Frank den Hollander
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
denholla@math.leidenuniv.nl

Charlene Kalle
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
kallecccj@math.leidenuniv.nl

Evenement De Avond van de Abelprijs

De oorsprong van ergodentheorie

Ergodentheorie is geworteld in de statistische mechanica. Via de wiskunde heeft het zich verspreid over diverse wetenschapsgebieden. Frank den Hollander en Charlene Kalle geven in dit artikel een kort historisch overzicht naar aanleiding van de Abelprijs 2020.

Met het begrip 'dynamisch systeem' wordt ieder proces aangeduid dat zich ontwikkelt in de tijd, van pandemie tot planetenstelsel. Ergodentheorie is het vakgebied dat kansrekening inzet om een omschrijving te geven van het typische gedrag van een dynamisch systeem op de lange termijn. Deze aanpak heeft in de afgelopen 150 jaar tot veel successen geleid. In 2020 hebben Hillel Furstenberg en Gregory Margulis de Abelprijs ontvangen voor hun baanbrekend werk in en rond de ergodentheorie. Dit artikel is geschreven naar aanleiding van de KNAW-Webinar 'Evening devoted to the Abel Prize' over de levens en het werk van beide laureaten. We bespreken kort de opkomst van de ergodentheorie en geven, als opmaat voor de artikelen verderop in dit nummer van Benjamin Weiss en Shrikrishna Dani, een kleine toepassing van ergodentheorie in de getaltheorie.

De ergodenveronderstelling

Voor de oorsprong van ergodentheorie, en ook van het woord ergodentheorie, gaan we terug naar het werk van een van de belangrijkste natuurkundigen van de negentiende eeuw, de Oostenrijkse Ludwig Boltzmann (1844–1906). Boltzmann was een van de grondleggers van de statistische mechanica, die zich richt op de beschrijving van de dynamica van systemen met enorme aantallen deeltjes. Vanwege deze aantallen is het onmogelijk om een precieze omschrijving te geven van het chaotische gedrag van de deeltjes op *microscopisch* niveau. Dankzij Boltzmanns baanbrekende ideeën over het inzetten van de wetten van de kansrekening (zie onder andere [5, 6]), lukte het wel om uitspraken te doen over de *macroscopische* eigenschappen, zoals dichtheid, temperatuur en druk.

Het werk van Boltzmann wordt in het beroemde boek [9] van het echtpaar Paul Ehrenfest (1880–1933) en Tatjana Ehrenfest Afanassjewa (1876–1964) uiteengezet als een samenhangend geheel. Ehrenfest was een Oostenrijkse natuurkundige en student van Boltzmann. Ehrenfest-Afanassjewa was een Russische natuur- en wiskundige en studente van David Hilbert (1862–1943). In 1912, ook het jaar waarin [9] verscheen, verhuisden ze samen naar Nederland, waar Ehrenfest de opvolger werd van Hendrik Antoon Lorentz (1853–1928), als hoogleraar theoretische natuurkunde aan wat toen nog de Rijksuniversiteit Leiden heette. In 1919 werd hij benoemd als lid van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen.

Centraal in het werk van Boltzmann plaatsten de Ehrenfests de *ergodenveronderstelling*. Zoals omschreven in [9], stelt deze simpel gezegd dat een geïsoleerd systeem in evenwicht uiteindelijk alle mogelijke toestanden aanneemt waarvan de totale energie correspondeert met de veronderstelde totale energie van het systeem. De naam is ontleend aan de term ergode die door Boltzmann werd gebruikt in zijn baanbrekend artikel [7] uit 1884, maar de ergodenveronderstelling zelf staat nergens in het werk van Boltzmann zo expliciet opgeschreven als in [9].

Ondanks dat er wat discussie is geweest over de etymologie van het woord 'ergode' (zie bijvoorbeeld [10, 15]), is de huidige consensus dat het een samenvoeging is van de Griekse woorden $\epsilon\rho\gamma o\nu$, dat 'werk' of 'actie' en soms ook 'energie' betekent, en $o\delta o\varsigma$, dat 'pad' betekent. Boltzmann bedoelde er het volgende mee. Noem de veronderstelde totale energie van een geïsoleerd veeldeeltjessysteem E en noteer de verzameling van alle mogelijke toestanden van het systeem waarvan de totale energie gelijk is aan E met $\mathcal{E}$. In [7] is een 'ergode' een kansverdeling op $\mathcal{E}$ die invariant blijft door de tijd en waarvan de drager gelijk is aan heel $\mathcal{E}$. Het bestaan van een 'ergode' is equivalent met de ergodenveronderstelling.

