Paul Drijvers
Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht
Tiberdreef 4, 3561 GG Utrecht
P.Drijvers@fi.uu.nl

Studenten met een grafische rekenmachine: wat kunnen we van ze verwachten?

Onderdeel van de vernieuwing van de Tweede Fase van havo en vwo is de invoering van de grafische rekenmachine. Leerlingen schaffen meestal in klas 4 van havo of vwo een grafische rekenmachine aan, die ze tot en met het eindexamen gebruiken. Wanneer de opleiding vervolgd wordt met universitaire studie, dan zal een deel van hen de machine van de hand doen. Het valt echter te verwachten dat met name studenten van exacte vakken inmiddels zo vertrouwd zijn met hun apparaat dat ze het meenemen naar de universiteit, waarmee de grafische rekenmachine dus ook in de collegebanken verschijnt. Wat betekent dit voor het universitaire onderwijs en wat kan men van studenten verwachten die gewend zijn om met een grafische rekenmachine te werken?

Op deze vraag ga ik aan het einde van dit artikel in. Daaraan voorafgaand beschrijf ik eerst (misschien ten overvloede) wat een grafische rekenmachine is en hoe de actuele stand van zaken is in het voortgezet onderwijs. Dit wordt gevolgd door een schets van de voorgeschiedenis en van de bevindingen in experimenten en onderzoek. Dan komen de implementatie en de examenpraktijk aan de orde. Terugkijkend onderscheid ik verschillende manieren waarop de grafische rekenmachine wordt gebruikt en dat leidt tot een (speculatief) antwoord op de gestelde vraag.

1 Wat is een grafische rekenmachine?

Een grafische rekenmachine of GR is een rekenapparaat, of, liever, een computertje met een rechthoekig schermpje dat behalve getallen ook grafieken, tabellen, matrices en dergelijke kan weergeven (zie figuur 1).

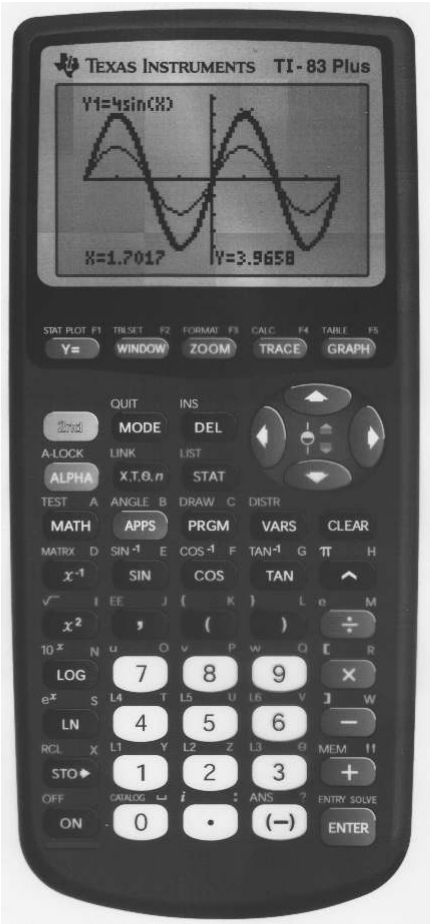
Voor de schoolwiskunde komen de volgende toepassingen van de grafische rekenmachine van pas:

- rekenen,
- grafieken tekenen,
- tabellen maken,
- rekenen met matrices,
- statistiek (diagrammen, kansverdelingen, hypothesetoetsing).

Daarnaast beschikt een grafische rekenmachine over een Basic-achtige programmeertaal en over de mogelijkheid om teksten op te slaan. Verder kan de grafische rekenmachine met een andere GR verbonden worden, of met een PC en daarmee ook met Internet. Voor demonstratiedoeleinden kan de machine gekoppeld worden aan projectieapparatuur en tenslotte zijn fysische sensoren (temperatuursensoren, spanningsmeters, bewegingsdetectoren, et cetera) aan te sluiten die natuurkundige en scheikundige metingen mogelijk maken.

Verschillende types beschikken over een zogenaamd 'flash'-geheugen, waardoor men de functionaliteit van de machine via Internet kan uitbreiden en 'upgraden'.

Binnen de schoolwiskunde kan de grafische rekenmachine voornamelijk bij analyse, statistiek en matrixrekening worden gebruikt. Voor meetkunde liggen er niet veel mogelijkheden, terwijl de machine bij algebra een ondersteunende rol kan spelen. Algebraïsche identiteiten kunnen bijvoorbeeld grafisch worden geverifieerd. Het echte algebrawerk moet nog met de hand gebeuren. Er zijn wel vergelijkbare machines die over computeralgebra beschikken, waardoor het apparaat



Figuur 1 De TI-83

bijvoorbeeld in staat is tot formulemanipulatie en symbolisch differentiëren, maar dergelijke machines noem ik liever symbolische rekenmachines of algebramachines; in elk geval zijn ze (vooralsnog) uitgesloten van gebruik bij het centraal eindexamen.

De ontwikkeling van grafische rekenmachines dateert van het begin van de jaren negentig, toen men zich de waarde van grafiekenprogramma's zoals het Nederlandse VU-Grafiek realiseerde, maar de beperkte toegankelijkheid van PC's op scholen daarbij nog een barrière vormde.

2 De actuele situatie

Leerlingen van de Tweede Fase van havo en vwo mogen ongeacht de profielkeuze een grafische rekenmachine gebruiken bij het centraal eindexamen in de vakken wiskunde, natuurkunde en scheikunde. De regelgeving voor wiskunde vermeldt dat de grafische rekenmachine *nodig* is, terwijl bij natuurkunde en scheikunde sprake is van *toegestaan* (zie www.eindexamen.nl). De CEVO (Centrale Examencommissie Vaststelling Opgaven), die beslist over de toegestane hulpmiddelen bij het centraal eindexamen, heeft grafische rekenmachines van de merken Casio, Hewett-Packard, Sharp en Texas Instruments goedgekeurd. In principe kunnen andere merken of nieuwere types in de toekomst ook worden toegelaten.

