

Raf Bocklandt

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Universiteit van Amsterdam
r.r.j.bocklandt@uva.nl

Evenement Studiegroep Wiskunde met de Industrie 2020

Over druppels en dubbels

De Studiegroep Wiskunde met de Industrie (SWI) is een jaarlijkse bijeenkomst die de brug legt tussen de wiskundige wereld en het bedrijfsleven. Een week lang werken ongeveer vijftig tot tachtig wiskundigen, zowel van universiteiten en hogescholen als uit de privésector, samen aan een selectie problemen die worden aangedragen door bedrijven en non-profitorganisaties.

De SWI maakt deel uit van een internationaal netwerk van gelijksoortige studiegroepen, die geïnspireerd zijn op een initiatief van de universiteit van Oxford. Al in 1968 organiseerde deze universiteit een dergelijke meeting en over de jaren heen evolueerde dit tot een beproefd model dat werkt met een uitgekiend tijdschema gespreid over vijf dagen [1].

Op voorhand worden zes problemen gekozen uit inzendingen van bedrijven. Na de selectie stellen de bedrijven een beschrijving op van één of twee pagina's lang en vaardigen ze iemand af die de vraag zal presenteren op de eerste dag van de bijeenkomst. Na de presentaties gaan de deelnemers in kleinere groepen op zoek naar oplossingen.

Een cruciaal aspect van de studiegroep is de interactie tussen de wiskundigen en de contactpersonen van de bedrijven. Tijdens de week wordt de vraag van het bedrijf pas echt duidelijk en daarvoor is deze interactie nodig. Op die manier kunnen de wiskundigen beter begrijpen wel-



ke aspecten van het probleem ertoe doen en gefocust blijven op de zaken die voor het bedrijf van belang zijn. Hoe beter de chemie tussen wiskundigen en de bedrijfsdeelnemers, hoe beter de resultaten.

Aan het einde van de week presenteren de wiskundigen voor elk vraagstuk hun bevindingen en gieten dat in een wetenschappelijke proceedings, die in het Engels wordt opgesteld. Daarnaast wordt er ook een populaire proceedings opgesteld met Nederlandse samenvattingen voor elk van de problemen.

In Nederland worden de studiegroepen sinds 1998 bijna jaarlijks georganiseerd. Ze worden gesponsord door de Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onder-

zoek (NWO) en vinden telkens op een andere locatie plaats. De organisatie wordt gecoördineerd door het 'Nationaal Comité SWI' dat valt onder de Commissie Innovatie van Platform Wiskunde Nederland (PWN). Dit comité bestaat uit Alessandro di Bucchianico (TU/e) en Vivi Rottschäfer (UL). Zij zorgen voor de financieringsaanvraag bij de NWO, ondersteuning bij de lokale organisatie, en staan in voor de bijbehorende website www.swi-wiskunde.nl.

Om een idee te geven van hoe het er in de studiegroep aan toegaat en met welke creatieve oplossingen de wiskundigen op de proppen komen, publiceren we hierna twee stukken uit de populaire proceedings van de SWI 2020. Deze vond plaats van 27–31 januari 2020 in Tilburg en werd georganiseerd door de opleiding Toegepaste Wiskunde van Fontys Hogescholen. De stukken zijn van de hand van Anouck Vrouwe, freelance wetenschapsjournalist en tekstschrijver (www.anouckvrouwe.nl), en zijn terug te vinden op eerdergenoemde website van SWI. ☞

Referentie

- 1 A. Araujo et al., *Handbook for Running a Sustainable European Study Group with Industry*, Mathematics for Industry Network (MI-NET), 2017, <https://mi-network.org>.



Een wedstrijdje druppelblazen

Vocht in je dure chipmachine is niet wat je wilt. VDL ETG vraagt de wiskundigen van de Studiegroep Wiskunde met de Industrie om de snelste manier om hangende druppels weg te blazen.

