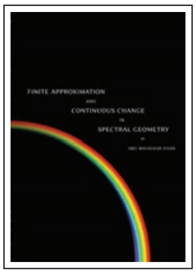
In de verdediging

| In defence



Finite Approximation and Continuous Change in Spectral Geometry

Abel Boudewijn Stern

In maart 2021 heeft Abel Boudewijn Stern van de Radboud Universiteit Nijmegen zijn proefschrift verdedigd en de graad van doctor toegekend gekregen. De titel van zijn proefschrift luidt *Finite Approximation and Continuous Change in Spectral Geometry*. Zijn promotor was dr. Walter D. van Suijlekom.

Spectrale meetkunde

Abels promotieonderzoek gaat over de spectrale meetkunde: de studie van de relatie tussen de vorm van meetkundige objecten en frequenties. Meer in het bijzonder gaat de spectrale meetkunde over de vorm van Riemannse variëteiten en het spectrum van operatoren van het Laplace-type (frequenties van stationaire hitte- of geluidsgolven). Een voorbeeld van zo'n relatie is hoe de vorm en het materiaal van een muziekinstrument het geluid bepalen. Andersom kan je aan de klank van een instrument al aardig wat horen over de vorm ervan. Abels proefschrift bestaat uit twee delen: een aanpak van spectrale meetkunde op basis van een eindig deel van het spectrum, en een nieuw concept van 'continue Schattenklassen' dat aansluit bij het spectrale perspectief op correspondenties tussen meetkundige vormen.

In de spectrale meetkunde zijn mensen geïnteresseerd in de verbanden tussen het spectrum van een differentiaaloperator, meestal de Laplaciaan of, meer algemeen, een operator van het Laplace-type, en de meetkunde van de ruimte waarop deze operator wordt toegepast, in het algemeen een Riemannse variëteit. De intuïtie hierachter heeft te maken met warmte. De warmtevergelijking is een PDE waarin de tijdsevolutie wordt bepaald door de Laplaciaan. Kennis over haar spectrum levert informatie over hoe warmte stroomt op een gegeven gebied. Laten we een gedachte-experiment doen. Stel dat je in een donkere kamer bent en het enige dat je kan zien is hoe warmte stroomt op het oppervlak van een object. Deze 'animatie' kan informatie geven over de vorm van het object, ofschoon je het object niet direct kan zien. Warmte zal alle gaatjes en bijzonderheden van de meetkunde van het object onthullen. Maar wat zegt de wiskunde hierover?

Een inverse-probleem

Laten we beginnen met een voorbeeld, het probleem van Dirichlet. Zij $\Omega \subseteq R^n$ een 'mooi' gebied en beschouw de Laplaciaan Δ, toegepast op een functie $f \in C^2(\Omega)$. We willen het volgende eigenwaardeprobleem oplossen:

$$\Delta f = \lambda f$$

onder de voorwaarde dat f voldoet aan de Dirichlet-conditie $f|_{\partial\Omega} = 0$. In dit geval zijn alle eigenwaarden discreet en reëel. Bovendien

Pas gepromoveerden brengen hun werk onder de aandacht. Heeft u tips voor deze rubriek of bent u zelf pas gepromoveerd? Laat het weten aan onze redacteur.

Redacteur: Nicolaos Starreveld
FNWI, Universiteit van Amsterdam
Postbus 94214
1090 GE Amsterdam
verdediging@nieuwarchief.nl

geldt er ook dat $0 < \lambda_1(\Omega) \leq \lambda_2(\Omega) \leq \cdots \leq \lambda_n(\Omega) \leq \cdots \to \infty$. Voor sommige keuzes van Ω kunnen de eigenwaarden en de eigenvectoren exact worden bepaald, maar in het algemeen is het een heel moeilijk probleem. Dit voorbeeld illustreert een direct resultaat, want de vorm van Ω zegt hier iets over het spectrum van de Laplaciaan. In de spectrale meetkunde is men vooral geïnteresseerd in de omgekeerde kwestie, namelijk: wat kunnen we zeggen over de meetkunde als we informatie ter beschikking hebben over het spectrum? Een voorbeeld hiervan is de asymptotische formule van Weyl, die een verband legt tussen het spectrum van de Laplaciaan en het volume van het gebied $\Omega \subseteq R^n$.