Voor alle genoemde vakken geldt dat het geheugen van de machine niet gewist hoeft te worden voor aanvang van het examen, wat betekent dat de leerlingen hun machines dus kunnen vullen met handige programmaatjes en spiekbriefjes. Het nut van zulke spiekbriefjes zal bij wiskunde beperkt zijn omdat de leerlingen ook een formuleboekje kunnen gebruiken (zie bijvoorbeeld de website van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren: www.nvvw.nl). Voor de vakken biologie, economie en management & organisatie is echter deze tekstopslagfunctie aanleiding geweest om terug te komen op het eerdere besluit om de grafische rekenmachine ook toe te laten. Men vreest daar voor een (te) grote opslag van feitenkennis in het geheugen van de grafische rekenmachine.

Voor wiskunde is de machine bij het eindexamen dus verplicht in die zin dat het examen vragen kan bevatten die zonder grafische rekenmachine niet of nauwelijks zijn op te lossen. Zonder machine heeft een kandidaat wel toegang tot het examen, maar de gevolgen zijn voor eigen rekening.

Op welke termijn speelt een en ander? Tabel 1 geeft een overzicht voor wat betreft het vwo. In mei 1999 zijn experimentele examens in de stijl van de nieuwe Tweede Fase afgenomen op 11 voorlopende scholen die deelnemen aan het zogenaamde Profi-project van Freudenthal Instituut en Algemeen Pedagogisch Studiecentrum. Aan het einde van het huidige schooljaar zal het Tweede Fase examen worden afgenomen op de scholen die bij de eerste gelegenheid zijn gestart met de Tweede Fase. Dit betreft ongeveer een kwart van alle vwo-leerlingen. In 2002 voegen ook de scholen die een jaar later met de Tweede Fase zijn gestart zich daarbij. De havo-scholen lopen één jaar voor: daar vindt het eerste nieuwe examen voor alle leerlingen plaats in 2001.

Voor het universitaire onderwijs betekent dit dat in september 2001 de eerste instroom van enige omvang van studenten met ervaring met de grafische rekenmachine plaatsvindt.

Jaar	Tweede Fase Examen vwo wiskunde
2000	11 Profi-scholen
2001	Eerste generatie vwo-scholen
2002	Alle vwo-scholen

Tabel 1 Eerste examens nieuwe Tweede Fase

3 Voorgeschiedenis van de invoering

Aan de invoering van de grafische rekenmachine die nu dus gestalte krijgt, is een traject van besluitvorming, experimenten en onderzoek voorafgegaan. In 1994 verscheen het eindrapport van de Studiecommissie Wiskunde B. Deze commissie, waarin universitaire wiskundigen een grote inbreng hadden, deed voorstellen die moesten leiden tot een invulling van wiskunde B die onder meer aantrekkelijker was voor meisjes, een beter beeld gaf van de universitaire wiskunde en beter aansloot op het nieuwe onderbouwprogramma. De conclusies van deze commissie behelsden onder meer dat op korte termijn de invoering van de grafische rekenmachine aanbevolen werd, maar dat tevens aangedrongen werd op het onderzoeken van de rol van computeralgebra in het voortgezet onderwijs. De commissie liet ook een enquête onder leraren uitvoeren en de resultaten daarvan gaven aan dat de computer in de wiskundeles niet of slechts incidenteel werd gebruikt.

De plannen voor de nieuwe Tweede Fase haalden de Studiecommissie Wiskunde B echter in. Korte tijd later, in 1995, verscheen het rapport van de Vakontwikkelgroep Wiskunde, waarin een nieuw curriculum voor de Tweede Fase werd voorgesteld. Twee citaten hieruit:

De Vakontwikkelgroep gaat er van uit dat de leerlingen (vanaf 1998) de beschikking zullen hebben over een grafische rekenmachine.

En, verderop:

Op het centraal eindexamen dient de leerling te beschikken over een grafische rekenmachine.

Belangrijke overweging hierbij was het resultaat van de hierboven genoemde enquête: kennelijk is voor veel wiskundeleraren de drempel naar het computerlokaal te groot. Er vanuit gaande dat ICT een bijdrage kan leveren aan het realiseren van de gewenste vernieuwingen in het wiskundeonderwijs is dus een praktischer stuk gereedschap nodig en dat kan de grafische rekenmachine zijn, was de gedachte. Door de machine ook bij het eindexamen aanwezig te veronderstellen werd voorkomen dat de invoering slechts op papier zou plaatsvinden; het examen is immers een probaat middel om veranderingen te forceren! Op deze manier gaf de Vakontwikkelgroep Wiskunde de beslissende aanzet tot de invoering van de grafische rekenmachine. De Vakontwikkelgroepen van andere vakken leken gematigd enthousiast en hadden in elk geval geen bezwaren.

De reacties in het veld waren wisselend. Wie op de hoogte was van de technologische ontwikkelingen was niet verrast en veelal positief. Er waren ook bezwaren, enerzijds tegen de financiële consequenties en anderzijds vanwege het feit dat de grafische rekenmachine natuurlijk zeer beperkt is in vergelijking met een PC, die wiskundig meer mogelijkheden biedt en bovendien ook bij andere vakken te gebruiken is. Hoewel deze tegengeluiden zeker hout snijden, hebben de voordelen van de grafische rekenmachine toch de doorslag gegeven: de GR is een klein apparaat dat altijd bij de hand is zonder dat speciale voorzieningen hoeven te worden getroffen. Door die permanente beschikbaarheid kan de leerling zich de machine werkelijk 'eigen' maken en op eigen initiatief gebruiken bij het leren van wiskunde.

