J. van de Craats
Koninklijke Militaire Academie
Postbus 90154, 4800 RG Breda
J.vd.Craats@mindef.nl

Alledaagse wiskunde

'Alledaagse wetenschap' is de titel van een rubriek in de zaterdagse bijlage 'Wetenschap en Onderwijs' van NRC Handelsblad. In deze rubriek behandelt Karel Knip in de geest van Minnaerts 'Natuurkunde van het vrije veld' natuurwetenschappelijke verschijnselen die je in het dagelijks leven tegen komt. Soms komt daarbij wiskunde aan te pas.

Naar aanleiding van een luchtfoto van het terrein van SF Fireworks te Enschede vlak voor de vuurwerkramp opperde Karel Knip in zijn rubriek Alledaagse Wetenschap in NRC Handelsblad van 3 juni 2000 het volgende meetkundige probleem: een loods is drie keer zo lang als breed, maar een fotograaf ziet de lange en de korte zijde vanaf een bepaalde plaats als precies even lang. Zie figuur 1 voor een bovenaanzicht. De vraag is: *bevinden zich alle punten vanwaar de twee zijden als even lang worden gezien op een rechte, en hoe wordt deze rechte het eenvoudigst geconstrueerd?*

Karel Knip vat het probleem dus op als een planimetrische opgave, waarbij alles zich afspeelt in een plat vlak. En ter nadere precisering: blijkbaar wordt aangenomen dat de fotograaf zijn lens richt op het meest nabije hoekpunt O van de loods. De probleemstelling kan dan als volgt vertaald worden in hoeken: bepaal alle punten X waarvoor geldt dat $\angle OXP = \angle OXQ$.

We hebben Knip teleur moeten stellen: de betreffende punten bevinden zich niet op een rechte. Althans niet allemaal. De oplossing van de opgave wordt gegeven in figuur 2. Ze bestaat uit twee delen: de rechte ℓ door de twee uiterste hoekpunten P en Q van de loods, en een derdegraadskromme Γ die eveneens door die twee hoekpunten gaat, maar die bovendien het dichtstbijgelegen hoekpunt van de loods als dubbelpunt heeft. En om helemaal precies te zijn: niet alle punten van die rechte en die kromme tellen mee; alleen de dik getekende stukken voldoen aan de opgave. Daarbij nemen we wel aan dat de loods volkomen doorzichtig is, met andere woorden, dat we de zijden OP en OQ van de loods vanuit alle posities in het vlak kunnen waarnemen.

De derdegraadskromme is in het bezit van een *asymptoot*, een rechte lijn waar de kromme zich steeds dichter tegenaan vlijt naarmate de fotograaf zich verder van de loods verwijdert. In figuur 2 is die asymptoot als een dunne stippellijn getekend. Vanaf een grote afstand gezien is er dus bij benadering wel degelijk sprake van een 'rechte' van waaruit men de twee zijden van de loods onder dezelfde hoek ziet. We zullen ook laten zien hoe men die asymptoot kan bepalen. Knips vraag naar een 'constructie' ervan getuigt nog van een ouderwetse meetkundeopleiding, waarin liefst met passer en liniaal gewerkt werd. Zo'n constructie zou voor de asymptoot nog wel mogelijk zijn, maar voor de rest van de opgave heb je niets aan een passer en een liniaal. De moderne toverformule luidt in dit soort gevallen: kies een geschikt coördinatenstelsel en reken alles uit.

We kiezen de assen langs de muren van loods, en wel zo, dat het dichtstbij gelegen hoekpunt O van de loods in de oorsprong komt, en dat de twee andere hoekpunten P en Q respectievelijk de coördinaten $P = (0, p)$ en $Q = (q, 0)$ krijgen. In de opgave (en in figuur 2) geldt $p = 1$ en $q = 3$, maar we kunnen het probleem net zo goed in zijn algemeenheid oplossen.
We zoeken dus alle punten $X = (x, y)$ waarvoor geldt dat $\angle OXP = \angle OXQ$. Via inwendige producten kan die voorwaarde vertaald worden in de vergelijking

$$\frac{x^2+y^2-py}{\sqrt{x^2+(y-p)^2}\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^2+y^2-qx}{\sqrt{(x-q)^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}}$$

en dit levert na kwadrateren en vereenvoudigen de volgende vergelijking

$$(x^2+y^2-py)^2((x-q)^2+y^2) = (x^2+y^2-qx)^2(x^2+(y-p)^2)$$

waarbij we haast ongemerkt ook de punten hebben ingevoerd waarvoor geldt dat $\angle OXP + \angle OXQ = 180°$. In figuur 2 corresponderen die met de punten van de dun getekende stukken van ℓ en Γ. De laatstgenoemde vergelijking laat zich verder vereenvoudigen tot

