Robbert Fokkink
Delft Institute of Applied Mathematics
TU Delft
r.j.fokkink@tudelft.nl

De oplossing

Het square peg-probleem

In de nieuwsrubriek van het septembernummer schreven wij dat Joshua Greene en Andrew Lobb het Toeplitz-vermoeden hadden bewezen. Verschillende lezers wezen ons erop dat Greene en Lobb niet dit vermoeden hadden opgelost, maar een generalisatie ervan, voor differentieerbare krommen. Reden voor een enigszins uit de hand gelopen rectificatie. Wat is het Toeplitz-vermoeden precies, wat hebben Greene en Lobb bewezen en hoe kwamen zij tot hun resultaat?

In de zomer van 1911 hield Otto Toeplitz een voordracht op de jaarlijkse bijeenkomst van het Zwitserse wiskundig genootschap, met de titel ‘Über einige Aufgaben der Analysis Situs’. In de Verhandlungen [20, p. 197] staat een beknopt verslag:

Figuur 1 Otto Toeplitz promoveerde in Wrocław en werkte vervolgens in Göttingen, Kiel, Bonn en Jeruzalem. Hij is met name bekend vanwege zijn werk in operatorentheorie.

> “Der Vortragende erzählt von zwei Aufgaben der Analysis Situs, zu denen er gelangt ist, und dann von der folgenden dritten, deren Lösung ihm nur für konvexe Kurven gelungen ist: Auf jeder einfach geschlossenen stetigen Kurve in der Ebene gibt es vier Punkte, welche ein Quadrat bilden.
>
> Diskussion: Die Herren Fueter, Speiser, Laemmel, Stäckel, Grossmann.”

Deze ‘opgave’ van Toeplitz staat tegenwoordig bekend als het Square Peg-probleem: bevat elke Jordankromme een ingeschreven vierkant? Het is nog steeds niet opgelost, al is er wel de nodige voortgang geboekt. Greene en Lobb hebben laten zien dat elke *gladde* Jordankromme niet alleen een ingeschreven vierkant bevat, maar ook rechthoeken van willekeurige vorm. Hun bewijs berust op het feit dat er geen symplectische inbedding bestaat van de Kleinse fles in de vierdimensionale ruimte. Een diep resultaat dat illustreert hoe lastig de opgave van Toeplitz is. Er is in de afgelopen eeuw dan ook hard gewerkt aan het Square Peg-probleem, met name in het Amerikaanse Midden Westen.

Urbana-Champaign

De eerste voortgang wordt geboekt door Arnold Emch, een Zwitser uit Solothurn, precies de plaats waar Toeplitz zijn probleem wereldkundig maakte. Je zou denken dat Emch daarbij in de zaal zou hebben gezeten, maar dat was niet het geval. Hij was een paar maanden eerder uit Solothurn vertrokken om hoogleraar wiskunde te worden aan de universiteit van Illinois, in Urbana-Champaign. Een collega daar, Aubrey Kempner, vertelde hem over het probleem. In 1913 bewees

Figuur 2 Het embleem van de universiteit van Illinois. Een symbool van noeste arbeid.

Emch dat elke gladde convexe Jordankromme een ingeschreven vierkant bevat. In 1916 slaagde hij erin om dit resultaat te generaliseren tot stuksgewijs analytische krommen met een eindig aantal singulariteiten [2,3]. Dat lijkt al heel dicht bij de oplossing van het Square Peg-probleem, maar toch staat het probleem dus nog steeds open.

In september 1959 arriveert Richard Jerrard in Urbana. Nog datzelfde jaar schrijft hij een artikel met een oplossing van het Square Peg-probleem voor analytische Jordankrommen [10]. Referenties naar Toeplitz of Emch, die een paar maanden eerder is overleden, ontbreken. Als motivatie voor zijn artikel verwijst Jerrard enkel naar werk over omschreven kubussen in de euclidische ruimte. Kennelijk is de uitgestrekte vlakte van het Midden Westen al reden genoeg om na te gaan denken over het Square Peg-probleem. Of misschien gaven collega's het elkaar door in de koffiekamer. In 1978 gaat Herbert Vaughan met pensioen en in zijn afscheidslezing bewijst hij het volgende.