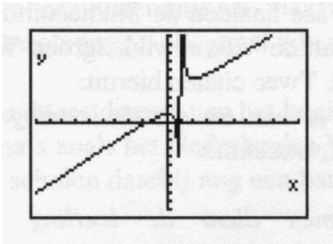
Hoewel de invoering van de grafische rekenmachine bij mijn weten niet systematisch is geëvalueerd, is de indruk dat de kritische geluiden afnemen nu de machine op de scholen gemeengoed is geworden. De meeste docenten lijken redelijk te spreken te zijn over de mogelijkheden die de grafische rekenmachine de leerlingen biedt.

Overigens is het goed om te vermelden dat Nederland op dit punt internationaal gezien niet voorop loopt. In de ons omringende landen die een centraal examen kennen, zoals de Scandinavische landen, Engeland, Frankrijk en enkele Duitse deelstaten, is de grafische rekenmachine al enige tijd bij het examen toegelaten. In Frankrijk is ook computeralgebra toegestaan en in Denemarken en Engeland zal dat spoedig het geval zijn of wordt dat serieus overwogen. In landen die geen centraal examen kennen, zoals België, Oostenrijk en een aantal Duitse deelstaten, is het beeld minder duidelijk omdat de scholen daar vaak autonomer zijn in hun politiek ten aanzien van ICT.

4 Experimenten en onderzoek

De invoering van de grafische rekenmachine is ondersteund door experimenten en onderzoek. In de periode 1991–1994 is door het Freudenthal Instituut het project 'De grafische rekenmachine in het wiskundeonderwijs' uitgevoerd (Doorman, Drijvers en Kindt, 1994). In dit onderzoek werd lesmateriaal ontwikkeld dat in verschillende klassen werd uitgetest.

De beschikbaarheid van de GR maakte een andere manier van omgaan met functies mogelijk. Al in 1992 beschreef Martin Kindt hoe de grafische rekenmachine het destijds gebruikelijke functieonderzoek zou beïnvloeden: de grafiek is niet langer het eindproduct van een aantal algebraïsche activiteiten, maar eerder het startpunt. Leerlingen tekenen eerst de grafiek met de GR en bekijken vervolgens welke kenmerken een nader onderzoek verdienen (zie Kindt, 1992a en 1992b). De trend om de grafiek als uitgangspunt voor functieonderzoek te nemen was al eerder in gang gezet, maar met de grafische rekenmachine kan de leerling die grafiek naar behoeven wijzigen. In het algemeen maakt de grafische rekenmachine een visuele benadering van onderwerpen in de analyse en algebra mogelijk, die eerder niet haalbaar was.



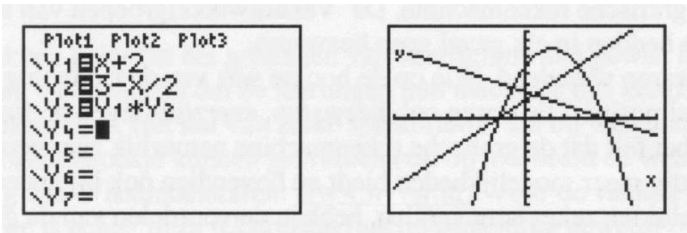
Figuur 2 Grafische onvolkomenheden

In dit verband kent de grafische rekenmachine overigens wel onvolkomenheden. Een van de bevindingen, die stroken met uitkomsten van internationaal onderzoek, betrof de moeilijkheden die zich kunnen voordoen bij het tekenen en interpreteren van grafieken. In figuur 2 staat bijvoorbeeld de grafiek van de functie f met

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}$$

zoals die wordt getekend in het standaard kijkvenster van de TI-83, de grafische rekenmachine die ik in dit artikel gebruik.

Door de beperkte resolutie van het scherm is de grafiek wat schokkerig en bovendien wordt op een vreemde manier met de verticale asymptoot omgegaan. Op één van de proefscholen wisten veel leerlingen niet hoe ze deze grafiek moesten interpreteren. Ze waren evenmin in staat om een beter kijkvenster in te stellen. Het tekenen en aflezen van grafieken met een grafische rekenmachine is niet zo eenvoudig als men misschien zou denken!



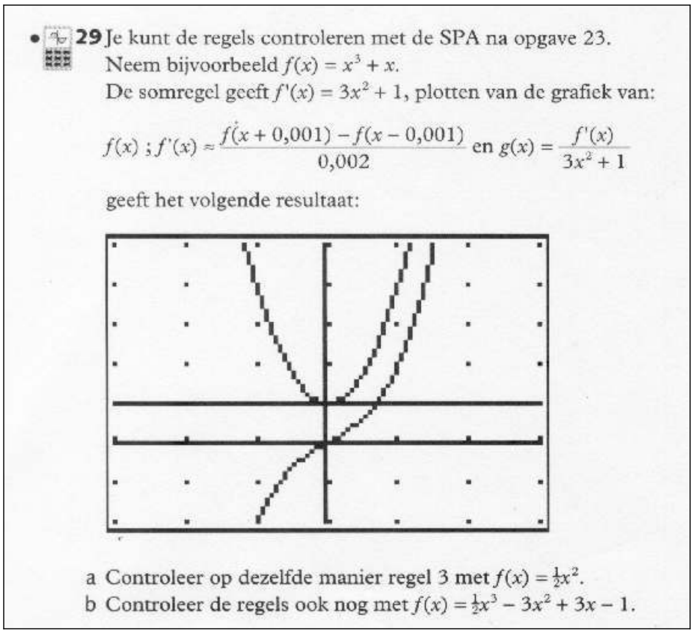
Figuur 3 Exploratie van producten van lineaire functies

In het genoemde onderzoek werd de grafische rekenmachine ook ingezet voor exploratieve activiteiten.