Ludwig Boltzmann in 1902

Tatjana Ehrenfest Afanassjewa en Paul Ehrenfest in 1904

Een belangrijk gevolg van de ergodenveronderstelling is dat voor geschikte observabelen van het dynamische systeem het tijdsgemiddelde langs een baan van het systeem in de limiet van lange tijd gelijk is aan het gemiddelde van de observabele over alle toestanden uit $\mathcal{E}$ gewogen volgens de invariante kansverdeling, met andere woorden *tijdsgemiddelde = ruimtegemiddelde*. De veronderstelling, zoals die in [9] geformuleerd is, bleek te sterk te zijn. In 1913 lieten de Duitse wiskundige Arthur Rosenthal (1887–1959) en de Zwitserse wiskundige Michel Plancharel (1885–1967) onafhankelijk van elkaar zien dat realistische gasmodellen hier niet aan kunnen voldoen (zie [8, 12, 14]). Ergodentheorie als vakgebied is ontstaan uit de zoektocht naar voorwaarden waaronder tijdsgemiddelden gelijk zijn aan ruimtegemiddelden.

Foto:: Wikimedia Commons / Los Alamos National Laboratory

John von Neumann, ergens tussen 1943 en 1945

Ergodenstellingen

De wiskundige grondslag van ergodentheorie werd in 1931 gelegd toen de Amerikaans-Hongaarse alleskunner John von Neumann (1903–1957) en de Amerikaanse wiskundige George Birkhoff (1884–1944) twee verschillende versies van de ergodenstelling bewezen. Om deze stelling precies te maken beschouwen we een dynamisch systeem dat zich in discrete tijdstappen ontwikkelt. In de simpelste vorm bestaat zo'n systeem uit een *toestandsruimte* X en een *transformatie* $T: X \to X$ die de tijdsontwikkeling van het systeem geeft, in de zin dat als het systeem zich op een bepaald moment in toestand $x \in X$ bevindt, het zich een tijdstap later in toestand $T(x) \in X$ bevindt. We nemen aan dat het systeem de volgende twee eigenschappen heeft:

1. Er bestaat een kansverdeling $\mathbb{P}$ op de verzameling X die invariant blijft onder de tijdsontwikkeling. In dit geval heet de transformatie T *maatbehoudend*.
2. Het systeem is irreducibel in de zin dat als de toestandsruimte X een kleiner gebied $Y \subseteq X$ bevat waartoe de dynamica beperkt kan worden ($T^{-1}Y = Y$), dan is Y of verwaarloosbaar klein of zo goed als de hele ruimte ($\mathbb{P}(Y) = 0$ of $\mathbb{P}(Y) = 1$). In dit geval heet de transformatie T *ergodisch*.

De ergodenstellingen van Von Neumann en Birkhoff doen voor een observabele $f: X \to \mathbb{R}$ van het systeem een uitspraak over de convergentie van het tijdsgemiddelde van f langs de baan van een toestand $x \in X$ naar de gemiddelde waarde van f over de hele ruimte X gewogen volgens de kansverdeling $\mathbb{P}$. Het tijdsgemiddelde is in dit geval de waarde

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} f(T^m x),$$

indien deze limiet bestaat. Hierin staat T^m voor m keer de samenstelling van T met zichzelf:

$$T^m := \underbrace{T \circ T \circ \cdots \circ T}_{m \text{ keer}}.$$

Het ruimtegemiddelde geven we weer met een integraal: $\int_X f \, d\mathbb{P}$. De *ergodenstellingen* van Von Neumann [16] en Birkhoff [2, 3] geven, elk voor een ander soort convergentie, voorwaarden waaronder

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} f(T^m x) = \int_X f \, d\mathbb{P}. \qquad (*)$$

George Birkhoff in 1910

Niet veel later verschenen er nog enkele andere versies van de ergodenstelling. Onder de aanvullende eisen dat X een compacte metrische ruimte is en T een continue transformatie is, en dat er maar één mogelijke tijdsinvariante kansverdeling $\mathbb{P}$ op X bestaat die goed gedefinieerd is op alle open deelverzamelingen, geldt de convergentie in $(*)$ zelfs uniform voor continue observabelen $f : X \to R$. In dit geval heet het dynamisch systeem *uniek ergodisch*.

