

Paul Drijvers

Freudenthal Instituut
Universiteit Utrecht
p.drijvers@uu.nl

Onderwijs

Gereedschap om wiskunde in de vingers te krijgen

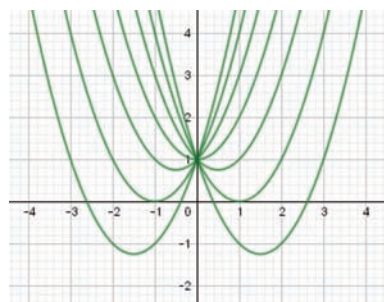
Over het gebruik van ICT-gereedschap in de wiskundeles zijn de meningen verdeeld. In dit themanummer over wiskunde en nieuwe media schetst Paul Drijvers twee theoretische invalshoeken om tegen deze inzet aan te kijken. Instrumentatietheorie beschrijft hoe ICT een instrument wordt voor wiskunde, en de theorie van belichaamde cognitie benadrukt de rol van het lichaam in het leren, ook van wiskunde. Na enkele voorbeelden pleit Paul voor een integratie van de twee, onder de noemer van *belichaamde instrumentatie*, om te bevorderen dat leerlingen wiskunde door de inzet van ICT in de vingers krijgen.

Gereedschap voor wiskunde

Over het gebruik van ICT-gereedschap bij wiskunde en in het wiskundeonderwijs zijn de meningen verdeeld. Aan de ene kant zijn er mensen die zweren bij het krijtbord en bij vaardigheden met pen en papier, want “zo moet je het leren, zo moet je wiskunde in de vingers krijgen”. Bovendien blijken de leereffecten van de inzet van ICT niet zo spectaculair als eerder was gehoopt, waar de meer traditionele methoden al eeuwen beproefd zijn. Aan de andere kant wordt geconstateerd dat de praktijk is veranderd. Ingenieurs gebruiken bijvoorbeeld in hun beroep nauwelijks pen en papier, maar doen de wiskunde die ze nodig hebben met ICT [12]. In lijn hiermee is het gebruik van ICT-gereedschap een belangrijk onderdeel van toekomstig wiskundeonderwijs in de voorstellen van Curriculum.nu [9].

Onmiskenbaar hebben mensen altijd al gereedschap ontwikkeld om fysieke beperkingen te overwinnen en lastige taken handiger uit te voeren. Met een hamer kun je nu eenmaal harder slaan dan met de hand, en bij de beklimming van een rotsachtige

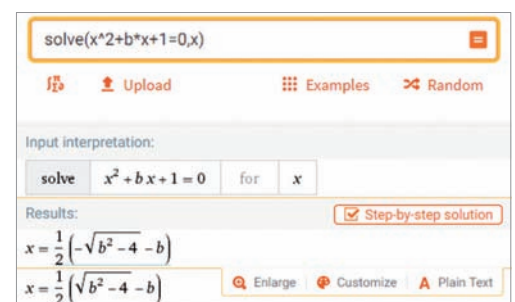
helling beschermen stevige bergschoenen kwetsbare voeten. Ook in de geschiedenis van de wiskunde is een rijkdom aan gereedschap ontstaan, variërend van kleitablet en abacus tot online computeralgebrastelsel, waarin wiskundige algoritmen ‘onder de motorkap’ zitten van eenvoudige commando’s. De vragen die hedendaagse geavanceerde tools oproepen, zijn ten eerste welke wiskunde een leerling nog moet leren als de wiskunde dan zo ‘gealgoritmiseerd’ is, en ten tweede hoe ICT-gereedschap zelf in dit leerproces een nuttige rol kan spelen.



Op deze ‘wat&hoe’-vragen geeft dit artikel geen finale antwoorden. Wel schets ik hieronder twee theoretische invalshoeken om tegen ICT-gebruik in het wiskundeonderwijs aan te kijken, die hierbij vruchtbaar kunnen zijn en elkaar bovendien kunnen versterken. De eerste is instrumentatietheorie, de tweede betreft het idee van belichaamde cognitie, en de combinatie van beide noem ik belichaamde instrumentatie.