Stelling. *Elke Jordankromme K bevat een ingeschreven rechthoek.*

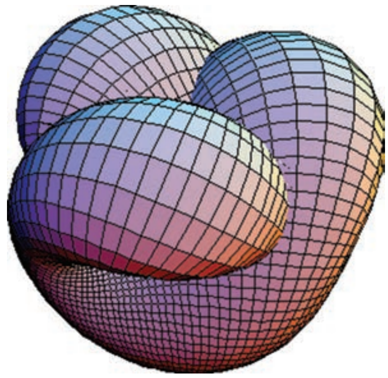
Bewijs. Laat $T = \{(x,y): x,y \in K\}$ en definieer $f: T \to \mathbb{R}^3$ door

$$f(x,y) = \left(\frac{x+y}{2}, |x-y|\right).$$

De eerste twee coördinaten van $f(x,y)$ vormen het midden van het segment xy en de derde coördinaat is de lengte van dit segment. Er geldt $f(x,y) = f(y,x)$, dus induceert f een afbeelding van de quotiëntruimte $M = \{\{x,y\}: x,y \in K\}$. Dit is een Möbiusband. Een ingeschreven rechthoek $xx'yy'$ in K correspondeert met twee diagonalen xy en $x'y'$ van gelijke lengte met een gemeenschappelijk midden. Met andere woorden, een ingeschreven rechthoek correspondeert met een dubbel punt van f. We moeten dus bewijzen dat f niet injectief kan zijn. Als f injectief is, dan is $f(M)$ een Möbiusband die ligt in de halfruimte $z \geq 0$ en die $z = 0$ snijdt in K. Door $f(M)$ af te sluiten met het inwendige van K in $z = 0$ zouden we dan een inbedding krijgen van het projectieve vlak in $\mathbb{R}^3$ en dat is onmogelijk. □

Een juweeltje, dat verloren was gegaan als Mark Meyerson niet in het publiek had gezeten. Hij was op dat moment postdoc in Urbana en tekende het op in een bijzonder mooi artikel [16], dat gaat over de tafelstelling die we hieronder nog tegen komen. De stelling van Vaughan geeft weliswaar geen oplossing van het Square Peg-probleem, maar plaatst het wel in een breder kader. De aspect ratio van een rechthoek is de verhouding tussen de lange en de korte zijde. Een vierkant heeft bijvoorbeeld aspect ratio 1. Een Jordankromme bevat dus altijd een rechthoek. Geldt er misschien meer?

Figuur 3 Mark Meyerson was na zijn promotie een paar jaar postdoc in Urbana en bewaarde Vaughans bewijs voor het nageslacht



Figuur 4 Het oppervlak van Boy, een immersie van de projectieve ruimte in $\mathbb{R}^3$. De figuur heeft veel zelf-doorsnijdingen, wat er op wijst dat vlakke krommen veel ingeschreven rechthoeken bevatten.

Vermoeden. *Elke Jordankromme bevat ingeschreven rechthoeken van willekeurige aspect ratio.*

Dit heet het Rectangular Peg-probleem. Het is voor het eerst aan de orde gesteld door Brian Griffiths [6] en door Victor Klee en Stan Wagon [11]. In 2014 loofde Benjamin Matschke honderd euro uit voor een oplossing van dit vermoeden voor C^∞-krommen, in een fraai overzichtsartikel in de *Notices* van de AMS [14]. Deze bonus hebben Greene en Lobb nu dus verdiend.

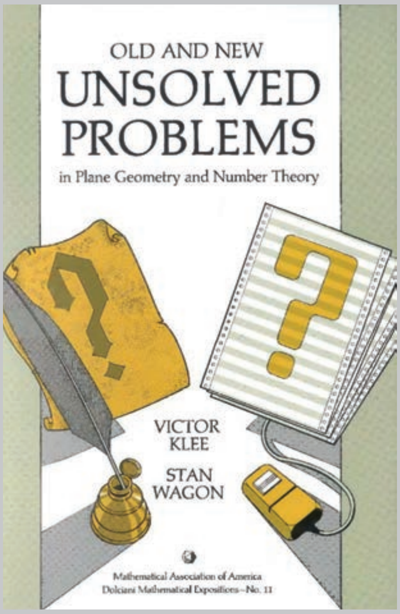
Rest van de wereld

Er werd in Urbana hard gewerkt aan het Square Peg-probleem, maar de rest van de wereld zat ook niet stil. In 1929 bewijst Lev Schnirelmann dat elke gladde Jordankromme een ingeschreven vierkant bevat. Zijn artikel wordt vijftien jaar later opgenomen in een aflevering van *Uspekhi Matematicheskikh Nauk* (Russian Mathematical Surveys) met meesterwerken over beschouwende meetkunde [21]. Wat Schnirelmann ertoe bracht om na te denken over dit probleem is onduidelijk. Hij formuleert de stelling en bewijst die dan in zeven lemma's. Meer dan twintig jaar later reproduceert Heinrich Guggenheimer het resultaat van Schnirelmann met als motivatie: "... this theorem is of great intrinsic interest and the topological method invented for its proof seems capable of a wide range of other applications ...". Schnirelmanns resultaat wordt in 1989 versterkt door Walter Stromquist [23], die erin slaagt de gladheidseis nog verder te verzwakken, naar wat hij 'lokaal monotone krommen' noemt. Dit zijn, informeel gezegd, krommen zonder cusps. Een hele lichte restrictie. Het is nu, meer dan dertig jaar later, nog steeds het resul-