“En néé, jullie mogen geen andere oplossingen verzinnen. Geen hete lucht om de druppel te verdampen, geen doekjes, geen microgolven, enzovoort. Over al die mogelijkheden hebben wij al nagedacht. We willen alleen maar van jullie weten hoe we de druppels het beste weg kunnen blazen.” Dmitri Shestakov van VDL ETG probeert er streng bij te kijken, tijdens zijn presentatie aan het begin van de studiegroep. Hij weet hoe wetenschappers zijn, is er zelf een geweest — dwarsdenkers, altijd op zoek naar net even anders. Hij weet ook dat de studiegroep slechts één week duurt. Geen tijd te verspillen dus. Hij komt hier voor antwoord op zijn vraag: hoe blaas je een hangende druppel het snelst van een plaat? Hij weet dat die vraag niet simpel te beantwoorden is, anders was hij hier niet geweest. Dus hij wil snel tot de kern komen.

Wim Munters is docent wiskunde aan de Technische Universiteit Eindhoven. Van de Studiegroep Wiskunde met de Indus-

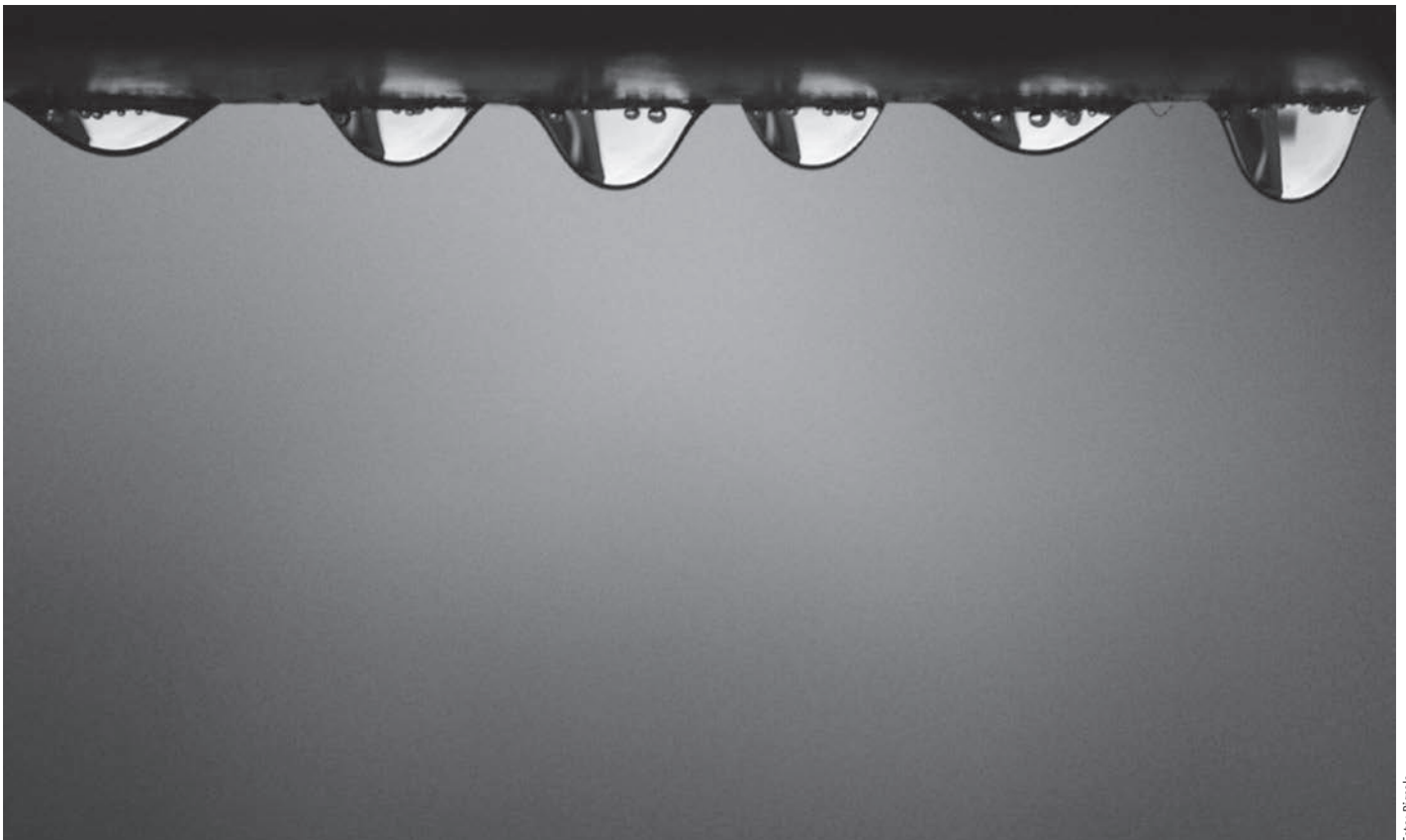
trie had hij nog nooit gehoord, tot collega Mark Peletier hem vroeg eens mee te kijken naar een van de ingebrachte bedrijfsvragen. Die van VDL ETG om precies te zijn, over het wegblazen van hinderlijke druppels. Voor hij het wist, zat Munters een week in Tilburg. “Een leerrijke ervaring. Intens ook,” lacht hij, “maar ook enorm interessant om met mensen met zoveel verschillende achtergronden samen te werken.” Hij vond de grote senioriteitsverschillen een interessant gegeven: “De jongeren kijken fris tegen de vraag aan, de ouderen brengen hun ervaring in. Een mooie mix.” Munters is van origine werktuigbouwkundige, en wandelde van daaruit de numerieke wiskunde binnen. Een fijne achtergrond voor de vraag van VDL ETG.