Von Neumann maakte zijn resultaat bekend in de zomer van 1931. Uit bewaarde brieven blijkt dat Von Neumann en Birkhoff in de herfst van 1931 contact hebben gehad over de stelling van Von Neumann en dat Birkhoff in november 1931 nog bezig was met zijn bewijs. Toen duidelijk werd dat het artikel van Von Neumann [16] in januari 1932 in de *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* zou verschijnen en dat Birkhoff probeerde zijn resultaten al in december 1931 in het zelfde tijdschrift gepubliceerd te krijgen, heeft Von Neumann aan Birkhoff gevraagd om de publicatie van zijn resultaat uit te stellen. Dat verzoek is niet gehonoreerd, en Birkhoffs artikelen [2, 3] zijn inderdaad in december 1931 verschenen. In maart 1932 heeft Birkhoff, samen met collega Bernard Koopman (1900–1981), een artikel gepubliceerd [4] dat een chronologisch overzicht bevat van alle belangrijke gebeurtenissen die voorafgingen aan de publicaties van [2, 3, 6]. Zie [17] voor meer informatie.

Eerste cijfers van de machten van twee

De betekenis van ergodentheorie op ons begrip van dynamische systemen is van onschatbare waarde gebleken. Tegelijk heeft ergodentheorie grote en opvallende doorbraken teweeg gebracht in andere wiskundige vakgebieden. De artikelen van Benjamin Weiss en Shrikrishna Dani verderop in dit nummer gaan daar dieper op in. Hier geven we een klein voorbeeld van een toepassing van ergodentheorie in de getaltheorie.

In 1881 viel het de Amerikaans-Canadese sterren- en wiskundige Simon Newcomb (1835–1909) op dat van logaritmetabellen de pagina's voor getallen waarvan het eerste decimale cijfer een 1 is veel meer gebruikerssporen vertoonden dan de andere pagina's. Ook zagen de pagina's er minder vaak gebruikt uit naarmate het eerste decimale cijfer groter werd (zie [11]). Zijn conclusie was dat blijkbaar niet alle cijfers 1 tot en met 9 even vaak voorkomen als eerste decimale cijfer.

In 1938 ging de Amerikaanse natuurkundige Frank Benford (1883–1948) een stap verder. Hij bestudeerde in [1] allerlei grote numerieke dataverzamelingen en schatte de percentages waarmee de cijfers 1 tot en met 9 daarin voorkwamen als eerste decimale cijfer. Benford bekeek onder andere gegevens over populatiegrootten van de Verenigde Staten, gewichten van moleculen en atomen, getallen in de adressenlijst van de *American Men of Science* (die overigens ook de gegevens van vrouwen bevatte en later omgedoopt is tot *American Men and Women of Science*) en in een uitgave van *Readers Digest*. Tabel 1 bevat