In figuur 3 staat in het linker scherm hoe een functie Y3 gedefinieerd is als het product van twee lineaire functies, Y1 en Y2. De grafiek in het rechter venster lijkt een parabool te zijn, en algebraïsch is in te zien dat dat ook inderdaad zo is. Nu is het spel om de formule voor Y3 ongewijzigd te laten, terwijl die van Y1 en Y2 wel veranderd mogen worden. Is het mogelijk om te zorgen dat de grafiek van Y3:

- een dalparabool wordt?
- haar top exact boven het snijpunt van de twee lijnen heeft?
- de x-as raakt?
- geheel onder de x-as ligt?

Dergelijke vragen kunnen door voorbeelden te genereren met de grafische rekenmachine snel worden onderzocht, waarna een algebraïsche argumentatie tot zekerheid moet leiden.



29 Je kunt de regels controleren met de SPA na opgave 23.
Neem bijvoorbeeld $f(x) = x^3 + x$.
De somregel geeft $f'(x) = 3x^2 + 1$, plotten van de grafiek van:

$$f(x)\ ;\ f'(x) \approx \frac{f(x+0{,}001) - f(x-0{,}001)}{0{,}002} \text{ en } g(x) = \frac{f'(x)}{3x^2+1}$$

geeft het volgende resultaat:

a Controleer op dezelfde manier regel 3 met $f(x) = \frac{1}{2}x^2$.
b Controleer de regels ook nog met $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.

Figuur 4 Opgave uit Wiskundelijn 4A vwo

Het hierboven beschreven onderzoek naar de grafische rekenmachine is vanaf 1995 geïntegreerd in het Profi-project, waarin de vakinhoud van met name wiskunde B1 en B2 voor de nieuwe Tweede Fase is ontwikkeld. In dit kader hebben in 1996 de eerste experimentele eindexamens plaatsgevonden waarbij de grafische rekenmachine werd gebruikt.

Een ander project dat het vermelden waard is, is het experimentele onderzoek van Van Streun en anderen (Van Streun, Harskamp en Suhre, 1997). In 8 van de 12 bij het onderzoek betrokken vwo4-klassen werd de grafische rekenmachine gebruikt. Op basis hiervan concluderen de onderzoekers onder andere dat zwakke leerlingen naar verhouding meer van de grafische rekenmachine profiteren dan sterke, en dat de leerlingen die de grafische rekenmachine gebruiken een groter repertoire aan oplossingstechnieken opbouwen en meer wegen zien om aan een opgave te beginnen.

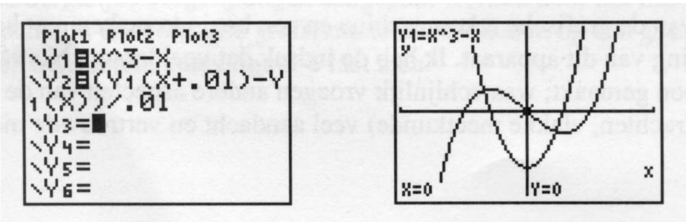
Natuurlijk leeft de vraag, hoe het wiskundeonderwijs optimaal kan profiteren van de grafische rekenmachine, ook internationaal. Het is ondoenlijk om al het onderzoek dat wereldwijd op dit gebied gedaan wordt in kort bestek in kaart te brengen. Globaal gesproken zijn er vanuit mijn (beperkte) blik misschien de volgende hoofdlijnen te ontdekken:

- Veel aandacht is besteed aan de moeilijkheden die leerlingen hebben met het omgaan met grafische voorstellingen op het scherm, pixelbeperkingen en het instellen van het kijkvenster, zoals genoemd in het voorbeeld bij figuur 1. In principe zijn deze kwesties ook van toepassing bij het werken met een grafiekenprogramma op de PC, zij het minder pregnant. Veel nadruk is gelegd op de mogelijkheden van de grafische rekenmachine bij de visualisatie van wiskundige technieken en concepten.
- Oorspronkelijk overheerste bij veel onderzoekers optimisme over de mogelijkheden van de grafische rekenmachine bij exploratie, conceptvorming, zelfontdekkend leren en het werken aan realistische toepassingen. Veel goede voorbeelden daarvan zijn ontwikkeld; anderzijds hebben praktijkervaringen het optimisme soms wel tot wat geringere proporties teruggebracht en lijkt er eerder sprake te zijn van een evolutie dan van een revolutie.
- Het besef heeft terrein gewonnen dat ook met een grafische rekenmachine (of ICT in het algemeen) de zaken waar we in het onderwijs op aansturen niet vanzelf gaan. Interessant is te weten welke voorkennis en vaardigheden voorwaarde zijn voor het functioneren van een apparaat bij het leren van wiskunde. En hoe zit het met de subtiele verhouding tussen werken met pen en papier versus werken met de GR? Ook de rol van de docent hierbij komt meer en meer in de belangstelling te staan.

5 Implementatie

Na de periode van besluitvorming, experiment en onderzoek volgde de implementatiefase. Een heel belangrijke rol daarbij spelen de schoolboeken. Hoe is in de belangrijkste schoolmethodes op de grafische rekenmachine gereageerd? Hoewel de GR niet in alle methodes een even prominente plaats krijgt, is de grafische rekenmachine wel in alle boeken geïntegreerd. Er staan bijvoorbeeld schermafdrukken in of er wordt door middel van icoontjes aangegeven dat de GR bij een bepaalde opgave nuttig is. Ook bij praktische opdrachten wordt soms expliciet verwezen naar de mogelijkheden die de grafische rekenmachine daarbij biedt. Om onafhankelijk te zijn van een specifiek type grafische rekenmachine, dat immers snel vervangen kan worden door een nieuwer model, voorzien de boeken slechts in globale verwijzingen, terwijl voor de gangbare types en merken aparte boekjes met instructies en voorbeelden op knoppenniveau beschikbaar zijn. In sommige methodes is de koppeling tussen deze bijboeken en het hoofdboek zeer nauw, terwijl bij andere methodes deze meer los van elkaar staan.

