dat voor iedere tweetal $x_i, x_j \in M_{n+1}$ met $i \neq j$ geldt

$$x_i \cdot x_j = -\frac{1}{n},$$

zodat het minimum inderdaad wordt aangenomen: er zijn immers $\frac{1}{2}n(n+1)$ van zulke tweetallen. Steven Lippens gaf een formule voor het minumum in geval er met $p+1$ vectoren wordt gewerkt met $p \in \mathbf{N}$ willekeurig.

Opgave 2000/2-B In iedere driehoek liggen hoogtepunt, zwaartepunt en middelpunt van de omgeschreven cirkel op een rechte lijn. Op deze lijn ligt ook het middelpunt van de (negenpunts)cirkel van Feuerbach, dat is de cirkel die door de midddens van de drie zijden van de driehoek gaat. Onderzoek de analoge situatie in een viervlak, bekijk ook speciaal het geval van een orthogonaal viervlak, dat is een viervlak met een hoogtepunt. Generaliseer de gevonden stelling naar een (orthogonaal) simplex in de n-dimensionale ruimte.

Oplossing Voor een willekeurige driehoek ABC met hoogtepunt H liggen de volgende negen punten op de cirkel van Feuerbach: de middens van de drie zijden, de voetpunten van de drie hoogtelijnen en de middens van HA, HB en HC. Bedoeling van de opgave was om de analoge situatie voor viervlakken in te onderzoeken: is er een 'bol van Feuerbach' en zo ja, wat voor bijzondere punten liggen er op? Hierover kan veel meer bewezen worden dan hetgeen in de meeste inzendingen gevonden werd. We schetsen de uitwerking van de beoordelingscommissie.
Zij V een viervlak. De zes middens van de ribben zijn de hoekpunten van een achtvlak waarvan de overstaande ribben evenwijdig zijn en gelijke hoogte hebben. Die ribben zijn dus te groeperen tot drie parallellogrammen. Wil er door de zes punten een bol gaan, dan moeten deze parallellogrammen rechthoeken zijn, en moeten dus de overstaande ribben van V zelf onderling loodrecht zijn. Dit impliceert dat V een *hoogtepunt* heeft, d.w.z. een punt H waar de vier hoogtelijnen elkaar snijden. Zo'n viervlak zullen we *orthocentrisch* noemen.
We brengen nu een coördinatenstelsel aan met H als oorsprong; de vectoren corresponderend met de hoekpunten van V noemen we a, b, c en d. De middens van de ribben van V zijn dan $\frac{1}{2}(a+b)$, $\frac{1}{2}(a+c)$, enzovoort, dus de bol door de zes middens heeft als middelpunt het zwaartepunt $\frac{1}{4}(a+b+c+d)$. Merk op dat deze bol door de middens gaat van alle ribben van V en dus alle begrenzende driehoeken van V doorsnijdt volgens de negenpuntscirkels van Feuerbach!

UWC oplossingen

We zien aldus dat de volgende 24 punten van V op de bol liggen: 6 middens van ribben, 6 voetpunten van hoogtelijnen, 4×3 middens van hoogtelijnsegmenten. We zouden de bol dus een '24−puntsbol van Feuerbach' kunnen noemen.
Nu bekijken we de vier zwaartepunten $\frac{1}{3}(a+b+c)$, $\frac{1}{3}(a+b+d)$, enzovoort, van de zijvlakken van V. Door deze punten gaat precies één bol, waarvan het middelpunt gemakkelijk bepaald wordt: $\frac{1}{6}(a+b+c+d)$. Dit punt is tevens het midden van het lijnsegment dat $\frac{1}{3}(a+b+c)$ met $\frac{1}{3}d$ verbindt. Op deze wijze zien we dat de onze tweede bol tevens door de punten $\frac{1}{3}a$, $\frac{1}{3}b$, $\frac{1}{3}c$ en $\frac{1}{3}d$ op de hoogtelijnen van V gaat, en daarmee ook door de voetpunten van deze hoogtelijnen. Deze bol zouden we dus een '12−puntsbol van Feuerbach' kunnen noemen.
De centra van beide bollen liggen op één lijn met H en het middelpunt van de omgeschreven bol van V.
De voortzetting naar orthocentrische $(n+1)$-simplices V ligt nu voor de hand. Zij H het hoogtepunt van V en noteer de hoekpunten van V met $a_1, \ldots a_{n+1}$. Door de zwaartepunten van de lager-dimensionale zij-simplices te beschouwen krijgen we $n-1$ 'bollen van Feuerbach' met de middelpunten $\frac{1}{2k}(a_1 + \ldots + a_{n+1})$; $k = 2, \ldots, n$. We laten aan de lezer de interessante combinatorische opgave om de bijzondere punten op deze bollen te bepalen.