Herbert Vaughan en New Math

Herb Vaughan was vanaf 1937 tot en met zijn pensioen in 1978 verbonden aan de universiteit van Illinois. Hij was intensief betrokken bij New Math, de hervorming van het Amerikaanse wiskundeonderwijs in het midden van de vorige eeuw. Max Beberman, de drijvende kracht achter New Math, was hoogleraar didactiek in Urbana. Samen met Vaughan schreef hij de tekstboekenserie *High School Mathematics*. New Math was te ambitieus en stuitte op enorme weerstand. Als Beberman sterft aan een hartaanval in 1971 rapporteert de *New York Times* dat leerlingen dankzij hem 3 en 19 optellen tot 112. New Math werd weggeschoven en vergeten. *Time Magazine* nam het uiteindelijk op in de lijst '100 worst ideas of the century'.

Unsolved Problems
In 1991 verschijnt *Unsolved Problems* van Victor Klee en Stan Wagon. Het is een verzameling van 24 problemen die iedereen kan begrijpen, maar niemand op kan lossen. De Riemann-hypothese zit erbij, de laatste stelling van Fermat (nog niet opgelost in 1991), het $3n+1$-probleem. Elk probleem is beschreven vanuit een historisch perspectief, voorzien van verwante problemen en resultaten, nieuwe open vragen, oefenopgaven. Het Square Peg-probleem is nummer 11.



taat dat het dichtst bij de oplossing van het Square Peg-probleem komt.

In feite volgt Stromquist de aanpak van Emch, maar door superieure techniek reikt hij verder. Hij opent zijn artikel met een generalisatie van een lemma van Emch.

Lemma. *Laat $v \in K$ een punt op een gladde Jordankromme zijn. Dan bevat K een ingeschreven ruit met v als hoekpunt.*

Bewijsschets. Parametriseer de kromme $\omega:[0,1]\to K$ met begin- en eindpunt $\omega(0)=\omega(1)=v$. Als $x=\omega(s)$ en $y=\omega(t)$ voor $s<t$ dan zeggen we dat xy booglengte $t-s$ heeft. Laat Q_v de verzameling van alle ingeschreven vierhoeken zijn met hoekpunt v. De som van de booglengtes van een ingeschreven vierhoek is gelijk aan 1, dus is Q_v te beschrijven met het 3-simplex

$$\Delta_3=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\colon x_i\geq 0,\sum x_i=1\},$$

waarbij de coördinaten staan voor de booglengtes en de eerste zijde begint bij v. De rand $\partial\Delta_3$ correspondeert met gedegeneerde vierhoeken met een zijde van booglengte nul, driehoeken dus. Het meest gedegenereerd zijn de eenhoeken, met een zijde van booglengte 1, die corresponderen met de extreme punten van Δ_3:

$$v_1=(1,0,0,0),\quad v_2=(0,1,0,0),$$
$$v_3=(0,0,1,0),\quad v_4=(0,0,0,1).$$

In het bijzonder heeft v_i zijde i met volle booglengte. Definieer $Q_i\subset Q_v$ als de gesloten verzameling van vierhoeken waarvan de i-de zijde de langste is (gemeten in de metriek op K, niet via booglengte). Dan is $Q_v=Q_1\cup Q_2\cup Q_3\cup Q_4$. Meer algemeen is het opspansel van $\{v_i\colon i\in I\}$ bevat in de vereniging $\bigcup_{i\in I}Q_i$. Nu impliceert Sperners Lemma dat $\bigcap Q_i$ niet leeg is (deze toepassing van Sperners Lemma staat bekend als het KKM-lemma, zie [18, Lemma 2.4.4]). Met andere woorden, er bestaat een ingeschreven vierhoek waarvan alle zijden even lang zijn: een ruit met hoekpunt v. $\square$

De pijn in deze bewijsschets zit in gedegenereerde ruiten, waarvan alle hoekpunten gelijk zijn aan v. Om het bewijs rond te krijgen, moet worden uitgesloten dat $\bigcap Q_i=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$. Hier is de gladheid van K voor nodig. Als $i\neq j$ dan is $v_i\in Q_j$ een geisoleerd punt en is het KKM-lemma ook van toepassing op de remainder.