VDL ETG is gespecialiseerd in het ontwikkelen en produceren van precisieapparatuur en onderdelen daarvan. Voor chipmachinefabrikant ASML maakt het bedrijf waferhandlers. De wafer is de siliciumschijf waar de chips uit worden gemaakt. De wa-

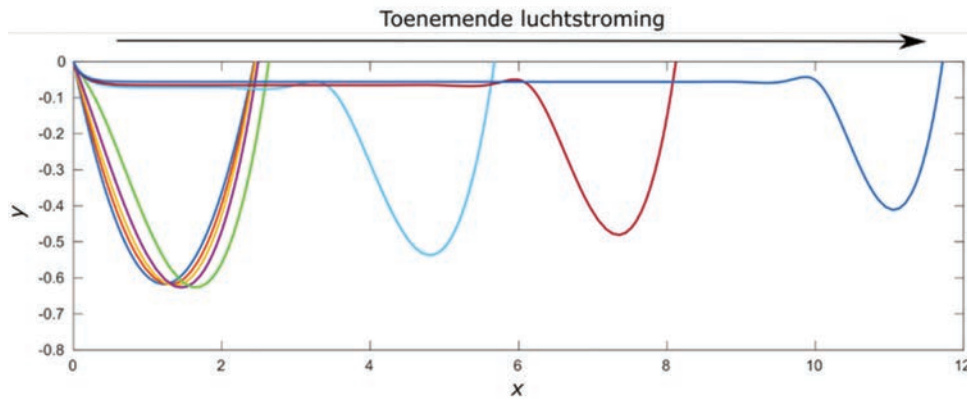
ferhandler is de module die de wafers van en naar de machine van ASML verplaatst. ASML bouwt onder meer immersie-chipmachines, waarbij water wordt gebruikt om de werking van de lens te verbeteren. Daar komt het vocht vandaan dat soms achterblijft onder de wafer. Er vormt zich dan een hangende druppel. Niet groot, hooguit een millimeter of twee, maar vocht in de machine is domweg onacceptabel. “Die druppel moet weg, zo simpel is het”, benadrukt Dmitri Shestakov.

De druppels weghalen is echter zo eenvoudig niet. VDL ETG gebruikt nu lucht om ze weg te blazen. “We willen die druppel zo snel mogelijk wegblazen, maar niet zo hard dat hij instabiel wordt en uiteenspat”, vertelt Shestakov. Wanneer dat gebeurt, ontstaan er tientallen kleinere druppels die nog moeilijk weg te krijgen zijn.

VDL ETG is naar de studiegroep gekomen voor inzicht in de snelste manier om de druppels weg te krijgen. Moet je steeds een beetje harder blazen, of gepulst



Hangende druppels (niet in de machine)



Simulatie van de vervorming van de druppel bij verschillende lichtsnelheden

misschien? Het gedrag van de druppel is complex, laat Shestakov met een filmpje zien. Zo oscilleert de druppel als hij wordt weggeblazen. Is dat gedrag van de druppel te modelleren? “Voor VDL ETG was deze week een eerste exploratieve verkenning”, vertelt Munters. De wiskundigen hadden dan ook weinig data om mee te werken, alleen het filmpje dat Shestakov had meegebracht. “In de wetenschap is er de heilige drie-eenheid theorie–simulaties–experimenten”, zegt Munters. “Je kan een model niet echt uitwerken, wanneer je over weinig experimentele data beschikt.” Voor de groep was het daarom helder wat er in de week moest gaan gebeuren: het vergelijken van geschikte modellen, zodat zij VDL ETG konden adviseren met welk model écht aan de slag te gaan.