Ook het moment waarop de grafische rekenmachine in het leerproces wordt ingezet, is verschillend. In sommige methodes komt de GR pas in beeld als het gebruikelijke handwerk al grotendeels is gedaan, terwijl bij andere de grafische rekenmachine al in een eerder fase wordt ingezet.

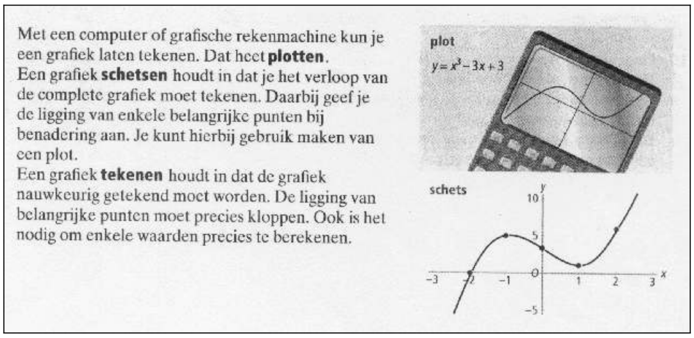


Figuur 5 Grafiek van de numerieke afgeleide

Een voorbeeld van de laatste benadering betreft de invoering van de afgeleide functie. In verschillende methodes wordt de grafische rekenmachine gebruikt om de grafiek te laten tekenen van de numerieke afgeleide. In het linker scherm van figuur 5 is de functie Y2 gedefinieerd als het differentiequotiënt van Y1 bij een differentie van 0,01. De grafiek van Y2 in het rechter scherm suggereert (ook niet meer dan dat) dat de afgeleide van de derdegraads functie wel eens kwadratisch zou kunnen zijn, en leerlingen kunnen zelfs achterhalen welke kwadratische functie dan in aanmerking komt.

In figuur 4 staat een opgave uit Wiskundelijn, de eerste methode die in 1996 met aan de GR aangepaste boeken op de markt kwam. De numerieke benadering waarmee de afgeleide wordt gecontroleerd, komt tot stand door vanuit het punt in kwestie één stapgrootte naar rechts én één stapgrootte naar links te gaan. Dat geeft in het algemeen een betere benadering en deze methode wordt dan ook als interne numerieke procedure door de grafische rekenmachine gebruikt. Nadeel is echter dat de benadering van de afgeleide van de absolute waarde functie in $x = 0$ gelijk aan 0 wordt en dat is natuurlijk niet de bedoeling. In de tekst in Wiskundelijn, een serie die overigens niet meer op de markt is, valt het woord 'plot' op. De meeste schoolboeken maken afspraken over de te hanteren terminologie rond het tekenen van grafieken. Figuur 6 toont dergelijke afspraken zoals ze in Moderne wiskunde staan. Op de nomenclatuur bij het gebruik van de grafische rekenmachine kom ik verderop terug.

Ten aanzien van de implementatie is nog de nascholing te vermelden. Door middel van cursussen, conferenties, werkgroepen en studiedagen hebben docenten gelegenheid gekregen om zich te bekwamen in het gebruik van de grafische rekenmachine en een begin te maken met het ontwikkelen van een didactische inpassing van dit apparaat. Ik heb de indruk dat veel leraren hiervan slechts oppervlakkig gebruik hebben gemaakt; waarschijnlijk vroegen andere aspecten van de Tweede Fase (studiehuis, praktische opdrachten, vlakke meetkunde) veel aandacht en vertrouwde men op de schoolboeken.


Met een computer of grafische rekenmachine kun je een grafiek laten tekenen. Dat heet **plotten**.
Een grafiek **schetsen** houdt in dat je het verloop van de complete grafiek moet tekenen. Daarbij geef je de ligging van enkele belangrijke punten bij benadering aan. Je kunt hierbij gebruik maken van een plot.
Een grafiek **tekenen** houdt in dat de grafiek nauwkeurig getekend moet worden. De ligging van belangrijke punten moet precies kloppen. Ook is het nodig om enkele waarden precies te berekenen.

Figuur 6 Terminologie in Moderne wiskunde A1/B1 deel 1

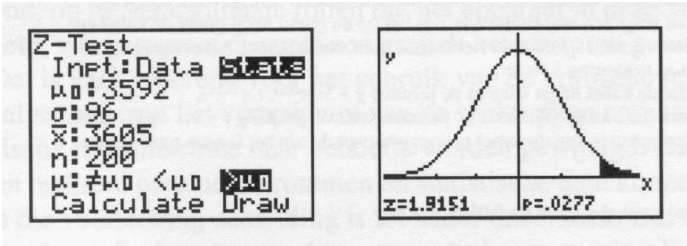
6 Examenpraktijk

Natuurlijk zal de beschikbaarheid van de grafische rekenmachine ook de gang van zaken bij het eindexamen beïnvloeden. Uit tabel 1 bleek dat een begin is gemaakt met het ontwikkelen van een examenpraktijk, zodat enig zicht ontstaat op de veranderingen die zullen plaatsvinden. Ik geef drie voorbeelden. Om te beginnen kan de machine een deel van het uitvoerende werk overnemen. In het eindexamen vwo wiskunde A van 2000 (eerste tijdvak, zie www.cito.nl) ging vraag 8 over het geboortegewicht van mannelijke baby's. Van een groot aantal Amerikaanse baby's was het gemiddelde geboortegewicht 3592 gram met een standaardafwijking van 96 gram. Een groep van 200 Nederlandse jongetjes woog bij geboorte gemiddeld 3605 gram en de vraag was of dat significant hoger is. De leerlingen mochten bij dit examen de GR nog niet gebruiken, maar als dat wel het geval was geweest, zou het voornaamste probleem zijn geweest om de gegevens voor het uitvoeren van de statistische toets te ordenen zoals in het linker scherm van figuur 7. In het rechter scherm staat de reactie van de machine. De leerling moet dan nog zelf de geobserveerde significantie vergelijken met de in de opgave gegeven drempel van 5%. Aangenomen mag worden dat zoiets voor de leerlingen tot de standaardtoepassingen gaat behoren.