Can you hear the shape of a drum?

Een bekende vraag met betrekking tot dit probleem is de volgende: “Stel dat twee Riemannse variëteiten hetzelfde spectrum hebben, zijn ze dan isometrisch?” Deze vraag werd vooral bekend door Marc Kac met zijn artikel ‘Can you hear the shape of a drum?’. Snel nadat Kac zijn artikel publiceerde, vond wiskundige John Milnor twee 16-dimenionale tori die hetzelfde spectrum hebben, maar die niet isometrisch zijn. In twee dimensies duurde het nog tot 1992 totdat wiskundigen Carolyn Gordon, David Webb en Scott Wolpert twee verschillende gebieden construeerden die wel isospectraal zijn.

Het spectrum alleen kan dus helaas niet alle geheimen van de meetkunde onthullen. Desalniettemin, zoals gezien met Weyls formule, kan het spectrum van de Laplaciaan toch informatie geven over de vorm van de ruimte. De vraag is: hoe sterk is dit verband tussen de vorm en het spectrum? Tot nu toe hadden we een operator, de Laplaciaan (of een operator van het Laplace-type), en een vectorruimte van gladde functies waar we de operator op loslieten. Om de meetkunde volledig te kunnen beschrijven zijn deze twee ingrediënten niet voldoende. Wat mist er dan?

Wiskundige Alain Connes vond het derde ingrediënt. De informatie die mist van het tweetal (Δ, *ruimte van gladde functies*) is hoe deze functies zich verhouden tot de werking van Δ. Deze extra informatie wordt volgens de stelling van Gelfand–Naimark gegeven door werking van de *algebra* van de ruimte van gladde functies op dezelfde vectorruimte waar ook de Laplaciaan op werkt. Deze drie ingrediënten, de algebra, de operator en de Hilbertruimte, vormen een zogenaamd spectraal drietal.

Alain Connes

Laten we een poging wagen om te begrijpen hoe een spectraal drietal zich verhoudt tot de meetkunde van Riemannse variëteiten. Dankzij de reconstructiestelling van Connes is het voldoende om een wat eenvoudiger object te begrijpen, namelijk een spectraal drietal van het Dirac-type. Deze stelling zegt namelijk dat elk commutatief spectraal drietal correspondeert met een spectraal drietal van het Dirac-type. Een spectraal drietal van het Dirac-type, geassocieerd met een oriënteerbare Riemannse variëteit M, bevat de algebra $C^\infty(M)$ en een differentiaaloperator D van het Dirac-type. Deze operator is gedefinieerd op de variëteit M, voor de preciezen onder ons op een Hermitische vectorbundel E over M, als de formele wortel van een operator van Laplace-type, dus $D^2 = \Delta$. De keuze om met D te werken, en niet met Δ, zorgt ervoor dat de formules iets netter worden en de connectie met de natuurkunde iets duidelijker wordt.