Instrumentatietheorie

Laat ik beginnen met een voorbeeld uit [5]. Het betreft leerlingen uit klas vwo-3 die functies van de vorm $f(x) = x^2 + bx + 1$ onderzoeken met de TI-89, een grafische rekenmachine met computeralgebrastelsel (CAS). Het tekenen van een aantal grafieken is goed te doen (zie Figuur 1 links, nu gemaakt met GeoGebra), maar de vervolgvraag om de nulpunten van f met



Figuur 1 Grafieken met GeoGebra (links) en nulpunten met Wolfram Alpha (rechts) van $f(x) = x^2 + bx + 1$.

behelp van het CAS uit te drukken in de parameter b is weerbarstig. Dit lijkt in principe heel eenvoudig met computeralgebra (zie Figuur 1 rechts voor de aanpak met Wolfram Alpha), maar in praktijk liepen de leerlingen tegen heel wat obstakels aan, bijvoorbeeld:

- Ze moeten inzien dat Solve gebruikt kan worden om een variabele uit te drukken in andere variabelen en hier dus leidt naar de oplossing van het probleem. Ze moeten dus de betekenis van oplossen verruimen: het betekent niet alleen een getal vinden, maar ook een variabele isoleren.
- Ze moeten de syntax van het Solve-commando kennen. Sommige leerlingen vergeten bijvoorbeeld de ‘= 0’ aan het einde, omdat ze zich het verschil tussen een expressie en een vergelijking onvoldoende realiseren. Wolfram Alpha zou dit wel accepteren, maar de TI-89 die de leerlingen toen gebruikten niet.
- Ze moeten zich realiseren dat een vergelijking altijd naar een onbekende wordt opgelost en dat je, als er meer kandidaat-onbekenden zijn, moet aangeven welke je kiest.
- Ten slotte moeten ze een algebraïsche uitdrukking als oplossing beschouwen en daar verstandig naar kunnen kijken. Veel leerlingen bleken bijvoorbeeld niet in staat om de oplossing correct, met de goede reikwijdte van het wortelteken, over te schrijven in hun schrift.

Wat leren we van dit voorbeeld? Het toont aan dat geavanceerd gereedschap in handen van een nieuwe gebruiker niet vanzelfsprekend tot succes leidt: die gebruiker moet daarvoor immers over de kennis en vaardigheid beschikken om te herkennen waarvoor je het gereedschap kunt gebruiken bij het gegeven probleem en hoe je dat dan aanpakt. Dit is waar instrumentatietheorie in beeld komt.

Instrumentatietheorie onderscheidt artefact (het ‘ding’, het gereedschap, in dit geval een computeralgebraomgeving zoals de TI-89 of Wolfram Alpha) en instrument [5]. We spreken pas van een instrument als er een betekenisvolle relatie ontstaan is tussen het artefact en de gebruiker voor het uitvoeren van een bepaald type taken. Eenvoudiger gezegd: als de leerling in dit voorbeeld voldoende wiskundige kennis en technische vaardigheid verwerft om te weten dat én hoe het gereedschap

gebruikt kan worden om het wiskundige probleem op te lossen, is sprake van een instrument. Dit leerproces, dat instrumentele genese heet, vindt niet vanzelf plaats. Het omvat het opbouwen van een repertoire aan technieken en zogeheten instrumentatieschema's om het gereedschap voor een bepaald doel te gebruiken. Bij dit type symbolische rekenmachines behelst zo'n repertoire bijvoorbeeld technieken om grafieken goed in beeld te brengen, om snijpunten en nulpunten te benaderen, om vergelijkingen op te lossen, om afgeleide functies te bepalen, et cetera. Wat van cruciaal belang is in instrumentatietheorie, is dat die instrumentatieschema's niet alleen maar technisch van aard zijn, maar ook wiskundige kennis omvatten. Het lijstje van problemen van leerlingen hierboven bevat duidelijk inzichtelijke elementen, zoals het opvatten van oplossen als isoleren en het uitbreiden van het begrip ‘oplossing’ met algebraïsche uitdrukkingen. De technische en de inhoudelijke ontwikkeling gaan dus hand-in-hand en hebben elkaar nodig.

Als het dan zo lastig is, die computeralgebra, waarom zou je deze jonge leerlingen dan daarmee lastigvallen? Behalve dat dergelijke tools nu eenmaal voor iedereen beschikbaar zijn en elke leerling Wolfram Alpha of GeoGebra CAS kan gebruiken, is de belangrijkste reden gelegen in de kansen die het biedt tot leren: natuurlijk lopen de leerlingen in het bovenstaande voorbeeld tegen problemen aan, maar die zijn ook aanleiding om werkelijk over wiskunde na te denken: wat is het verschil tussen een vergelijking en een expressie, wat is oplossen eigenlijk, wat is een oplossing? Door de wisselwerking tussen wiskundige kennis en technische vaardigheid didactisch uit te buiten, kan het gebruik van ICT-tools niet alleen werk uit handen nemen, maar ook het leren bevorderen.