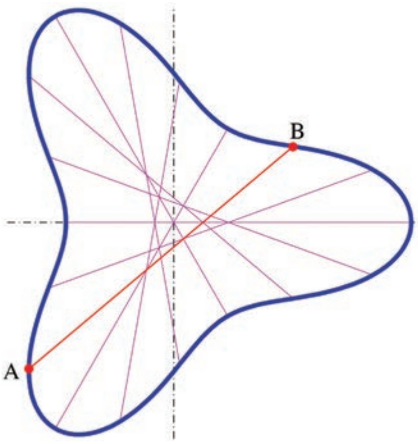
In zijn artikel introduceert Stromquist een sterkere, homologische vorm van het KKM-lemma. Stromquist definieert de graad van R_v (ingeschreven ruiten met hoekpunt v) in de homologiegroep $H_2(\partial\Delta_3,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ en laat zien dat deze gelijk is aan 1. Deze graad is additief. Als $R_v=A\cup B$ de vereniging is van twee disjuncte gesloten verzamelingen, dan hebben A en B een graad die optelt tot 1.

Een ruit $abcd$ is dun als $|ac|\geq|bd|$ en dik als $|ac|\leq|bd|$. In het bijzonder is $R_v=R_v^{\text{dun}}\cup R_v^{\text{dik}}$ de vereniging van dikke en dunne ruiten. De doorsnede $R_v^{\text{dun}}\cap R_v^{\text{dik}}$ is de verzameling van ingeschreven vierkanten met hoekpunt v. Als deze niet leeg is, zijn we klaar. Als de doorsnede wel leeg is, dan blijkt het mogelijk om een verwisseling uit te voeren van dik en dun via een homotopie, waaronder de graad constant blijft. Dit zou impliceren dat R_v^{dun} en R_v^{dik} dezelfde graad hebben en dat is niet zo. Dus moet een gladde kromme een ingeschreven vierkant bevatten.

Figuur 5 Walter Stromquist hoorde over het Square Peg-probleem van zijn calculus leraar en latere schoonvader Lee Sonneborn, hoogleraar wiskunde in Michigan State University.

Tenslotte maakt Stromquist de stap naar lokaal monotone krommen via een limietargument en passeert daarmee Schnirelmann. Het is bijna de oplossing van het Square Peg-probleem, maar net niet. Een Tantaluskwelling. Op de vraag of hij hard heeft geprobeerd om het kloppend te maken voor willekeurige Jordankrommen schrijft Stromquist: "Absolutely! And I'm not about to give up."

Convexe krommen
In 1911 meldde Toeplitz dat hij het Square Peg-probleem alleen had kunnen oplossen voor convexe krommen. In 1913 gaf Emch een bewijs voor gladde convexe krommen en het continue geval werd afgehandeld door Konrad Zindler [26] in 1921. Zie Figuur 6. Sinds 1970 is er een kortere weg, via de tafelstelling van Roger Fenn [4].



Figuur 6 Een koorde die K verdeelt in twee stukken van gelijke lengte heet een bisector. Een Zindlerkromme heeft de eigenschap dat alle bisectoren even lang zijn. Deze krommen zijn voor het eerst bestudeerd in [26]. Verstopt in dat artikel staat Satz 35, dat elke convexe Jordankromme een ingeschreven vierkant bevat.

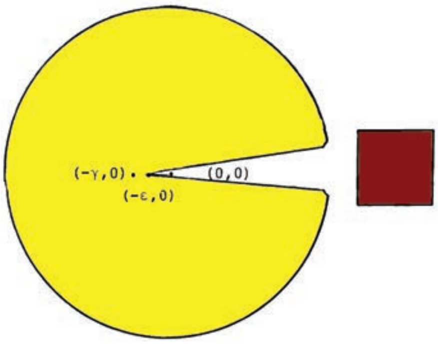
Stelling. *Zij $D \subset \mathbb{R}^2$ een compacte convexe schijf en $f : \mathbb{R}^2 \to [0,\infty)$ continu zodat $\{f > 0\} \subset D$. Voor elke $d > 0$ is er een vierkant V met zijden van lengte d en centrum in D waarvoor f dezelfde waarden aanneemt op de hoekpunten van V.*

Het goede nieuws voor picknickers op een berg in Zwitserland is dat zij een vierkante tafel altijd ergens horizontaal kunnen opstellen.