1	2	3	4	5	6	7	8	9
30,6	18,5	12,4	9,4	8,0	6,4	5,1	4,9	4,7

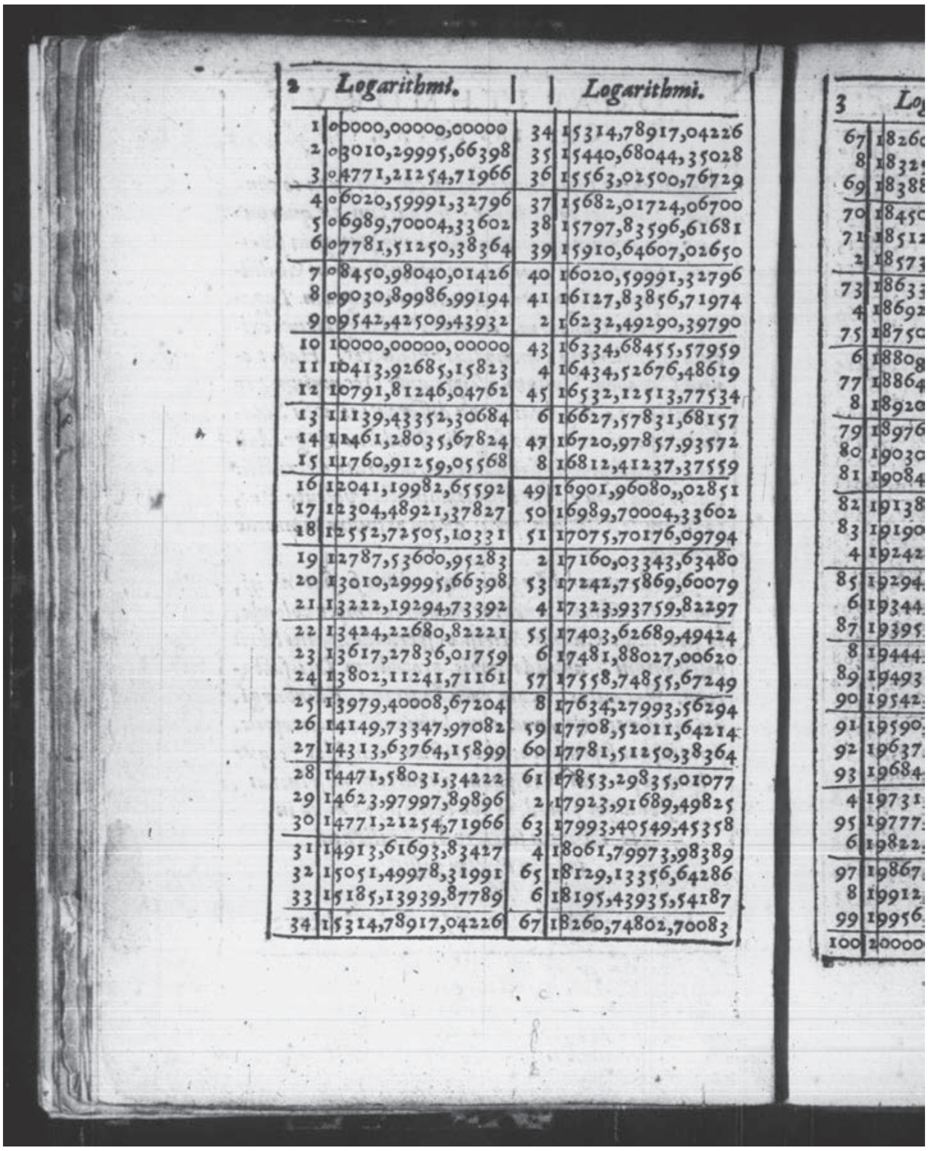
Tabel 1 De percentages eerste decimalen per cijfer geobserveerd door Benford in [2].

de percentages geobserveerd door Benford in [1]. De Wet van Newcomb–Benford vat deze observaties samen.

We laten zien dat ook de machten van twee voldoen aan de Wet van Newcomb–Benford. De rij eerste decimalen van deze machten is