Opgave 2000/2-C Toon aan dat voor alle $a, b, c \in \mathbf{C}$ $(a \neq 0)$, en voor alle $n, p \in \mathbf{N}$ $(p \neq 0)$ geldt:

$$\sum_{k=0}^{2p} \frac{1}{k!(n+k)!} \left(\frac{ax^2+bx+c}{a} \right)^k \times$$
$$\times \frac{d^k}{dx^k} \left[(ax^2+bx+c)^p \right] \frac{d^{n+k}}{dx^{n+k}} \left[(ax^2+bx+c)^{-p} \right] = 0.$$

Oplossing De meeste inzendingen gaven geheel of gedeeltelijk correcte, maar vrij bewerkelijke oplossingen. Van Herman Bavinck, de auteur van het vraagstuk, is de volgende, kortere oplossing.
Indien x_1 en x_2 de (mogelijk complexe) nulpunten zijn van $ax^2 + bx + c$, dan gaat met behulp van de substitutie

$$z := x - x_1, \quad d := x_1 - x_2,$$

het gevraagde over in

$$\sum_{k=0}^{2p} \frac{1}{k!(n+k)!} \left(z^2 + dz \right)^k D^k \left[(z^2+dz)^p \right] D^{n+k} \left[(z^2+dz)^{-p} \right] = 0,$$

waar $D = \frac{d}{dz}$. Met de regel van Leibniz volgt

$$\frac{D^k (z^2+dz)^p}{k!} = \sum_{j=0}^{k} \binom{p}{j} z^{p-j} \binom{p}{k-j} (d+z)^{p+j-k},$$
$$\frac{D^{n+k} (z^2+dz)^{-p}}{(n+k)!} = \sum_{i=0}^{n+k} \binom{-p}{i} (d+z)^{-p-i} \binom{-p}{n+k-i} z^{-p-n-k+i}.$$

Hierbij is voor $a \in \mathbf{R}$, $j \in \mathbf{N}$ de notatie $\binom{a}{j} = \dfrac{a(a-1)...(a-j+1)}{j!}$ gebruikt, zodat voor $a \in \mathbf{N}$ en $j > a$ geldt $\binom{a}{j} = 0$.

UWC oplossingen

Dit geeft

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{2p} \frac{1}{k!(n+k)!} \left(z^2+dz\right)^k D^k\left[(z^2+dz)^p\right] D^{n+k}\left[(z^2+dz)^{-p}\right] \\
&\quad= \sum_{k=0}^{2p}\left[\sum_{j=0}^{k}\binom{p}{j} z^{-j}\binom{p}{k-j}(d+z)^{\,j-k}\right] \\
&\qquad\times \left[\sum_{i=0}^{n+k}\binom{-p}{i}(d+z)^{-i}\binom{-p}{n+k-i} z^{-n-k+i}\right]\left(z^2+dz\right)^k \\
&\quad= \sum_{j=0}^{p}\sum_{i=0}^{n+2p}\binom{p}{j}\binom{-p}{i} z^{-n+i-j}(d+z)^{\,j-i}\sum_{k=i-n}^{p+j}\binom{p}{k-j}\binom{-p}{n+k-i}.
\end{aligned} \tag{1}$$

Maar $\sum_{k=i-n}^{p+j}\binom{p}{k-j}\binom{-p}{n+k-i} = \sum_{k=i-n}^{p+j}\binom{p}{p-k+j}\binom{-p}{n+k-i}$ is de coëfficiënt van $t^{n+p+j-i}$ in de machtreeksontwikkeling van de functie $(1+t)^p(1+t)^{-p}$, dus

$$\sum_{k=i-n}^{p+j}\binom{p}{k-j}\binom{-p}{n+k-i} = \delta_{i,n+p+j}.$$

We vinden zo dat de laatste uitdrukking in (1) gelijk is aan

$$\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}\binom{-p}{n+p+j} z^p\,(d+z)^{-n-p} = z^p\,(d+z)^{-n-p}\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{p-j}\binom{-p}{n+p+j}.$$

Maar $\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{p-j}\binom{-p}{n+p+j}$ is de coëfficiënt van t^{n+2p} in de machtreeksontwikkeling van de functie $(1+t)^p(1+t)^{-p}$. Dus voor alle $n, p \in \mathbf{N}$, $p \neq 0$ geldt $\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{p-j}\binom{-p}{n+p+j} = 0$, en het gestelde volgt.

Uitslag 2e editie (top 3)
De weging van de opgaven is 3 : 4 : 5.

	Naam	A	B	C	*Totaal*
1.	Filip de Smet (Gent)	7	4	10	87
2.	Mark Veraar (Delft)	8	2	7	67
3.	Herbert Beltman (Twente)	6	3	6	60

Ladderstand Universitaire Wiskunde Competitie na twee rondes
Bij gelijk puntenaantal is alfabetisch gerangschikt.

	Naam	*Punten*
1.	Mark Veraar (Delft)	163
2.	Herbert Beltman (Twente)	145
	Steven Lippens (Gent)	145
3.	Remke Kloosterman (Groningen)	99
4.	René Pannekoek (Utrecht)	96
	Filip de Smet (Gent)	96
5.	Bart Rodrigues e.a. (Leuven)	94