Universitaire Wiskunde Competitie

De Universitaire Wiskunde Competitie (UWC) is een ladderwedstrijd voor studenten, georganiseerd in samenwerking met de Vlaamse Wiskunde Olympiade. De opgaven worden tevens gepubliceerd op de internetpagina http://academics.its.tudelft.nl/uwc

Ieder nummer bevat de ladderopgaven A, B, en C waarvoor respectievelijk 30, 40 en 50 punten kunnen worden behaald. Daarnaast zijn er respectievelijk 6, 8 en 10 extra punten te winnen voor elegantie en generalisatie. Per nummer worden twee prijzen van 100 Euro toegekend: één aan de aanvoerder van de ladder (die daarna weer onderaan begint), en één aan de inzender van de oplossing die de meeste punten behaald heeft (die dan geen punten voor de ladder krijgt). Daarnaast is er een ster-opgave waarvan de redactie geen oplossing bekend is. Voor de eerst ontvangen correcte oplossing van deze ster-opgave wordt eveneens 100 Euro toegekend. Groepsinzendingen zijn toegestaan. Electronische inzending in LaTeX wordt op prijs gesteld. De inzendtermijn voor de oplossingen sluit op 15 mei 2000.

Eindredactie: Jan van Neerven
Redactieadres: Universitaire Wiskunde Competitie
Vakgroep Toegepaste Wiskundige Analyse
Technische Universiteit Delft
Postbus 5031, 2600 GA Delft
j.vanneerven@its.tudelft.nl

Opgave A

Zij $f : [0,1] \to [0,1]$ een functie met de volgende eigenschappen:

(i) f is differentieerbaar op $(0,1)$;
(ii) f is continu in de punten 0 en 1 ;
(iii) $f(0) = 0$;
(iv) $0 \le f'(x) \le f(f(x))$ voor alle $x \in \big(0,1\big)$.

Toon aan dat f dan constant $\big(\equiv 0\big)$ is.

Opgave B

Een rechthoekige driehoek wordt verdeeld in twee nieuwe (gelijkvormige) rechthoekige driehoeken door het neerlaten van de loodlijn uit de rechte hoek op de hypothenusa (stap 1). We doen hetzelfde met elk van de twee verkregen rechthoekige driehoeken, waardoor er dus vier rechthoekige driehoeken zijn ontstaan (stap 2). In elke nieuwe rechthoekige driehoek blijven we dit procédé toepassen, tot we in totaal tien maal een stel nieuwe driehoeken hebben gevormd (stap 10). Hoe groot is het totale aantal driehoeken waarvan de rand geen enkel punt gemeen heeft met de rand van de oorspronkelijke driehoek, dat in het verloop van de tien stappen is geconstrueerd?

Opgave C

Laat p een priemgetal zijn en laat $\nu \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Veronderstel dat $x, y, z \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ voldoen aan:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{p}$$

en

$$x + y + z = 2\nu p,$$

waarbij noch $x - p$, noch $y - p$, noch $z - p$ deelbaar is door p^3.
Bepaal alle drietallen (x, y, z).

Ster-opgave

Laat $a(n)$ het aantal manieren zijn om een n bij n matrix te vullen met nullen en enen zó, dat er nergens twee enen naast of boven elkaar staan. Dus $a(1) = 2$, $a(2) = 7$, $a(3) = 63$, enzovoort.
(i) Toon aan dat

$$\lim_{n \to \infty} \left(a(n)\right)^{1/n^2}$$

bestaat.
(ii) Vind zo goed mogelijke ondergrenzen en bovengrenzen voor deze limiet.