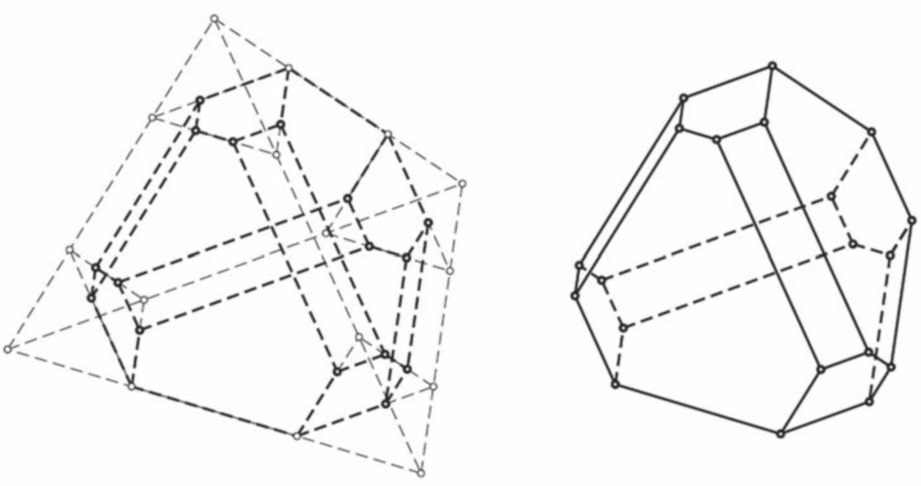
De tafelstelling impliceert dat elke continue convexe K een ingeschreven vierkant bevat, als volgt. Leg de oorsprong binnen K. Voor elk punt x dat wordt omschreven door K is er een unieke $t > 1$ met $tx \in K$. Neem $t = \infty$ voor de oorsprong. Definieer $f(x) = 1 - \frac{1}{t}$ binnen K en nul erbuiten. De niveaukrommen van f zijn gelijkvormig met K en elk vierkant tafeltje, hoe klein ook, kan op een niveaukromme worden geplaatst. Dus heeft K een ingeschreven vierkant.

Veelhoeken in krommen

Het vierkant is niet noodzakelijk de eerste geometrische figuur die opkomt. Wat valt er te zeggen over driehoeken of, meer algemeen, regelmatige veelhoeken in Jordankrommen? Het is eenvoudig om Jordankrommen te vinden zonder regelmatige n-hoeken voor $n > 4$. Ellipsen snijden cirkels in hoogstens vier punten. Het is minder eenvoudig om te bewijzen dat elke Jordankromme een gelijkzijdige driehoek bevat. Dit blijkt echter niet zo'n bijzondere eigenschap te zijn. De meest algemene vorm van een kromme is het beeld van $[0,1]$ onder een continue afbeelding: een Peano-continuum. De volgende stelling is bewezen door Arthur Milgram [17].



Figuur 7 Mount Pacman overgenomen uit [16]. Deze berg heeft contourlijnen die cirkelvormig zijn met een inkeping tot $(-\epsilon,0)$, net voorbij de oorsprong, voor $0 < \epsilon < \gamma$. De top van de berg ligt in $(-\gamma,0)$. De tafel kan alleen horizontaal worden opgesteld met het midden boven de oorsprong. Als vier picknickers er omheen gaan zitten, valt er een in het ravijn. Dit voorbeeld van Meyerson laat zien dat de tafelstelling niet geldt als D niet convex is.



Figuur 8 Het cyclohedron, overgenomen uit [25]. Dit is een opblazing/afknotting van een simplex. De pijnpunten in het Polygonal Pegs-probleem zitten in de gedegenereerde veelhoeken, zoals we ook al zagen in Stromquists lemma. Het cyclohedron knipt die pijnpunten er als het ware uit. Vresica en Zivaljevic gebruiken equivariante homologie van het cycolhedron om te laten zien dat een gladde Jordankromme een ingeschreven vierkant bevat.

Stelling. *Laat X een Peano-continuum zijn, zonder ingeschreven gelijkzijdige driehoeken. Dan is X homeomorf met het interval.*

Dit resultaat van Milgram gaat terug op werk van Karl Menger over gelijkzijdige veelhoeken in krommen [15]. Menger en zijn promovendus Abraham Wald probeerden differentiaalmeetkunde te veralgemeniseren tot metrische ruimten. De stelling van Milgram gaat terug op de metrische definitie van een geodeet. Overigens kon Wald na zijn promotie maar moeilijk een baan vinden en zo kwam hij terecht in de statistiek. In een In Memoriam voor Wald in de *Annals of Statistics* schrijft Menger: "I believe that anyone who understands his work on curvature of surfaces will find that this work is second to none of Wald's other achievements." Een boude bewering. Abraham Wald is een van de grondleggers van de moderne statistiek.

Er zijn dus Jordankrommen zonder regelmatige n-hoeken voor $n > 4$, maar wat gebeurt er als we de n-hoeken een beetje scheef neer kunnen zetten? Een n-hoek V heet affien-regulier als er een affiene transformatie is die V afbeeldt op een reguliere n-hoek. In 1972 formuleerde Branko Grünbaum het volgende vermoeden.

Vermoeden. *Elke gladde Jordankromme bevat een ingeschreven affien-reguliere zeshoek.*

Van zulk soort vermoedens zijn er meer. Siniša Vrećica en Rade Živaljević noemen dit Polygonal Pegs-problemen. Gegeven een klasse van veelhoeken, bevat elke gesloten kromme in $\mathbb{R}^d$ dan een kopie uit deze klasse? In [25] ontwikkelen zij een methode, die hen in staat stelt om niet alleen het resultaat van Stromquist te reproduceren, maar ook andere gevallen zoals Grünbaums Hexagonal Peg-probleem op te lossen.