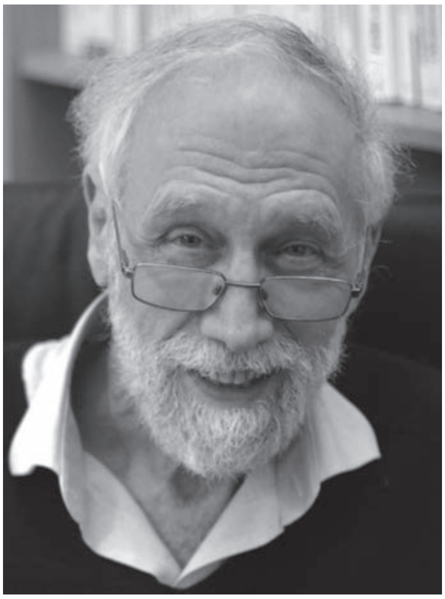
De derde component van het drietal betreft de Hilbertruimte $L^2(E;M)$, die een gemeenschappelijke speelruimte vormt voor $C^\infty(M)$ en de operator D. In 1995 vroeg Connes of het zo is dat, onder milde voorwaarden op een algemeen spectraal drietal (A,D,H), er altijd een unieke gladde compacte variëteit M bestaat zodat (A,D,H), van het Dirac-type is geassocieerd met M. In 2008 gaf hij een bewijs hiervoor. Er is dus een een-op-eenverband tussen commutatieve spectrale drietallen en compacte Riemannse variëteiten. Kennis over het spectrale drietal is voldoende om alles te weten over de meetkunde van de corresponderende variëteit.

Incomplete informatie

De problemen en de resultaten die hierboven worden geschetst, veronderstellen kennis over het hele spectrum van de Laplaciaan. In de praktijk is het niet mogelijk om zulke complete kennis te hebben, want informatie over het spectrum halen we uit waarnemingen, numerieke experimenten of simulaties met de computer.

Hermann Weyl

Marc Kac



Alain Connes

Daardoor is het belangrijk om te onderzoeken wat er gezegd kan worden over de vorm van de ruimte aan de hand van een klein deel van het spectrum.

In zijn proefschrift heeft Abel een methode ontwikkeld om vormen te beschrijven aan de hand van een gedeeltelijk spectrum. De methode die Abel heeft ontwikkeld is gebaseerd op zogenaamde 'truncaties van spectrale drietallen van het Dirac-type'. Deze truncaties zijn op een natuurlijke manier gedefinieerd door middel van de spectrale projecties $P_\Lambda = 1_{[-\Lambda,\Lambda]}(D)$ op de eigenruimtes die corresponderen aan de eigenwaarden van de Dirac-operator D die begrensd zijn door Λ. In zijn proefschrift heeft Abel laten zien dat het mogelijk is om uit deze truncaties metrische ruimtes af te leiden die de bijbehorende variëteit steeds beter benaderen naarmate $\Lambda \to \infty$.

Samen met Lisa Glaser heeft Abel het PointForge-algoritme ontwikkeld, dat van een eindig stukje van de spectrale meetkunde tóch een bijna-isometrische benadering van een meetkundig object kan maken. Het algoritme werkt in drie stappen. Ten eerste construeert het een aantal sterk gelokaliseerde warmtegolven (als elementen van de Hilbertruimte), die als punten dienstdoen. Dit is mogelijk vanwege het (gedeeltelijke) spectrum dat we ter beschikking hebben.

Kers op de taart

Vervolgens laat het vanuit deze punten lokaal warmte stromen. Op een gegeven moment zullen deze hittegolven elkaar tegenkomen. Hoelang het duurt totdat ze elkaar tegenkomen zegt iets over de afstanden tussen de gekozen punten: dit is de Connes-metriek. Zo maakt het algoritme in de tweede stap een tabel met alle afstanden tussen de punten. Als laatste en als kers op de taart wordt er ook een grafenvisualisatiealgoritme, ontwikkeld door Abel en Lisa, toegepast om het resultaat isometrisch aanschouwelijk te maken.

De motivatie voor de ontwikkeling van eindige benaderingen in de spectrale meetkunde komt uit de kwantumzwaartekracht. In sommige theorieën van kwantumzwaartekracht, zoals in Causal Dynamical Triangulations, observeren wetenschappers reeksen 'benaderde' meetkundige objecten die ze graag met elkaar zouden willen vergelijken. De gewone invarianten uit de spectrale meetkunde zijn daar een interessant instrument voor. Daarom is het nuttig om te onderzoeken hoe 'benaderde' spectra gebruikt kunnen worden om invarianten van 'complete' spectra uit te rekenen. Daarnaast is er al een spectrale versie van het Standaardmodel, namelijk het Connes–Lott–Chamseddine–Barrett-model. Als we dat beter willen begrijpen en in het bijzonder willen begrijpen welke rol zwaartekracht daarin speelt, moeten we zien hoe de meetkundige informatie uit dat model samenwerkt met de natuurlijke energieschaal Λ van dat model.