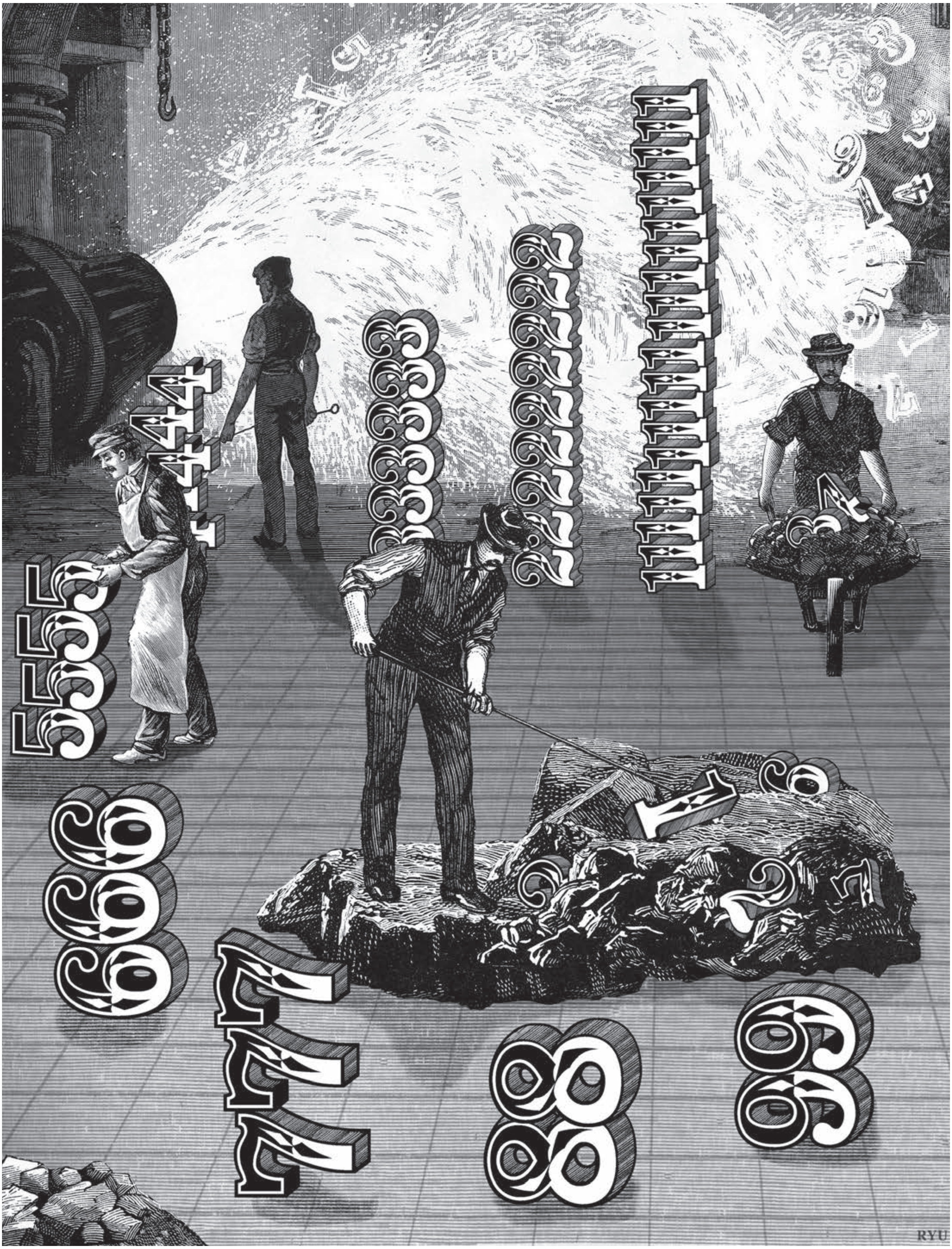
$$1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, \ldots.$$

Laat $k \in \{1, \ldots, 9\}$ een mogelijk eerste cijfer zijn en gebruik voor ieder natuurlijk getal n de notatie $p_n(k)$ voor het aantal keer dat het cijfer k voorkomt in de eerste n getallen in bovenstaande rij. Dus $p_9(1) = 3$ en


2

	Logarithmi.		Logarithmi.
1	0 0000,00000,00000	34	1 5314,78917,04226
2	0 3010,29995,66398	35	1 5440,68044,35028
3	0 4771,21254,71966	36	1 5563,02500,76729
4	0 6020,59991,32796	37	1 5682,01724,06700
5	0 6989,70004,33602	38	1 5797,83596,61681
6	0 7781,51250,38364	39	1 5910,64607,02650
7	0 8450,98040,01426	40	1 6020,59991,32796
8	0 9030,89986,99194	41	1 6127,83856,71974
9	0 9542,42509,43932	2	1 6232,49290,39790
10	1 0000,00000,00000	43	1 6334,68455,57959
11	1 0413,92685,15823	4	1 6434,52676,48619
12	1 0791,81246,04762	45	1 6532,12513,77534
13	1 1139,43352,30684	6	1 6627,57831,68157
14	1 1461,28035,67824	47	1 6720,97857,93572
15	1 1760,91259,05568	8	1 6812,41237,37559
16	1 2041,19982,65592	49	1 6901,96080,,02851
17	1 2304,48921,37827	50	1 6989,70004,33602
18	1 2552,72505,10331	51	1 7075,70176,09794
19	1 2787,53600,95283	2	1 7160,03343,63480
20	1 3010,29995,66398	53	1 7242,75869,60079
21	1 3222,19294,73392	4	1 7323,93759,82297
22	1 3424,22680,82221	55	1 7403,62689,49424
23	1 3617,27836,01759	6	1 7481,88027,00620
24	1 3802,11241,71161	57	1 7558,74855,67249
25	1 3979,40008,67204	8	1 7634,27993,56294
26	1 4149,73347,97082	59	1 7708,52011,64214
27	1 4313,63764,15899	60	1 7781,51250,38364
28	1 4471,58031,34222	61	1 7853,29835,01077
29	1 4623,97997,89896	2	1 7923,91689,49825
30	1 4771,21254,71966	63	1 7993,40549,45358
31	1 4913,61693,83427	4	1 8061,79973,98389
32	1 5051,49978,31991	65	1 8129,13356,64286
33	1 5185,13939,87789	6	1 8195,43935,54187
34	1 5314,78917,04226	67	1 8260,74802,70083

