Teun Koetsier
Afdeling Wiskunde
Vrije Universiteit Amsterdam
t.koetsier@vu.nl

Boekbespreking Willem Kuijk, Complementarity in Mathematics

Kuijks ‘complementaristische’ filosofie van de wiskunde

In 1977 publiceerde Willem Kuijk *Complementarity in Mathematics – A First Introduction to the Foundations of Mathematics and its History*, gebaseerd op colleges die hij in Canada, in Antwerpen en in Amsterdam aan de VU had gegeven. Zoals bij al zijn publicaties hanteerde hij daarbij de achternaam Kuyk. Het boek bevat een inleiding in de logica en een beknopte goed geschreven geschiedenis van de filosofie van de wiskunde die uitloopt op een schets van Kuijks eigen visie op wat wiskunde is. Teun Koetsier bespreekt het boek.

Kuijks boek roept een tijdsbeeld op. In de eerste helft van de vorige eeuw werd de filosofie van de wiskunde gedomineerd door het debat over de grondslag van de wiskunde. Logicisme, formalisme en intuïtionisme waren de drie belangrijkste posities in het debat. De wiskunde werd gezien als een bouwwerk en de deelnemers aan de discussie poogden dat bouwwerk van een degelijke fundament te voorzien. Over de aard van dat fundament verschilden echter de meningen en daarbij kwam de intuïtionist Brouwer zelfs tot de conclusie dat op belangrijke punten het bouwwerk zelf ook moest worden gewijzigd.

Het ging in dat grondslagendebat niet om de vraag hoe wiskundigen tot hun resultaten komen, het ging niet om de ‘context of discovery’, maar om de ‘context of justification’, het eindresultaat van het wiskundig onderzoek, de stellingen met bewijs. (We danken het onderscheid aan Hans Reichenbach, die het in 1938 introduceerde. Zie [1].) Die nadruk op de fundering van wiskundige resultaten gaat terug op de Grieken. Dat is begrijpelijk, want wiskundige kennis lijkt niet gelegen in de heuristiek, maar in de resultaten. De resultaten leveren de zekerheid en daar kunnen we van vooruitgang spreken.

Men noemt de nadruk op de fundering wel ‘foundationalisme’. (Het liefst zou ik de term ‘fundamentalisme’ hanteren maar die is te beladen.) Het twintigste-eeuwse foundationalisme heeft tot vele fascinerende resultaten geleid en dat doet dat soort grondslagenonderzoek nog steeds. De vraag naar het wezen van de wiskunde is ermee echter niet beantwoord. Het risico dat foundationalisten lopen is dat ze één aspect van de wiskunde tot het enige essentiële uitroepen en dat leidt tot wonderlijke conclusies. Dat is heel duidelijk als je bijvoorbeeld bedenkt dat als wiskunde de wetenschap der formele systemen is in de zin van bijvoorbeeld Haskell Curry, we in ieder geval de absurde conclusie moeten trekken dat er voor de twintigste eeuw nooit echt wiskunde zou zijn bedreven [2]. Archimedes en Gauss zouden uitsluitend heuristisch bezig zijn geweest.

Het inzicht dat de filosofie van de wiskunde in ieder geval ook naar de praktijk van het wiskundig onderzoek moet kijken begon in de zestiger jaren van de vorige eeuw door te breken. De Hongaars Engelse filosoof Imre Lakatos speelde daarbij een sleutelrol. In 1963–1964 publiceerde hij in de *British Journal for the Philosophy of Science* een lang anti-foundationalistisch artikel getiteld ‘Proofs and Refutations’. Zijn focus lag niet op het fundament maar op de wijze waarop de wiskunde zich ontwikkelt. De wiskunde verandert voortdurend, niet alleen in de heuristische fase maar ook daarna en Lakatos had daarover specifieke ideeën.

In het voetspoor van Lakatos is veel gebeurd. Prominente wiskundigen als Saunders Mac Lane [3] en Donald Knuth [4] kwamen ook tot conclusie dat de traditionele filosofie van de wiskunde belangrijke aspecten van het vak mist. Voor de meer filosofische benadering zij de lezer verwezen naar bij voorbeeld David Corfields *Towards a Philosophy of Real Mathematics* uit 2004 of *Perspectives on Mathematical Practices Bringing Together Philosophy of Mathematics, Sociology of Mathematics, and Mathematics Education* uit 2007 geredigeerd door Bart Van Kerkhove en Jean Paul van Bendegem.