Herbenoeming van het Toeplitz-vermoeden

Het vermoeden van Toeplitz is al meer dan honderd jaar oud, maar het heet pas sinds kort het Square Pegs-probleem. In 2008

De stelling van Rolle volgens Paul Lévy

Volgens Rolle heeft een gladde functie op het eenheidsinterval met $f(0) = f(1)$ ergens een horizontale raaklijn. Met andere woorden, je kunt een tafelblad balanceren op de grafiek van f. Maar als de tafel twee poten heeft, kun je hem dan ook horizontaal plaatsen op de grafiek? In 1934 bewijst Paul Lévy [12] dat er voor elk natuurlijk getal n een x is zodat $f(x) = f(x + \frac{1}{n})$. Alleen de breuken $\frac{1}{n}$ hebben die eigenschap, voor andere getallen in $(0,1)$ geldt het niet. Dit resultaat is gegeneraliseerd door Heinz Hopf voor compacte samenhangende deelverzamelingen van het vlak. Zijn artikel is opgenomen in *Russian Mathematical Surveys* en staat direct na het artikel van Schnirelmann.

Figuur 9 Igor Pak is hoogleraar wiskunde aan UCLA. Hij werkt aan combinatoriek en kansrekening. Hij bedacht de naam Square Peg-probleem en gaf twee elementaire bewijzen voor polygonale K. Cole Hugelmeyer was undergraduate in UCLA en zat bij hem in de collegebank.

was Igor Pak bezig met zijn boek over discrete meetkunde en liep hij tegen het Toeplitz-vermoeden op. Hij zocht de geschiedenis ervan uit en gaf twee nieuwe, elementaire bewijzen in het speciale geval van stuksgewijs lineaire Jordankrommen [19]. Zijn eerste bewijs is gebaseerd op de aanpak van Richard Jerrard. Zijn tweede op de methode van Schnirelmann. Pak gaf het Toeplitz-vermoeden ook een nieuwe naam. Hij schrijft daarover:

> "My preprint [19] was never meant to be a publication. I was in the middle of writing my book *Lectures on Discrete and Polyhedral Geometry* and felt this subject deserves more exposure. At that point the problem was known but the state of knowledge was a bit confusing due to the fact that a number of prominent proofs turned out to be false. So I modified Schnirelmann's original (incorrect) argument to make a correct proof in the case of piecewise-linear curves.
>
> I chose the most fun name I could find. I especially didn't like the historically accurate 'Toeplitz's inscribed square problem' since 'Toeplitz's' is so heavy on the tongue. The name 'square peg problem' I came up with may have been mine, but it's really a modification on the title of Griffiths's much older paper on the subject, which is itself a near verbatim word play on the idiomatic expression 'square peg in a round hole'. At least that's how I arrived at the title of my paper. For some reason they became popular (both the name and the article) and the name stuck."

De benaming slaat aan en zo krijgt het Toeplitz-vermoeden een klassiek klinkende naam. Een paar jaar later al openen Vrećica en Živaljević hun artikel met de woorden: "The classical square peg problem ... asks whether every Jordan curve in the plane has four points forming a square." Daarna schrijft Maschke het fraaie overzichtsartikel 'Survey of the square peg problem'. Als Terry Tao zich er vervolgens ook over buigt [24], kent de hele wereld het.

Het resultaat van Greene en Lobb

Vanwege deze toegenomen belangstelling verschijnen er veel nieuwe publicaties over het probleem. Sinds de voordracht van Toeplitz in Solothurn is de topologie niet stil blijven staan. Er kan geput worden uit een rijk instrumentarium. De doorbraak [8] komt van Cole Hugelmeyer, een promovendus in Princeton die werkt aan knopentheorie. Hij verlegt Vaughans afbeelding naar de vierde dimensie.

Stelling. *Elke gladde Jordankromme bevat een ingeschreven rechthoek van aspect ratio* $\sqrt{3}$.

Bewijsschets. Plaats de kromme K in het complexe vlak. De afbeelding

$$f_n(z,w) = \left(\frac{z+w}{2}, (z-w)^{2n}\right)$$

induceert een quotiënt-afbeelding op de Möbiusband $M = \{\{z,w\}; z,w \in K\}$. Dubbelpunten van deze afbeelding corresponderen met ingeschreven rechthoeken, waarvan de diagonalen een hoek maken die een veelvoud is van $\frac{\pi}{n}$. Als zulke ingeschreven rechthoeken ontbreken, dan hebben we een inbedding, waarbij de rand van M terecht komt op de kromme $K \times \{0\}$. Verwijder $U = \mathbb{C} \times D$ voor een schijf $0 \in D$. De rand ∂U is een (open) volle torus. De doorsnede van M en ∂U wikkelt zich één keer in de lengte en $2n$ keer in de breedte rond de torus. Als de afbeelding geen dubbelpunten zou bevatten, dan is het mogelijk om een Mobiusband te plakken in deze kromme, in het complement van U. Maar dat is onmogelijk volgens een resultaat van Joshua Batson [1]. In het bijzonder heeft K geen ingeschreven vierkant vanwege $n = 2$ en geen ingeschreven rechthoek van aspect ratio $\sqrt{3}$ vanwege $n = 3$. □