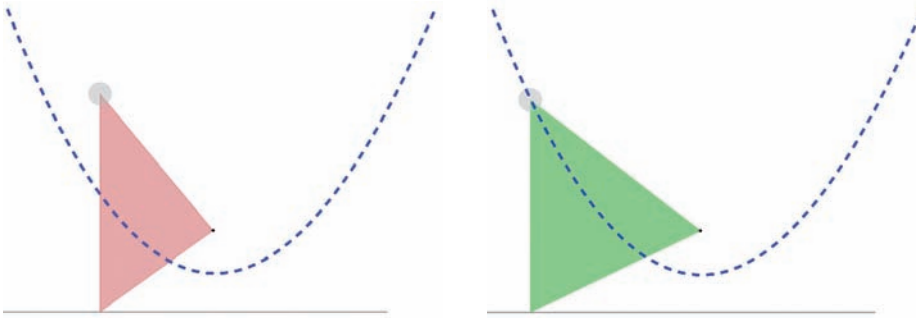
De clou van instrumentatietheorie is dat dit leerproces, deze instrumentele genese, complex is. De waarde van de theorie—die overigens meer omvat dan wat ik hier kort beschrijf—is naar mijn idee dat die het subtiele samenspel tussen wiskundig denken en technische vaardigheid bij het gebruik van wiskundig gereedschap boven tafel haalt. Problemen van leerlingen bij het werken met ICT kunnen vaak in termen van instrumentatietheorie worden begrepen: een mismatch tussen technische aanpak en wiskundig inzicht.

Tegelijkertijd kent instrumentatietheorie ook beperkingen: ze is vooral toegepast in situaties met leerlingen van hoog niveau en met geavanceerde tools, en wiskunde wordt daarbij veelal gezien als een cerebrale activiteit, waarin lichamelijke ervaringen geen rol spelen. De tweede theoretische lens, die van belichaamde cognitie, komt aan deze beperkingen tegemoet.

Belichaamde cognitie

We beginnen weer met een voorbeeld, nogmaals over parabolen. De twee schermen in Figuur 2 tonen een opdracht in het ‘embodied design genre’ [1], ontworpen door Anna Shvarts in de Digitale Wiskunde-Omgeving (zie www.numworx.nl). In het linker scherm zien we een driehoek. Het meest rechtse punt daarvan ligt vast, terwijl het punt linksboven kan bewegen. Het onderste punt van de driehoek is de projectie van het bovenste op een vaste horizontale lijn. Met de vinger kan de leerling het punt linksboven op het touchscreen bewegen. De projectie beneden en de driehoek veranderen dan mee. Daarbij verspringt de kleur: als de driehoek gelijkbenig is vanuit het punt linksboven, is die groen (zie rechter scherm) en anders rood. In wiskundige termen: de driehoek is precies dan groen als het bewegende punt ligt op de gestippelde parabool, bepaald door de horizontale rechte als richtlijn en het vaste punt als brandpunt. Deze parabool is echter niet zichtbaar voor de leerling, maar is hier voor de lezer toegevoegd. De opdracht voor de leerling, die dus niet weet van de onderliggende parabool of de gelijkbenigheid, is om het punt zo te bewegen dat de driehoek groen blijft. Dit is motorisch nog best lastig: om de driehoek gelijkbenig te houden, moet de beweging van je vinger doorlopend gericht zijn op het midden van de overstaande zijde van de driehoek, die zelf meebeweegt. Dit vraagt een goede ooghandcoördinatie. (Probeer het zelf uit op <https://embodieddesign.sites.uu.nl/activity>. Kies onder Functies voor Activity 2.) De analyse van oogbewegingen van leerlingen laat inderdaad sprongen zien tussen het beweegbare punt en het overstaande midden [11]. De vervolgvraag aan de leerling is om de driehoek niet alleen met een vloeiende beweging groen te houden, maar tevens te beschrijven welke onderliggende regel de kleur van de driehoek bepaalt [10].