Een tweede voorbeeld uit hetzelfde examen betreft de vraag hoe hoog een dijk moet zijn opdat de kans op doorbraak niet groter is dan eens per 10.000 jaar. Het gegeven model luidt als volgt.

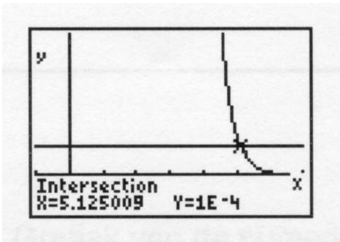
$$f(h) = 408 \cdot 0,0513^h$$

De vraag is: voor welke waarde van hoogte h geldt dat $f(h) = 10^{-4}$? Met de GR kunnen dergelijke vergelijkingen aangepakt worden door het linkerlid en het rechterlid afzonderlijk als functie in te voeren, de grafieken te laten tekenen op een geschikt kijkvenster en dan het snijpunt te laten benaderen, zoals figuur 8 laat zien.



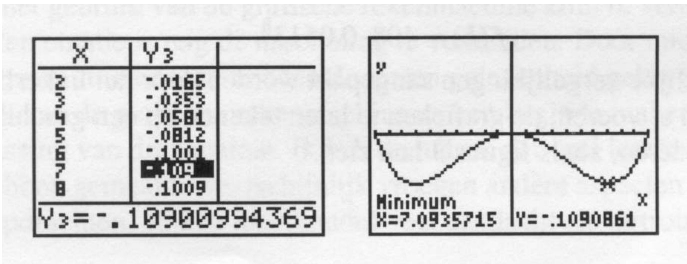
Figuur 7 Een statistische toets op de grafische rekenmachine

In dit geval is met de hand oplossen natuurlijk niet moeilijk, maar ook in ingewikkelder gevallen is de GR-methode te hanteren; we hoeven ons dus niet meer te beperken tot modellen die analytisch op te lossen zijn, maar kunnen ook complexere en meer realistische modellen in het onderwijs introduceren. Dat met de GR slechts benaderingen worden gevonden en geen exacte resultaten mag geen bezwaar zijn: het model is niet meer dan een benadering van de werkelijkheid, dus van een exact antwoord zou een verkeerde suggestie kunnen uitgaan. Net als in het eerste voorbeeld kan ook hier een standaardprobleem, namelijk het oplossen van een vergelijking, aan de machine worden uitbesteed, maar deze keer veranderen ook de aard van de werkzaamheden en de oplossing.



Figuur 8 Grafische oplossing van een vergelijking

Het derde examenvoorbeeld is afkomstig van het Profi-examen van 2000, eerste tijdvak (zie figuur 10). In vraag 10 wordt expliciet gevraagd de grafische rekenmachine te gebruiken bij het bepalen van de maximale hoogteverschil tussen een kettinglijn en een benaderende parabool. Analytisch zou dit niet mogelijk zijn. De voor de hand liggende aanpak is om de twee gegeven functies als Y1 en Y2 in de machine in te voeren, en vervolgens Y3 te definiëren als de verschilfunctie van die twee. Een tabel (linker scherm van figuur 9) geeft een indruk van de waarden van dat verschil. Met behulp daarvan kan een geschikt kijkvenster worden ingesteld. De rekenmachine bepaalt vervolgens het maximale hoogteverschil in het rechterscherm. Deze opgave zou zonder grafische rekenmachine niet te doen zijn.



Figuur 9 Grafisch berekenen van een extreem

Kettinglijn

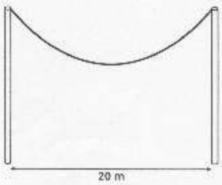
In deze opgave bekijken we voor elk positief getal a de functie $f(x) = \frac{1}{2a}(e^{ax} + e^{-ax})$.

Neem $a = 1$.

6p 8 □ Bewijs dat $(f(x))^2 = (f'(x))^2 + 1$ voor elke x.

Kabels die vrij in de lucht hangen tussen twee masten, zoals bijvoorbeeld hoogspanningskabels, hangen volgens een kromme die de vorm heeft van de grafiek van een functie f. Vandaar dat die ook wel een kettinglijn wordt genoemd. We nemen als voorbeeld een kabel die is opgehangen tussen twee even hoge masten die 20 meter uit elkaar staan. Zie figuur 7.

figuur 7



Hoewel kettinglijnen en parabolen verschillende krommen zijn, lijken ze op elkaar. We kiezen als volgt een assenstelsel: de x-as ligt op de grond recht onder de kabel en de y-as staat verticaal en gaat door het laagste punt van de kabel. Als eenheid op de x-as en de y-as nemen we 1 meter.
Neem aan dat de kabel hangt volgens de formule $y = 5 \cdot (e^{0,1x} + e^{-0,1x})$.
We benaderen deze kettinglijn door de parabool met vergelijking $y = r(x-p)^2 + q$ die door de ophangpunten van de kabel gaat en waarvan de top het laagste punt van de kabel is.

5p 9 □ Toon aan dat $p = 0$, $q = 10$ en $r \approx 0{,}0543$.

De kettinglijn en de parabool verschillen overal in hoogte boven de grond, behalve in de twee ophangpunten en de top.

4p 10 □ Onderzoek met behulp van je grafische rekenmachine wat het grootste verschil in hoogte is tussen de kettinglijn en de parabool. Geef je antwoord in centimeters nauwkeurig.