Het is opmerkelijk hoe eenvoudig de oplossing van het Square Peg-probleem nu is geworden, al is daar natuurlijk wel het een en ander bij nodig. Gladde Jordankrommen hebben dus rechthoeken van aspect ratio's 1 en $\sqrt{3}$ en dan zou je zeggen dat de ratio's daartussen ook wel zijn ingeschreven. Dat is niet precies wat Hugelmeyer vervolgens bewijst in een tweede, veel diepgravender artikel [9]. Hij gebruikt een kansrekening argument om te laten zien dat de ratio's van ingeschreven rechthoeken minstens een derde moeten zijn van het totaal. Een jaar later bewijzen Joshua Greene en Andrew Lobb [5] dat alle ratio's zijn ingeschreven.

Figuur 10 Cole Hugelmeyer, promovendus in Princeton. Over zijn werk aan het Square Peg-probleem schrijft hij: "I think I first got interested in the inscribed square problem after reading Terence Tao's blog post on the subject. I thought about the problem and its variants on and off for years until eventually I had the idea to create a 4-dimensional generalization of Vaughan's proof, which turned out quite well. I consider myself a knot theorist primarily, so I think this gave me a bit of a unique perspective on the problem."

Stelling. *Elke gladde Jordankromme bevat een ingeschreven rechthoek van willekeurige aspect ratio.*

Bewijsschets. Plaats de kromme in het complexe vlak. Beschouw de twee afbeeldingen

$$f(z,w) = (z+w, (z-w)^2)$$

en

$$g(z,w) = (z+w, \rho^2(z-w)^2)$$

voor een complexe ρ op de eenheidscirkel. Beide afbeeldingen geven inbeddingen van de Mobiusband $M = \{\{z,w\}: z,w \in K\}$ die samenvallen op de rand. Als K geen ingeschreven rechthoeken bevat met diagonalen met hoek ρ, dan is de vereniging van $f(M)$ en $g(M)$ een inbedding van de Kleinse fles in $\mathbb{C}^2$. Deze inbedding is zelfs symplectisch te maken (oppervlakte-behoudend).

Het Knaster-vermoeden

Een topologische verhandeling is alleen compleet met een Pool. In ons geval is dat Bronisław Knaster, de eerste K in het KKM-lemma. Waar Toeplitz werd geboren, vond Knaster zijn rustplaats: Wrocław. De Jordankrommen hadden zich in de tussentijd bewogen over de kaart van Europa en daarom telt Toeplitz als Duitser en Knaster als Pool. In 1947 formuleert Knaster een vraag in het dan gloednieuwe tijdschrift *Colloquium Mathematicum*.

Probleem. *Est-il-vrai qu'étant donnés un ensemble de k points* $p_1, p_2, \dots, p_k$ *sur* S_n *et une fonction continue* $f(p)$ *où p parcourt* S_n *telle que* $f(S_n) \subset E_{n-k+2}$ où $k = 2, 3, \dots, n+1$, *il existe sur* S_n *un ensemble de points* $q_1, q_2, \dots, q_k$ *isométrique à* $p_1, p_2, \dots, p_k$ *et qui ont la même image dans* E_{n-k+2}*? Et combien y a-t-il des tels ensembles?*

In een inleiding legt Knaster uit dat hij op dit probleem kwam via een vraag van Steinhaus, of je een driepoot altijd ergens horizontaal kunt opstellen op aarde. Je zou het een planetair tafelprobleem kunnen noemen. Knasters vermoeden is onjuist, al is het wel waar voor speciale n en k. Als $k = 2$ volgt het bijvoorbeeld uit de stelling van Borsuk en Ulam [7]. In 1989 gaf Vladimir Makeev [13] niet alleen een tegenvoorbeeld, maar bepaalde hij ook de nodige condities waaronder het vermoeden waar is.

Bronisław Knaster studeerde medicijnen in Parijs en was op familiebezoek in Warschau toen de eerste wereldoorlog uitbrak. Hij moest zijn studie onderbreken en kwam in de wiskunde terecht.

Dit is in tegenspraak met de stelling van Shevchishin [22], die zegt dat zo'n symplectische inbedding van de Kleinse fles niet bestaat. □

Hetzelfde idee als dat van Hugelmeyer, opnieuw in combinatie met zwaar geschut. Het bewijs in [5] is kort, maar technisch geavanceerd en berust op een diep en lang artikel [22]. Overigens is het limietargument van Stromquist van toepassing en geldt het resultaat ook voor lokaal monotone krommen.