De groep dook in de druppelliteratuur, om voeling te krijgen met het vakgebied en een gevoel voor ordegroottes te ontwikkelen. “Alleen dat was al prettig, ik heb nu een lange lijst relevante literatuur”, zegt Shestakov. “Onze ambitie was niet om een eigen model te bouwen”, aldus Munters. “We hebben vier in onze ogen geschikte modellen gekozen, van simpel tot complex, die zo goed mogelijk uitgevoerd en toen vergeleken.”

Het simpelste model, om mee te beginnen, was een krachtenbalans. Zo is er de kracht van de luchtstroom en de adhesie, die de druppel bij elkaar houdt. “Een heel eenvoudig model, met weinig aannamen”, benadrukt Munters. Het model liet zien dat de druppel al snel een maximumsnelheid bereikt. Blaas je dan nog harder, dan zorgt dat er enkel nog voor dat de druppel verder uitspreidt – niet dat hij harder gaat. Ook liet het model zien dat de vervorming van de druppel duidelijk van belang is voor de behaalde snelheid.

Na deze eerste stap haalden de wiskundigen het werkpaard van de stromingsleer van stal: de Navier–Stokes-vergelijkingen. “Die hebben we op meerdere manieren toegepast, allemaal eerst maar eens in 2D”, vertelt Munters. Navier–Stokes-vergelijkingen kunnen in rekentijd nogal uit de hand lopen. In de eerste toepassing namen de wiskundigen daarom aan dat de druppel slechts invloed had op het profiel van een deel van de luchtlaag, en niet op de hele luchtlaag. Dat maakte het probleem beter behapbaar. Er werd gekeken hoe de druppel vervormde, naar kleine trillingen in de druppel. Ook werd gekeken of deze methode naar 3D uitgebreid kon worden.

Daarna zetten de wiskundigen meerdere numerieke rekenpakketten in, ook nu weer met de aanname dat de luchtstroom zich niet teveel liet verstoren door de druppel. “We kregen de data die daar uitkwamen niet meteen sluitend, maar we zagen wel dat de modellen dezelfde fenomenen lieten zien”, aldus Munters. Zo had steeds harder blazen ook volgens deze modellen geen zin. De rekentijd bleef met een uur ook binnen de perken, een belangrijke voorwaarde. Na het gepuzzel in 2D wilde de groep zich ook nog voorzichtig wagen aan de driedimensionale versie van het probleem, ook nu weer met een numeriek Navier–Stokes-model. Om de rekentijd te beperken – de studiegroep duurt immers slechts een week – werd wederom opnieuw gekozen om alleen de stroming in de druppel zelf te modelleren.

“Hier zagen we dat de druppel ook in een constante luchtstroom kan gaan trillen”, aldus Munters. De groep had weinig tijd om diep in deze simulaties te duiken, maar kon wel concluderen dat ook 3D-berekeningen voor dit probleem haalbaar zijn voor VDL ETG. Een conclusie waar Shestakov door verrast is: “Ik dacht dat

dat niet te doen was, dus het is fijn te horen dat het mogelijk toch kan.” Op de exacte getallen moet je ons zeker niet vastpinnen, zegt Munters, maar alle vier de modellen gaven kwalitatief wel soortgelijke uitkomsten. De eerder genoemde conclusie dat harder blazen vanaf een bepaald punt geen zin meer heeft. Het trillen van de druppel, wat belangrijk is omdat de druppel daardoor immers uiteen kan spatten. “Ook lijkt er een soort natuurlijke trilling te zijn rond de 25 hertz”, vertelt Munters. “Als je de druppelsnelheid wilt verhogen, valt daar misschien wat te rapen.”

De groep raadde VDL ETG aan om een goede meetopstelling te bouwen, om data binnen te halen om de modellen mee te voeden. “Dat is ook hoe ik het aan zou pakken”, vertelt Shestakov na afloop. “Met je modellen een strategie uitzetten, en die toetsen.” Ook concludeerden de wiskundigen dat er met de lichtere modellen zeker al blaasstrategieën berekend kunnen worden, waarmee winst te verwachten valt. Voor goed inzicht is het echter aan te bevelen om vervolgens voor die gebieden de zwaardere driedimensionale berekeningen te gaan doen.