Figuur 1 Een pagina uit de *Logarithmorum Chilias Prima*, de eerste logaritmetabel van de Engelse wiskundige Henry Briggs (1561–1635) uit 1617. Briggs was de eerste die voorstelde om de logaritme met basis tien te gebruiken.



Illustratie: Ryu Tajiri

$p_3(8) = 0$. De frequentie van het cijfer k in deze rij is dan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n(k)}{n},$$

indien deze limiet bestaat. Beschouw nu een willekeurig natuurlijk getal m. De eerste decimaal van 2^m is gelijk aan k precies dan als

$$k \times 10^j \leq 2^m < (k+1) \times 10^j$$

voor een zekere $j \geq 0$. Dit is hetzelfde als

$${}^{10}\log k \leq m\,{}^{10}\log 2 \,(\mathrm{mod}\, 1) < {}^{10}\log(k+1).$$

Laat $T: [0,1) \to [0,1)$ de transformatie zijn die gegeven wordt door

$$T(x) = x + {}^{10}\log 2 \,(\mathrm{mod}\, 1).$$

Dan is

$$T^m(0) = m\,{}^{10}\log 2 \,(\mathrm{mod}\, 1).$$

Met andere woorden, $p_n(k)$ is gelijk aan het aantal keer dat de baan van 0 onder T in het interval $[{}^{10}\log k, {}^{10}\log(k+1))$ ligt tijdens de eerste n tijdstappen. De observabele die hierbij hoort is de indicatorfunctie gegeven door

$$1_{[{}^{10}\log k, {}^{10}\log(k+1))}(x) = 1 \quad \text{als } x \in [{}^{10}\log k, {}^{10}\log(k+1)),$$
$$1_{[{}^{10}\log k, {}^{10}\log(k+1))}(x) = 0 \quad \text{als } x \notin [{}^{10}\log k, {}^{10}\log(k+1)).$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9
30,6	17,6	12,5	9,7	7,9	6,7	5,8	5,1	4,6

Tabel 2 De afgeronde percentages eerste decimalen voor de machten van twee.

Dit betekent dat de frequentie van het cijfer k gelijk is aan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} 1_{[{}^{10}\log k, {}^{10}\log(k+1))}(T^m(0)).$$

Door 0 en 1 met elkaar te identificeren wordt het interval $[0,1)$ compact en de transformatie T continu. Verder is T maatbehoudend en ergodisch met betrekking tot de uniforme kansverdeling op $[0,1)$, als gevolg van de irrationaliteit van ${}^{10}\log 2$. Zelfs blijkt T uniek ergodisch te zijn, wat betekent dat de gelijkheid in $(*)$ geldt voor iedere continue observabele. Indicatorfuncties zijn niet continu, maar kunnen willekeurig goed benaderd worden door continue functies. Dit alles is voldoende om te kunnen concluderen dat $(*)$ geldt voor $f = 1_{[{}^{10}\log k, {}^{10}\log(k+1))}$. De gemiddelde waarde van deze indicatorfunctie over het interval $[0,1)$ is ${}^{10}\log\left(\frac{k+1}{k}\right)$. Dit geeft Tabel 2.