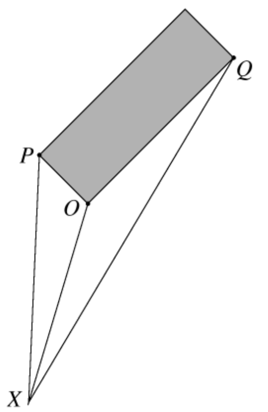
$$(px+qy-pq)(px^3-pqx^2-qx^2y+pxy^2+pqy^2-qy^3) = 0$$

hetgeen, in meetkundige termen vertaald, neerkomt op de rechte

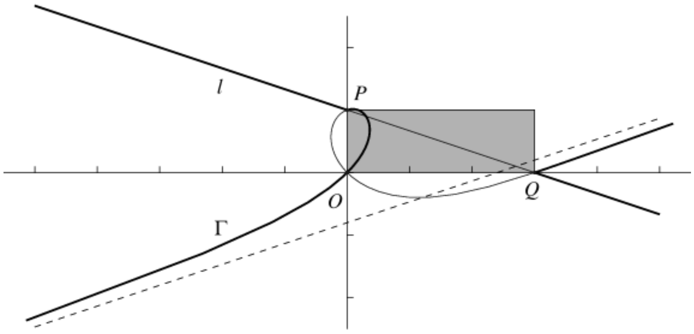
$$\ell: \quad px+qy = pq$$

door P en Q, en de derdegraadskromme

$$\Gamma: \quad px^3-pqx^2-qx^2y+pxy^2+pqy^2-qy^3 = 0.$$



Figuur 1 Bevinden zich alle punten X vanwaar men de twee zijden OP en OQ onder gelijke hoeken ziet op een rechte?



Figuur 2 Vanuit elk punt op de dik getekende stukken van ℓ en Γ ziet men OP en OQ onder dezelfde hoek.

De substitutie $y = \lambda x$ leidt tot de parametervoorstelling

$$\begin{cases} x = \dfrac{pq(1-\lambda^2)}{(p-q\lambda)(1+\lambda^2)} \\ y = \dfrac{\lambda pq(1-\lambda^2)}{(p-q\lambda)(1+\lambda^2)} \end{cases}$$

waarmee men de kromme kan tekenen. Het dubbelpunt O komt overeen met de waarden $\lambda = 1$ en $\lambda = -1$, de waarde $\lambda = 0$ geeft het punt Q en $\lambda = \infty$ geeft P. Voor $\lambda = p/q$ krijgen we het 'punt op oneindig' dat verantwoordelijk is voor de asymptoot, die dus van de vorm

$$y = \frac{p}{q}x + c$$

is voor zekere constante c. We kunnen c bepalen door in de uitdrukking

$$y - \frac{p}{q}x = \frac{(\lambda - \frac{p}{q})pq(1-\lambda^2)}{(p-q\lambda)(1+\lambda^2)}$$

de limiet te bepalen als λ tot p/q nadert.

Die limiet is $p(p^2-q^2)/(p^2+q^2)$ en dus luidt de vergelijking van de asymptoot

$$y = \frac{p}{q}x + \frac{p(p^2-q^2)}{p^2+q^2}.$$

In figuur 2 geldt $p = 1$ en $q = 3$. Daar heeft de derdegraadskromme Γ dus de vergelijking

$$x^3 - 3x^2 - 3x^2y + xy^2 + 3y^2 - 3y^3 = 0,$$

terwijl de asymptoot de volgende vergelijking heeft:

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{4}{5}.$$

De algemene aanpak met letters p en q in plaats van de opgegeven waarden $p = 1$ en $q = 3$ maakt dat we ook nog ter controle gemakkelijk kunnen nagaan wat er gebeurt als, bijvoorbeeld, $p = q = 1$. De formules laten zien dat de derdegraadskromme Γ zich dan opsplitst in de rechte $y = x$ en de omgeschreven cirkel $x^2 + y^2 - x - y = 0$ van de loods. Op meetkundige gronden is de juistheid van deze oplossing ook direct duidelijk.