Shestakov kijkt tevreden terug op een succesvolle week. “Ik wist vooraf niet precies wat te verwachten, maar ik ben echt van mijn sokken geblazen. Met samenwerking kun je dus enorm veel bereiken in korte tijd. De groep heeft me geen magisch recept gegeven, maar dat had ik ook niet verwacht. Wat ze wel heeft gedaan, is me inzicht gegeven, en richting”, zei Shestakov na afloop van de week in zijn dankwoord. Hij pleit voor een uitbreiding van de studiegroep, als brug tussen onderzoek en bedrijfsleven: “Ik zou willen dat ik het hele jaar door zo’n team aan het werk kon zetten als ik met een vraag zat.” *Anouck Vrouwe*

Winnen zonder te verliezen

Een nieuw ratingsysteem voor het dubbelspel waarin elke wedstrijd telt, ook als spelers duidelijk in niveau verschillen. Dat is wat Helga Wiersma van de tennisbond KNLTB van de wiskundigen van de Studiegroep Wiskunde met de Industrie vraagt.

We zien soms gekke dingen bij de rating van spelers die dubbelen, vertelt Helga Wiersma van de tennisbond KNLTB de wiskundigen bij de start van de studiegroep. “Zoals minpunten bij een gewone wedstrijd.” Dan wint een duo een tenniswedstrijd, en gaat de rating van één van de spelers toch achteruit. Het is een onbedoeld bijeffect van het ratingsysteem voor dubbels van de KNLTB, waarbij het resultaat van de wedstrijd afhangt van de speelsterkte van de tegenstander. “We lossen dat nu op door de wedstrijd niet mee te laten tellen, maar dat is voor spelers natuurlijk ook niet leuk. Dan levert winst niets op voor je rating”, vertelt Wiersma, Manager Wedstrijdtennis bij de KNLTB.

Voor tennissers op niveau gaat tennissen niet alleen om een lekker potje ballen, maar ook om het verbeteren van hun speelsterkte — die weer bepaalt welke tegenstanders ze krijgen. Spelers hebben een individuele rating voor zowel het enkelspel als het dubbelspel. In het huidige ratingsysteem kent de KNLTB bij dubbelwedstrijden geen score toe wanneer het niveauverschil tussen de spelers groot is, wat geregeld zo is. “We willen graag toe naar een ratingsysteem waarbij elke gewonnen wedstrijd loont”, benadrukt Wiersma.

Het huidige ratingsysteem DDS (dynamisch speelsterkte systeem) is ontworpen voor het enkelspel, en daarna uitgebreid naar de dubbels. Het ratingsysteem is een stroomschema, waar twee uitkomsten mogelijk zijn: de wedstrijd telt mee, of geeft geen resultaat. De rating is het gemiddelde over de wedstrijden van een jaar, waarbij ook de rating van afgelopen jaar wordt meegenomen wanneer de speler minder dan zes wedstrijden speelt. “Voor iemand die veel speelt, hebben de wedstrijden aan het eind van het seizoen weinig invloed meer op hun rating, omdat we over zoveel wedstrijden middelen”, legt Wiersma uit.

De KNLTB heeft zelf al gekeken naar andere ratingsystemen. Zo was er bijvoorbeeld de rating van de Amerikaanse tennisbond, waarbij zelfs de setstanden ertoe doen. “Dat willen wij niet, omdat je rating dan achteruit kan gaan als je wél gewonnen hebt, maar met een klein verschil in setstanden”, vertelt Wiersma. “We vonden nog geen systeem dat helemaal aan onze wensen voldeed.” Wiersma heeft daarom het wensenlijstje van de KNLTB opgesteld en dat aan de wiskundigen voorgelegd.