In 1909 bewees de Duitse natuur- en wiskundige Hermann Weyl (1885–1955) dat voor ieder irrationaal getal $\alpha \in [0,1)$ de rij $\{n\alpha \,(\mathrm{mod}\, 1)\}_{n\geq 0}$ gelijk verdeeld is over het interval $[0,1)$. Dat wil zeggen dat voor ieder interval $I \subseteq [0,1)$ het gedeelte van de rij dat in I ligt gelijk is aan de lengte van I. De Stelling van Weyl is op dezelfde manier als hierboven een direct gevolg van de ergodenstelling. In het algemeen geldt voor ieder irrationaal getal $\alpha \in [0,1)$ dat de transformatie $T: [0,1) \to [0,1)$ gegeven door

$$T(x) = x + \alpha \,(\mathrm{mod}\, 1)$$

uniek ergodisch is. Voor iedere $n \geq 0$ geldt $T^n(0) = n\alpha \,(\mathrm{mod}\, 1)$. Laat $I \subseteq [0,1)$ een interval zijn. Het gedeelte van de rij $\{n\alpha \,(\mathrm{mod}\, 1)\}_{n\geq 0}$ dat in het interval I ligt is gelijk aan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} 1_I(T^m(0)),$$

waar 1_I de indicatorfunctie voor het interval I is. Uit de ergodenstelling volgt dat deze limiet gelijk is aan de gemiddelde waarde van de indicatorfunctie 1_I over het interval $[0,1)$.

In het artikel van Benjamin Weiss in dit nummer komt een diepe generalisatie van de Stelling van Weyl aan bod die is gevonden door Hillel Furstenberg, naast verschillende resultaten in diofantische benaderingen. Ook in het werk van Gregory Margulis over het Oppenheimvermoeden speelde het gebruik van ergodentheorie voor diofantische benaderingen een belangrijke rol. Shrikrishna Dani omschrijft dit in meer detail in zijn artikel verderop in dit nummer.

Referenties

1 F. Benford, The law of anomalous numbers, *Proc. Amer. Phil. Soc.* 78(4) (1938), 551–572.

2 G.D. Birkhoff, Proof of a recurrence theorem for strongly transitive systems, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 17(12) (1931), 650–655.

3 G.D. Birkhoff, Proof of the ergodic theorem, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 17(12) (1931), 656–660.

4 G.D. Birkhoff en B.O. Koopman, Recent contributions to the ergodic theory, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 18(3) (1932), 279–282.

5 L. Boltzmann, Über die mechanische Bedeutungen des zweiten Hauptsatzes der Wärmetheorie, *Wiener Berichte* 53 (1866), 195–220.

6 L. Boltzmann, Studien über das Gleichgewicht der lebendigen Kraft zwischen bewegten materiellen Punkten, *Wiener Berichte* 58 (1868), 517–560.

7 L. Boltzmann, Ueber die Eigenschaften monozyklischer und damit verwandter Systeme des zweiten Hauptsatzes der Wärmetheorie, *Wissenschaftliche Abhandlungen* 3 (1884), 122–152.

8 S. Brush, *The Kind of Motion We Call Heat*, Studies in Statistical Mechanics, Vol. 6, North-Holland, 1976.

9 P. Ehrenfest en T. Ehrenfest-Afanassjewa, *The Conceptual Foundations of the Statistical Approach to Mechanics*, Dover Publications, 1991.

10 G. Gallavotti, Ergodicity, ensembles, irreversibility in Boltzmann and beyond, *J. Statist. Phys.* 78(5–6) (1995), 1571–1589.

11 S. Newcomb, Note on the frequency of use of the different digits in natural numbers, *Amer. J. Math.* 4(1–4) (1881), 39–40.

12 M. Plancharel, Proof of the impossibility of ergodic mechanical systems, *Transport Theory Statist. Phys.* 1(4) (1971), 309–311.

13 J. von Plato, Boltzmann's ergodic hypothesis, *Arch. Hist. Exact Sci.* 42(1) (1991), 71–89.

14 A. Rosenthal, Proof of the impossibility of ergodic gas systems, *Transport Theory Statist. Phys.* 1(4) (1971), 299–308.

15 J. Uffink, Boltzmann's work in statistical physics, *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, 2014. https://plato.stanford.edu/entries/statphys-Boltzmann.

16 J. Von Neumann, Proof of the quasi-ergodic hypothesis, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 18(1) (1932), 70–82.

17 J.D. Zund, George David Birkhoff and John von Neumann: a question of priority and the ergodic theorems, 1931–1932, *Historia Math.* 29(2) (2002), 138–156.