Topologische brokstukken

Topologie zit vol verrassende voorbeelden en een vergissing (wiskundig of bestuurlijk) is snel gemaakt. Voor het Square Peg-probleem is dit niet anders, zoals valt te lezen in de artikelen van Benjamin Matschke en Igor Pak [14, 19] en in het boek van Klee en Wagon [11]. Het meest bekend is een foutief bewijs uit 1950. Probleem 4325 uit de *American Mathematical Monthly* van 1949 luidde: "Show that on every simple closed plane curve there are four points which are the vertices of a square." Een oplossing verscheen in het juninummer van 1950, gevolgd door ingezonden brieven in het februarinummer van 1951 waarin werd gewezen op lacunes in deze oplossing. Een van die brievenschrijvers was Andrew Gleason, de promotor van Walter Stromquist.

Naschrift

Graag wil ik Mark Meyerson, Igor Pak en Walter Stromquist bedanken voor hun hulp bij het schrijven van dit verhaal.

Referenties

1 J. Batson, Nonorientable four-ball genus can be arbitrarily large, *Mathematical Research Letters* 21(3) (2014), 423–436.
2 A. Emch, Some properties of closed convex curves in the plane, *American Journal of Mathematics* 35 (1913), 407–412.
3 A. Emch, On some properties of the medians of closed continuous curves formed by analytic arcs, *American Journal of Mathematics* 38 (1916), 6–18.
4 R. Fenn, The table theorem, *Bulletin London Mathematical Society* 2 (1970), 73–76.
5 J. E. Greene en A. Lobb, The rectangular peg problem (2020), arXiv:2005.09193v1.
6 H. B. Griffiths, The topology of square pegs in round holes, *Proceedings London Mathematical Society* 62(3) (1991), 647–672.
7 H. Hopf, Eine Verallgemeinerung bekannter Abbildungs- und Überdeckungssätze, *Portugaliae Mathematica* 4 (1944), 129–139.
8 C. Hugelmeyer, Every smooth Jordan curve has an inscribed rectangle with aspect ratio equal to $\sqrt{3}$ (2018), arXiv:1803.07417v1.
9 C. Hugelmeyer, Inscribed rectangles in a smooth Jordan curve attain at least one third of all aspect ratios (2019), arXiv: 1911.07336v1.
10 R. P. Jerrard, Inscribed squares in plane curves, *Transactions of the AMS* 98(2) (1961), 234–241.
11 V. Klee en S. Wagon, *Old and unsolved problems in plane geometry and number theory*, Mathematical Association of America, *Dolciani Mathematical Expositions* 11 (1991).
12 P. Levy, Sur une generalisation du theoreme de Rolle, *Comptes Rendus de l'Academie des sciences* 198 (1934), 424–425.
13 V. V. Makeev, The Knaster problem and almost spherical sections, *Mathematics of the USSR-Sbornik* 66(2) (1990), 431–438.
14 B. Matschke, A survey on the square peg problem, *Notices of the AMS* 61(4) (2014), 346–352.
15 K. Menger, The formative years of Abraham Wald and his work in geometry, *Annals of Mathematical Statistics*, 23(1) (1952), 14–20.
16 M. Meyerson, Balancing Acts, *Topology Proceedings* 6(1) (1981), 59–75.
17 A. N. Milgram, Some topologically invariant metric properties, *Proceedings National Academy of Sciences* 29 (1943), 193–196.
18 J. van Mill, *The infinite-dimensional topology of function spaces*, North-Holland, 2001.
19 I. Pak, The discrete square peg problem (2008), arXiv:0804.0657v1.
20 H. Sauerlander e.a., *Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft*, Band I, 1911. archive.org/download/verhandlungender1911schw
21 L. G. Schnirelman, On certain geometrical properties of closed curves, *Uspekhi Matematicheskikh Nauk* 10 (1944), 34–44.
22 V. V. Shevchishin, Lagrangian embeddings of the Klein bottle and the combinatorial properties of mapping class groups, *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Seriya Matematicheskaya* 73(4) (2009), 153–224.
23 W. Stromquist, Inscribed squares and square-like quadrilaterals in closed curves, *Mathematika* 36(2) (1989), 187–197.
24 T. Tao, An integration approach to the Toeplitz square peg problem, *Forum of Mathematics, Sigma* 5(e30) (2017).
25 S. Vrećica en R. T. Živaljević, Fulton-MacPherson compactification, cyclohedra, and the polygonal pegs problem, *Israel Journal of Mathematics* 184(1) (2011), 221–249.
26 K. Zindler, Über konvexe Gebilde II, *Monatshefte für Mathematik und Physik* 31 (1921), 25–56.