“Ik tennis niet, maar ratings heb ik altijd interessant gevonden”, zo motiveert

deelnemer Len Spek zijn keuze voor het tennisvraagstuk. Het was Speks eerste studiegroep, hij had er van andere promovendi goede verhalen over gehoord. De wiskundige werkt bij de Universiteit Twente aan een promotieonderzoek naar het simuleren van netwerken van hersencellen. In 2021 is de Studiegroep Wiskunde met de Industrie aan zijn universiteit. Het leek ook zijn begeleider daarom een goed idee dat Spek dit jaar mee zou doen. “Ik was onder de indruk hoeveel progressie je in een paar dagen maakt wanneer je als groep gefocust aan één probleem werkt”, vertelt de wiskundige naderhand. Dat is ook wat Wiersma na afloop zegt: “Mooi vond ik dat iedereen bereid was mee te gaan in de denkrichting van een ander. Daarbij stelden de wiskundigen elkaar steeds vragen, hoe pakt dit dan uit, wat doen we dan daarmee? Vragend oplossend, zo zou ik het proces omschrijven.”

Vooraf had Spek verwacht dat er tal van ratingsystemen voor dubbels in de literatuur te vinden zouden zijn, maar dat viel tegen. “We vonden wat informatie over ratings bij online computerspellen, die ook in teams worden gespeeld. Die ratings voldeden niet aan onze eisen.” Dus ontkwamen de wiskundigen er niet aan om toch zelf wat te bedenken. Daarvoor begonnen ze bij een oud, veelgebruikt en gerespecteerd ratingsysteem: de Elo-rating, ontwikkeld door natuurkundige en schaker Árpád Élő in de jaren zestig. Het systeem is de standaard bij schaken en dammen. Dit systeem rekent voor elke wedstrijd een winstverwachting uit, gebaseerd op het krachtverschil tussen de spelers. Wint de sterkere speler, dan is dat in lijn met de verwachting: de rating van de winnaar stijgt dan slechts een beetje. Wint de zwakere speler echter tegen de verwachting in, dan heeft dat een groter effect. Spek: “Het mooie is dat je rating altijd stijgt als je wint, en daalt als je verliest, al is het soms maar een beetje.”

Het Elo-systeem is later verfijnd door statisticus Mark Glickman. Hij nam in zijn Glicko-rating de onzekerheid over de speelsterkte van een speler mee. De speelsterkte van een echte wedstrijdvreter is immers met meer zekerheid bekend dan



Damesdubbel

die van iemand die maar af en toe een wedstrijd speelt, of die een tijdje gestopt is en weer begint. “Als iemand met een onzekere rating speelt tegen iemand met een zekere rating, heeft die wedstrijd meer invloed op de rating van de onzekere speler dan op die van de welbekende speler”, legt Spek het mooie van het Glicko-systeem uit. Het meenemen van onzekerheid is iets wat de KNLTB graag wil. In dit systeem is het niet erg als de bond de speelsterkte van een herintredende speler verkeerd inschat: de Glicko-rating trekt dat snel weer recht, zonder grote schade voor de tegenstanders.

Het was de wiskundigen snel duidelijk dat zowel het Elo- als het Glicko-systeem geschikt zijn voor de KNLTB. Nu moest de stap van enkel- naar dubbelspel worden gemaakt, want beide systemen zijn ontworpen voor één tegen één. “We hebben flink gediscussieerd over hoe dat moest”, vertelt Spek. Moest je uitgaan van twee teams met een bepaalde sterkte die tegen elkaar spelen — als ware het een enkelspel tussen teams? Of was het beter om de wedstrijden te beschouwen als vier potjes van één iemand met drie anderen, waarvan er twee tegenwerken en een helpt? Spek: “Uiteindelijk zijn we toch maar gewoon uitgegaan van twee teams tegen elkaar, ook omdat dat beter uit te leggen is.” Want ook uitlegbaarheid was een eis van de KNLTB, om gemopper van spelers te voorkomen.

Bij een dubbelspel wordt de persoonlijke rating van de spelers in één team gecombineerd tot één gezamenlijke rating. Na de wedstrijd wordt de nieuwe teamrating weer opgesplitst in twee individuele ratings. De aanpak werd als volgt: twee spelers vormen samen een team met één rating, gebaseerd op de gecombineerde rating van de beide spelers. Vervolgens wordt er met het Elo- of Glicko-systeem een winstverwachting bepaald voor de wedstrijd, als ware het gewoon een wedstrijd van één tegen één. “Na de wedstrijd rolt er een nieuwe rating voor de teams