Wat leert ons dit voorbeeld? Het laat zien dat het met de huidige technologie



Figuur 2 De parabool ‘in de vingers’ (zie [11] en youtu.be/JHiHfDUGtw voor een animatie).

— in dit geval een touchscreen als hardware en de Digitale WiskundeOmgeving als software — mogelijk is om leerlingen op een fysieke manier kennis te laten maken met wiskundige fenomenen. De opgave geeft leerlingen een sensomotorische ervaring met de baan van het punt dat de driehoek ‘gelijkbenig moet houden’. Een ervaring die de basis kan vormen voor het paraboobegrip, dat leerlingen nu al enigszins ‘in de vingers krijgen’, in de zin van de dynamische coördinatie tussen waarneming met het oog en beweging van de vinger. Dit is waar de theorie van belichaamde cognitie in beeld komt.

Het uitgangspunt in de theorie van belichaamde cognitie is dat cognitie niet wordt beschouwd als iets wat uitsluitend huist in je hoofd en van daaruit de regie voert over het lichaam. Hoofd en lichaam worden niet gezien als dualiteit, maar als een geïntegreerd functioneel systeem. Cognitie staat daarmee niet los van waarnemen en handelen, maar is ingebed in sensomotorische vaardigheden en omvat de cyclische interactie tussen waarneming en handeling [2]. Kennis zit dus ook in de vingers, zogezegd. Zelfs in een abstract vak als wiskunde vinden begrippen en ideeën hun wortels in fysieke waarnemings- en handelingservaringen, in sensomotorische acties die het fundament vormen voor conceptuele me-

taforen [8]. In het voorbeeld hierboven gaat het coördineren van waarneming en beweging dus samen met het leren over gelijkbenige driehoeken als aanloop naar parabolen.

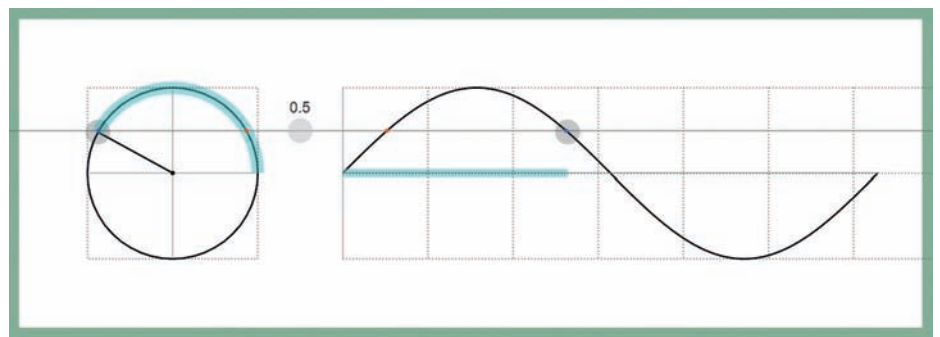
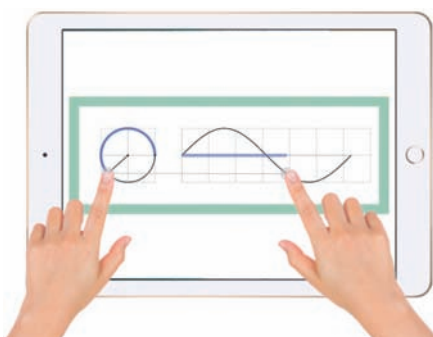
De clou van de theorie van belichaamde cognitie — waar nog veel meer over te zeggen valt dan deze rudimentaire schets — is dat die er ons op wijst dat we in het wiskundeonderwijs de rol van waarneming en motorische activiteit vaak vergeten en verwaarlozen. De vraag die deze theorie ons opdringt, is of we het leren van wiskunde kunnen bevorderen door deze aspecten meer plaats te geven in het onderwijs. En misschien kan ICT-gereedschap daarbij zelfs een helpende hand bieden?

Belichaamde instrumentatie

Als de kracht van instrumentatietheorie is om de wisselwerking te benadrukken tussen de techniek om gereedschap te gebruiken en de daarbij behorende wiskundige inzichten, en als belichaamde cognitie er terecht op wijst dat het sensomotorische activiteiten zijn die tot cognitie leiden, hoe kunnen deze twee elkaar dan aanvullen waar het gaat om ICT-gebruik in de wiskundeles?