Figuur 10 Opgave uit het Profi-examen 2000

	Maximumscore 4		
10 □	• De verschilformule in de grafische rekenmachine invoeren	2	
	• Het grootste verschil is 11 cm, met toelichting	2	

Figuur 11 Correctievoorschrift

De bovenstaande examenvragen leiden tot benaderende uitkomsten. Toch worden er ook wel eens analytische, exacte antwoorden van de leerlingen verlangd. De vraag is dus hoe leerlingen weten wat er verwacht wordt. De nomenclatuurcommissie van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (zie www.nvvw.nl) heeft voorstellen gedaan omtrent de te gebruiken terminologie. De volgende uitleg van het woord 'bereken' wordt daar gegeven:

Hierbij moet de berekening altijd opgeschreven worden; het antwoord mag ook een met de (grafische) rekenmachine gevonden antwoord zijn. Bij het gebruik van de grafische rekenmachine moet duidelijk worden aangegeven hoe men tot het antwoord komt. Wanneer een antwoord wordt vereist dat langs algebraïsche weg en niet via benaderingen met de (grafische) rekenmachine dient te worden gevonden, wordt dat in de vraagstelling expliciet aangegeven. Dit kan op de volgende manier: "Bereken (eventueel met een toevoeging als 'langs algebraïsche weg' of 'met differentiëren' of iets dergelijks) de exacte waarde van …"

De leerling zal dus uit de formulering van de vraagstelling moeten afleiden wat de bedoeling is. Ook voor de manier waarop het antwoord opgeschreven moet worden zijn richtlijnen geformuleerd. In een voorbeeld over het grafisch oplossen van een vergelijking zoals in figuur 8 wordt de volgende mogelijke toelichting van de leerling gegeven:

In CALC menu gekozen voor INTERSECT; voor de grafieken Y1 en Y2, de grenzen van het interval op 0 en 100 gezet. Dit gaf precies één snijpunt. De x hiervan is op twee decimalen afgerond 3,14. (www.eindexamen.nl)

Het correctievoorschrift van de vraag over de kettinglijn is wat minder gedetailleerd (zie figuur 11); het blijft vaag welke eisen aan een toelichting worden gesteld.

Uit deze drie voorbeelden blijkt dat bij examenopgaven ook grafisch/numeriek verkregen oplossingen gehonoreerd worden. Uit de vraagstelling moet de leerling kunnen afleiden of dat de bedoeling is. Bepaalde standaardmethoden zoals het uitvoeren van een statistische toets of van een matrixvermenigvuldiging kunnen aan de machine worden overgelaten.

7 Rollen van de grafische rekenmachine

Tot dusver is een aantal voorbeelden gegeven waarin de grafische rekenmachine gebruikt werd. Laat ik eens proberen daarin wat lijn te brengen om zicht te krijgen op de verschillende manieren waarop die machine van pas komt en op de verschillende rollen die het apparaat in deze voorbeelden speelt.

In het eerste voorbeeld van paragraaf 4 wordt een grafiek het startpunt genoemd van het functieonderzoek. Dat is vaak typerend voor het gebruik van de grafische rekenmachine: je begint met een plaatje. De visualisatie vormt het vertrekpunt van de wiskundige activiteiten en kan door de leerling met de grafische rekenmachine naar behoefte worden gewijzigd. Dat geldt niet alleen voor functies; ook rijen en reeksen, parameterkrommen en statistische data kunnen grafisch worden voorgesteld, waarna die voorstelling aanleiding is tot nader onderzoek. Dat is dus de eerste, voor de hand liggende rol van de grafische rekenmachine: gereedschap voor visualisatie.

In het tweede voorbeeld van paragraaf 4 is de grafische voorstelling aanleiding tot een 'spelletje': hoe verandert de grafiek van de productfunctie als een van de factoren gewijzigd wordt, en hoe kan een bepaald grafisch effect worden bewerkstelligd? De bedoeling is natuurlijk dat leerlingen door deze situatie worden uitgedaagd om te onderzoeken welke verbanden bestaan tussen de factoren en de productfunctie. De grafische rekenmachine vereenvoudigt de verkenning van de situatie; de leerling kan snel een groot scala van mogelijkheden exploreren. Deze exploratie leidt tot het ontdekken van verbanden of patronen die vervolgens (algebraïsch) worden geverifieerd. De grafische rekenmachine dient dan als gereedschap dat de exploratie mogelijk maakt.

Ook in het derde voorbeeld, dat van de numerieke afgeleide (paragraaf 5), kan de leerling de situatie exploreren. Het effect van een verandering van de differentie kan worden onderzocht, en de hellinggrafiek kan worden vergeleken met de grafiek van de (vermoedelijke) analytische afgeleide die de leerling als Y3 kan invoeren. Ook kan de oorspronkelijke functie Y1 eenvoudig worden gewijzigd. Het doel van deze exploratie is nu niet het ontdekken van verbanden of patronen, maar eerder het ontwikkelen van een beeld van wat een afgeleide functie voorstelt. De rol van de machine is dus net als in het vorige voorbeeld die van een omgeving die exploratie mogelijk maakt. Het verschil met de vorige situatie is dat het nu gaat om de conceptvorming in plaats van het ontdekken van verbanden en regels.

De drie examenopgaven uit paragraaf 6 hebben met elkaar gemeen dat het niet zo zeer gaat om visualisatie of exploratie (wat in een examensituatie ook moeilijk te realiseren zou zijn) maar dat de machine gebruikt wordt voor het uitvoeren van standaardprocedures. In het geval van de statistische toets wordt de leerling het berekenen van de z-score en het gebruik van de tabel van de normale kansverdeling bespaard. Afgezien daarvan verandert er niet veel. In het tweede voorbeeld, waarin een vergelijking wordt opgelost, is de invloed van de grafische rekenmachine iets ingrijpender: de algebraïsche manipulaties, die leerlingen vaak moeilijk vinden, worden vervangen door machinetechnieken zoals het instellen van het kijkvenster en het aanroepen van de numerieke snijpuntsbepaling. De derde examenvraag over de kettinglijn is hiermee vergelijkbaar in die zin dat in dit geval het bepalen van het extreem van de verschilfunctie niet door differentiëren bepaald wordt maar met een numerieke procedure. Samengevat speelt de grafische rekenmachine dus drie rollen in de gegeven voorbeelden. De machine is gereedschap voor:

- visualisatie;
- exploratie van verbanden en concepten;
- uitvoering van standaardprocedures.