De ontwikkeling heeft in 2009 zelfs geleid tot het ontstaan van een Association for the Philosophy of Mathematical Practice, APMP [5]. Voor een recent overzicht zie Y. Hamami en R.L. Morris [6].

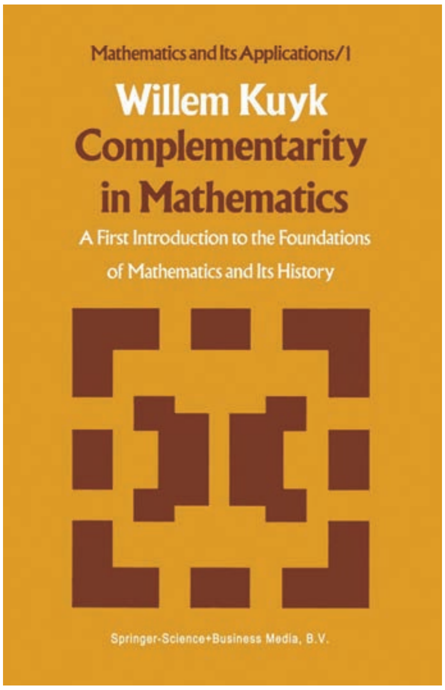
Het boek van Kuijk uit 1977 paste binnen deze trend. Kuijk beschrijft de wiskunde als een product van de menselijke geest met vele aspecten die elkaar complementair aanvullen. Hij noemt er zeven.

1. Het vermogen van de mens om begrippen te vormen en de ‘naïeve’ logica.
2. De taal als middel om informatie over te dragen.
3. De formele logica.
4. Het constructieve denken.
5. Intuïtie in de zin van het vermogen om dingen onmiddellijk in te zien.
6. De kwestie van primaire evident ware kennis versus afgeleide secundaire kennis.
7. De toepasbaarheid van de wiskunde.

Een bevredigende filosofie van de wiskunde moet aangeven hoe al die aspecten met elkaar samenhangen en dat op zo’n manier dat het unieke karakter van de wiskunde tot uitdrukking komt. In zijn boek doet Kuijk daartoe een interessante poging. Kernpunt is zijn stelling dat er in de wiskunde twee centrale soorten van bestaan zijn: het ‘meetkundige’ bestaan en het ‘discrete’ bestaan. Het gaat hier naar de mening van Kuijk om twee wezenlijk verschillende kwaliteiten van de wereld waarin we leven. De kwaliteit van ruimte en continuïteit leidt tot meetkundige en topologische noties en de kwaliteit van aantal en discreet leidt tot numerieke: en algebraïsche noties. In Kuijks woorden “Indeed, if we were to state what makes mathematics such a ‘sure’ and indubitable science, then we would have to point out that its indubitableness does not simply flow from the abstract, formal or axiomatic, method, but that even the abstractions are made possible by, and owe their existence to the relatively simple and clear (as compared to the concepts of the natural sciences) basic mathematical intuitions of continuity and discreteness.”

Het tellen van discrete eenheden enerzijds en de meetkundige karakterisering van de ruimte anderzijds lagen ten grondslag aan de vroegste wiskundige inzichten. Bij de Grieken domineerde de meetkunde, maar met de opkomst van de algebra, de analytische meetkunde en de analyse verschoof de nadruk naar het discrete, het manipuleren van karakters. Vanaf de negentiende eeuw werd het beeld weer complexer. Overal ziet Kuijk de twee wortels van de wiskunde zich manifesteren. Wiskunde is bij Kuijk evident in belangrijke mate een kwestie van mentaal construeren, maar hij is een liberale constructivist. Een constructivist die niet construeert binnen een precies gedefinieerd kader, maar slechts beperkt wordt door de eis dat datgene wat hij construeert te herleiden moet zijn tot meetkundige en/of numerieke noties. Vaak komen beide voor, maar in bijvoorbeeld de euclidische n-dimensionale topologie domineren vanuit het continue geconstrueerde noties en in bijvoorbeeld de algebraische getaltheorie of de numerieke analyse de vanuit het discrete geconstrueerde noties, volgens Kuijk.