uit, zowel voor de winnaars als voor de verliezers. Die splits je uit naar de spelers”, vervolgt Spek. Bij deze aanpak zijn er twee belangrijke vragen. Hoe combineer je de ratings van de spelers vooraf en hoe verwerk je het resultaat van de wedstrijd in de individuele ratings? Spek: “Als de spelers even sterk zijn, is het makkelijk. Hun gezamenlijke rating is gelijk aan hun individuele ratings, en ze stijgen of dalen na afloop evenveel. Maar bij verschil in sterkte, wat is dan eerlijk? Neem je het gemiddelde van de individuele ratings? Of is vooral de sterkere speler bepalend voor de uitslag, of juist de zwakkere?” Om daar inzicht in te krijgen, gebruikten de wiskundigen een dataset met uitslagen van de KNLTB. Spek: “Het gemiddelde van twee ratings blijkt een behoorlijk goede voorspeller van de uitslag, ook als het niveauverschil tussen twee spelers in één team groot is.” Hij geeft hierbij wel aan dat dit deels het gevolg kan zijn van het huidige ratingssysteem, dat beide spelers bij winst ongeveer gelijk beloont. “Dat zou je nog kunnen onderzoeken.”

De wiskundigen keken ook of bij gemengd dubbel de man of de vrouw meer bepalend is voor de uitslag, maar ook geslacht lijkt niet uit te maken. De wiskundigen raden de KNLTB dan ook aan om voor de rating van een team gewoon de individuele ratings te middelen. Zij gaven de tennisbond ook de formules om de nieuwe gezamenlijke rating weer netjes te splitsen naar de spelers. “Het mooie was dat we hier een exacte oplossing voor konden geven”, vertelt Spek. Voor de fijnproevers: die formule is afgeleid uit een minimalisatie van het verlies van informatie over de wedstrijd.

De wiskundigen presenteerden uiteindelijk twee systemen: een dubbelspelversie van het Elo-systeem en het complexere Glicko-systeem. “In het Glicko-systeem is de formule voor het splitsen van het resultaat niet zo eenvoudig uit te leggen aan de spelers”, zegt Spek. “Glicko heeft zeker onze voorkeur, omdat je er onzekerheid in speel-

sterkte in meeneemt”, zegt Wiersma na afloop. “Het principe van het systeem krijgen we wel uitgelegd zonder die formules.”

Het is niet zo dat het ratingsysteem klaar is voor implementatie. Spek: “De bond moet nog wel keuzes maken.” Zo groeit de onzekerheid van een rating van een niet-spelende tennisser met de tijd, maar hoe snel dat gaat is een parameter die de bond kan kiezen. “Kies je een snelle groei van de onzekerheidsfactor, dan zullen ratings sterker fluctueren.” Spek legt uit dat je daar misschien niet voor alle type spelers dezelfde keuze wil maken. “Zo spelen professionele tennissers maar weinig KNLTB-wedstrijden, terwijl hun niveau vrij constant is. Daar wil je dat de onzekerheid langzaam oploopt. Bij jeugdspelers kan je meer onzekerheid inbouwen, omdat jeugd zich snel ontwikkelt”, zegt Spek. Hij adviseert om hier keuzes te maken op basis van speeldata. Wiersma benadrukt dat de veranderingen in de rating moet kloppen met het gevoel: “Spelers willen een rating die meebeweegt met de wedstrijden, maar niet alle kanten opschiet.”

De KNLTB verwacht de resultaten te implementeren, maar niet van vandaag op morgen. Wiersma wil graag meer data-analyse doen voordat er beslist wordt hoe je twee ratings tot één combineert: “Het kan zijn dat de sterkere speler toch iets meer invloed heeft. Daar zou ik graag nog eens goed naar kijken voordat we besluiten of we de ratings middelen, of toch een iets andere verhouding gebruiken.” Wiersma verwacht dat ook de rating van de singles verandert. “Het lijkt me wat gek om met twee systemen naast elkaar te werken.” Wiersma overlegt met de studiegroep wat er nog moet gebeuren voor de implementatie kan beginnen. Het uitwerken van de details wordt misschien een afstudeerproject. “Ik heb bewondering voor wat de groep in een week heeft bereikt”, zegt Wiersma. “Het was een project waarvan we al een tijdje wisten dat we er wat mee wilden. Door deze week heeft het vleugels gekregen.”

Anouck Vrouwe