Schatten-klassen op Hilbert-modules

In de spectrale meetkunde worden correspondenties tussen vormen (zoals veranderingen langs een tijdslijn) beschreven in termen van operatoren op Hilbert-modules over abelse C*-algebra's. Zulke operatoren lijken op de meer bekende operatoren op Hilbertruimtes. Ze zijn echter een stuk algemener en dat levert een paar moeilijkheden op. In de spectrale meetkunde is het *spoor* een fundamentele invariant. Voor de door Abel bestudeerde operatoren bestond er nog niet zoiets als een spoor, laat staan een theorie van de daaraan gerelateerde Schatten-klassen. Het proefschrift van Abel introduceert dan ook een systematische theorie van sporen en Schatten-klassen in de context van zulke Hilbert-modules.

Het persoonlijke aspect

De wiskunde is mensenwerk, een proefschrift behelst alle ideeën en ontdekkingen die hebben geleid tot het verkrijgen van de graad van doctor. Maar het proefschrift was maar de eindbestemming, de tocht was veel rijker, vol met mooie herinneringen en ervaringen.

Een vraag aan de promovendus: Abel, wat herinner je je uit de afgelopen vier jaar?

"Ik heb mijn proefschrift geschreven in de eerste levensjaren van mijn kinderen, Jesse en Nina. Hoe het voor hén was dat ik met mijn promotie bezig was in die tijd kan ik nog niet zeggen, maar voor mij was het een bijzondere combinatie. Dat je midden in de nacht met een slapeloos kind op je arm nog éven een pen pakt om iets op te schrijven, en als het thuis eindelijk weer stil is, zelf wakker ligt omdat je het bewijs van de stelling net te pakken hebt. Het geeft het huiselijk leven een wiskundige onderstroom en het wiskundige leven een huiselijke context.

Ik heb tweeënhalf jaar intensief samengewerkt met Lisa Glaser, een postdoctoraal onderzoeker uit de theoretische natuurkunde. Ik heb ontzettend veel plezier gehad aan het samenwerken met Lisa. Theoretisch promotieonderzoek, zeker in een klein vakgebied, kan heel eenzaam zijn en het was heel fijn om een paar keer per week samen een kop thee te kunnen zetten en alle ideeën door te spreken, samen met de laptops in de code te duiken, vanuit huis over Skype het hele conceptartikel samen met de rode pen door te nemen, veganistische taart te eten bij het seminarium, en literatuurtips uit te wisselen over science fiction, Discworld, en natuurlijk kwantumzwaartekracht.

Omdat ik met mijn gezin in Den Haag woon maar promoveerde in Nijmegen, werkte ik al die jaren vele treinreizen lang in de stiltecoupé. Vooral aan het stuk tussen Utrecht en Nijmegen, niet zo druk bereisd, heb ik goede herinneringen; voor zover er goeie ideeën in het eerste deel zitten, zijn ze daar ontstaan, in het mistige ochtendlicht of in de vroege schemering van de terugreis. Het tweede deel, en het boek zelf, schreef ik in een paar maanden tijdens de eerste lockdown, halve dagen thuis aan een tafeltje in de slaapkamer, stuiterende kinderen op de achtergrond, en ik ben blij verrast over hoe goed dat heeft uitgepakt. Misschien gaf het me wel een soort rust dat nu iederéén in zijn hoofd en in zijn kamertje zat opgesloten, en dat er gewoon geen tijd meer over was op de dag voor te hoge verwachtingen aan het onderzoek of twijfel aan het proefschrift: het was wat het was, en het was goed genoeg."