Kuijk was duidelijk beïnvloed door de jonge Brouwer die in zijn dissertatie schreef: “Waar dus in die oer-intuïtie continu en discreet als onafscheidelijke complementen optreden, beide gelijkgerechtigd en even duidelijk.” Hij volgde echter Brouwer niet in diens latere ontwikkeling. Het klassieke continuüm beschouwt hij als gegeven in de intuïtie en als uitgangspunt van ons mentaal construeren. En dat vereist volgens Kuijk in het geheel niet dat de menselijke geest in staat zou moeten zijn om actueel oneindige verzamelingen te creëren.



Het is interessant dat Kuijk uit zijn complementaristische visie normatieve consequenties trekt voor de verzamelingenleer. Hij mag dan een liberale constructivist zijn, er zijn grenzen aan wat kan worden geconstrueerd. Kuijk formuleert een epistemologische eis: hij eist dat bij het accepteren van een verzameling de ‘vorm’ van de elementen van tevoren vastligt. De verzameling polynomen van een bepaalde vorm is acceptabel. De verzameling meetkundige figuren van een bepaalde vorm eveneens. De verzameling van alle continue functies op het interval $[0,1]$ mag daarentegen niet meedoen omdat er onvoldoende gemeenschappelijke vorm zou zijn. Kuijk beperkt ook om die reden de scope van het machtsverzamelingsaxioma tot aftelbare deelverzamelingen. Kuijk accepteert ook niet meer dan het aftelbare keuzeaxioma. Hij lijkt van mening te zijn dat alles wat daar boven uitgaat abstracte onzin is die het contact met het discrete en het continue kwijt is geraakt.

In het bijzonder de beperking tot het aftelbare machtverzamelingsaxioma roept vragen op. De reële getallen vormen bij Kuijk een verzameling. De irrationale getallen vormen daarvan een deelverzameling, maar het complement daarvan, de collectie irrationale getallen, is bij Kuijk geen verzameling!

Kuijk schrijft in dit verband over de eenheid van de wiskunde: “The answer is that mathematics is the exclusive science that studies the interplay and the connections between the mutually irreducible qualities of the discrete and the continuous, of number and spatiality. This interplay and these connections are not furnished by axiomatic decrees such as the axiom of the power set and the axiom of choice, but it is the mathematical disciplines themselves that by their methods and results establish these connections.”

Het is opmerkelijk dat terwijl Kuijk op het standpunt staat dat alle belangrijke aspecten van de wiskundige praktijk in de beschouwing meegenomen moeten worden en je zou zeggen dat dat ook de theorie van Cantor moet omvatten, er hier toch een normatieve foundationalistische aap uit de mouw komt.

In 1982 verscheen een Italiaanse vertaling van Kuijks boek. Umberto Batocci las het boek en merkte op dat hij erin tevergeefs had gezocht naar definities van de begrippen discreet en continu [7]. Dat is inderdaad een zwakte van het boek. Daarnaast blijft Kuijk nogal hangen in het abstracte. De lezer zou graag meer concrete voorbeelden willen zien van het samenspel tussen de kwaliteiten discreet en continu. (Ik denk in dit verband aan de wijze waarop Marcus Giaquinto in zijn boek *Visual Thinking in Mathematics* uit 2007 in hoofdstuk 12 met een aantal simpele voorbeelden het algebraïsch en het meetkundig redeneren analyseert.) Kuijk verwijst wel regelmatig naar de zeven aspecten van de wiskunde die in hun samenhang zouden moeten worden behandeld in een uitgewerkte complementaristische filosofie van de wiskunde, maar ook hier blijft de behandeling schetsmatig. Kuijk is er zich van bewust. Het boek is in feite een pleidooi voor een grondige studie van de geschiedenis van de wiskunde met Kuijks visie als uitgangspunt. Het zou zeker interessante case-studies kunnen opleveren.

Met dank aan K. P. Hart voor zijn commentaar op een eerdere versie.

Referenties

1 https://plato.stanford.edu/entries/reichenbach.
2 Haskell Curry, *Outline of a Formalist Philosophy of Mathematics*, 1950.
3 S. Mac Lane, *Mathematics, Form and Function*, New York, 1986.
4 D. E. Knuth, Algorithmic thinking and Mathematical thinking, *American Mathematical Monthly* 92 (1985), 170–181.
5 http://www.philmathpractice.org.
6 Y. Hamami en R. L. Morris, Philosophy of mathematical practice: a primer for mathematics educators, *ZDM Mathematics Education* 52 (2020), 1113–1126.
7 http://www.cartesio-episteme.net/ep8/ep8-zeno-app.html.