Deze classificatie is niet meer dan een poging om lijn te brengen in de manieren waarop de grafische rekenmachine wordt gebruikt. Van een volledige opsplitsing in onderling volstrekt disjuncte categorieën is geen sprake. Toch biedt deze driedeling een handvat om de functie van dit apparaat enigszins te ordenen. Deze ordening komt van pas bij het beantwoorden van de vraag die ik in het begin van dit artikel stelde, en waarop ik in de volgende paragraaf terugkom.

8 Studenten met een grafische rekenmachine

Waar het allemaal om begonnen is, is de vraag wat het voor het universitaire onderwijs betekent dat de studenten over een grafische rekenmachine beschikken, en wat men van deze generaties studenten kan verwachten. Het antwoord hierop kan natuurlijk slechts speculatief zijn, maar laat ik uitgaande van de hierboven beschreven ontwikkelingen een poging wagen.

Het belangrijkste punt is gerelateerd aan de derde rol van de grafische rekenmachine: het uitvoeren van standaardprocedures. Ik verwacht dat de studenten vertrouwd zijn met hun grafische rekenmachine en die vaardig gebruiken om veelvoorkomende procedures routinematig uit te voeren. Te denken valt aan het tekenen van grafieken, het oplossen van vergelijkingen, het rekenen met matrices en het uitvoeren van statistische bewerkingen. Waarschijnlijk zullen studenten ook graag op deze standaardtoepassingen terugvallen, bijvoorbeeld om op een andere manier gevonden antwoorden te controleren. Mogelijk zullen ze eerder genoegen nemen met een numerieke benadering en zal het moeilijker zijn ze te motiveren voor exacte antwoorden. Wanneer toepassingen centraal staan, zoals in serviceonderwijs aan studenten van niet-wiskundige studierichtingen, is het de vraag of een accentverschuiving in de richting van numerieke benaderingen overwogen moet worden. Wanneer daarentegen het verwerven van algebraïsche vaardigheden een van de onderwijsdoelen is, kan de grafische rekenmachine als controlegereedschap gebruikt worden, maar zal men aan de studenten duidelijk moeten maken dat dat niet voldoende is. De 'formele' algebraïsche bagage van de toekomstige student zal vermoedelijk niet groter zijn dan in het verleden.

Gelet op de eerder beschreven mogelijkheden tot visualisatie die de grafische rekenmachine biedt, ligt het voor de hand om te veronderstellen dat de nieuwe generatie studenten visueler is ingesteld dan voorheen. Dat zou betekenen dat studenten zelf eerder geneigd zijn bepaalde situaties of concepten in een plaatje te 'vertalen'. Als ze daar goed in geworden zijn, dan zou het universitaire onderwijs daarbij kunnen aansluiten door in sterkere mate op deze kwaliteit een beroep te doen.

Als vwo-leerlingen de grafische rekenmachine gebruiken voor exploratie en onderzoek, dan zou dat kunnen betekenen dat de toekomstige studenten ook meer dan vroeger geneigd zijn om snel even een voorbeeldje uit te proberen op de GR, een speciaal geval te onderzoeken of eerst maar eens wat getallen in te vullen, kortom het probleem wat experimenteler te benaderen. Omdat leerlingen met de grafische rekenmachine vaak heen-en-weer springen tussen formules, tabellen en grafieken, hopen we dat ze flexibeler zijn geworden in het combineren van verschillende representaties. Ook hiervoor geldt dat een onderzoekende, experimentele houding in principe geëxploiteerd kan worden in het universitaire onderwijs, maar dat anderzijds duidelijk moet worden dat vaak niet volstaan kan worden met 'trial-and-improve'.

Samengevat verwacht ik dat studenten die een ruime ervaring hebben met de grafische rekenmachine:

- standaardprocedures gebruiken die numerieke antwoorden geven;
- visueel zijn ingesteld;
- de wiskunde experimenteel benaderen.

Zoals gezegd zijn dit verwachtingen die nog niet aan de realiteit zijn getoetst. Verder neem ik aan dat er in dit opzicht aanzienlijke verschillen tussen studenten onderling zullen bestaan, die onder andere afhangen van het type machine, het gebruikte schoolboek en vooral van de praktijk in de les, zoals die door de docent is vormgegeven. Als niettemin de grote lijn van het bovenstaande juist is, dan is de uitdaging voor het universitaire onderwijs om de bovengenoemde kenmerken zo effectief mogelijk in te zetten voor het verwezenlijken van de onderwijsdoelen.

Literatuur

1 Doorman, L.M., Drijvers, P. en Kindt, M. (1994). *De grafische rekenmachine in het wiskundeonderwijs*. Utrecht: Freudenthal Instituut.

2 Drijvers, P. (1995). *Neem de grafiek over* ... In: De Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs 14(4), pp. 29–35.

3 Kindt, M. (1992a). *Functie-onderzoek begint met de grafiek I*. Euclides 67(7), pp. 200–204.

4 Kindt, M. (1992b). *Functie-onderzoek begint met de grafiek II*. Euclides 67(8), pp. 227–230.

5 Van Streun, A., Harskamp, E. en Suhre, C. (1997). *Integratie van de grafische rekenmachine*. In: De Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs 16(3), pp. 14–19.