Eerst weer een voorbeeld, nu over goniometrie. Figuur 3 toont een opdracht, ontworpen in de Digitale WiskundeOmge-

ving door Rosa Alberto [3,4]. In het linker plaatje ziet u de eenheidscirkel en de grafiek van de sinusfunctie, met op elk een beweegbaar punt. De leerling, die de sinusfunctie nog niet kent, beweegt de twee punten met twee handen op het multi-touchscreen. Net als bij het voorbeeld in Figuur 2 geeft het scherm feedback: als de twee punten met elkaar corresponderen, dus als de sinus van de hoek in de eenheidscirkel gelijk is aan de waarde van de sinus voor het bijbehorende punt op de horizontale as, dan wordt het kader groen en anders is het rood. De vraag aan de leerling is om de twee handen gelijktijdig vloeiend te bewegen over de cirkel en de grafiek zodat het kader groen blijft. Deze activiteit vraagt om een sensomotorische coördinatie om de twee punten op dezelfde hoogte te houden, en geeft de leerling naar verwachting gevoel voor dit samenspel van bewegingen. Net als bij de parabool in Figuur 2 geeft dit aanleiding tot vervolgoopdrachten. Als mogelijk eindpunt, dat aansluit bij de geobserveerde horizontale oogbewegingen van leerlingen, ziet u in het rechter plaatje in Figuur 3 een toegevoegde horizontale lijn, die de leerling omhoog en omlaag kan schuiven om op die manier goniometrische vergelijkingen zoals $\sin(x) = 0,5$ op te lossen in zowel eenheidscirkel als sinusgrafiek. Deze aanpak lijkt veel op de grafische manier om vergelijkingen op te lossen die leerlingen veel toepassen met de grafische rekenmachine. Zo kunnen we dus verband leggen tussen de eerste sensomotorische ervaringen met de sinusgrafiek en de standaard instrumentatieschema's die leerlingen ontwikkelen met de grafische rekenmachine in de tweede fase van havo en vwo. Een schema dat algemeen van toepassing is bij het grafisch oplossen van vergelijkingen van de vorm $f(x) = c$, of zelfs $f(x) = g(x)$, en waarbij het beeld is dat je de snijpun-



Figuur 3 De sinusgrafiek ‘in de vingers’ (zie [4] en youtu.be/1e0U4XyyHmg voor een animatie).

ten zoekt van de grafieken van het linker- en het rechterlid.

Wat leren we van dit voorbeeld? Het geeft aan dat ICT-gereedschap gebruikt kan worden voor het opdoen van fysieke ervaringen die de basis vormen voor cognitie, in lijn met de theorie van belichaamde cognitie. Vervolgens kunnen die ervaringen ook leiden tot de vorming van schema's en standaardtechnieken die gebruikt kunnen worden voor het oplossen van wiskundige problemen, in lijn met instrumentatietheorie. De samenspraak tussen deze twee perspectieven in leertrajecten, die ik belichaamde instrumentatie noem, lijkt me een vruchtbare benadering van de inzet van ICT in wiskundeonderwijs: enerzijds dragen ICT-tools bij aan embodied ervaringen als basis voor cognitie, en anderzijds ontstaan standaardtechnieken en schema's voor het oplossen van wiskundige problemen [6]. Belichaamde instrumentatie benadrukt het instrumentele karakter van sensomotorische ervaringen en de lichamelijke basis van instrumentatieschema's. Deze schema's zitten dan niet zozeer in het hoofd, maar omvatten ook sensomotorische interacties, en zitten dus ook 'in de vingers'. Daarmee richt belichaamde instrumentatie zich dus op de simultane ontwikkeling van sensomotorische ervaringen, technieken om tools te gebruiken en wiskundige cognitie. De kunst is dan om lijnen van leeractiviteiten te ontwerpen waarin zowel de fysieke

wortels van cognitie en de noodzaak van instrumentele genese op een natuurlijke manier aan bod komen, bijvoorbeeld door dat de ontwikkeling van sensomotorische schema's hand in hand gaat met instrumentele genese.

Het zijn niet alleen nieuwe inzichten in cognitie die tot deze benadering hebben geleid, het gaat ook om technologische ontwikkelingen. Dankzij de beschikbaarheid van multi-touchschermen, bewegings-sensoren, en devices voor augmented en virtual reality is het ook technisch veel beter mogelijk om aandacht te besteden aan de fysieke wortels van cognitie. Zo hebben Duijzer en collega's leerlingen van basisschooleftijd ervaring laten opdoen met het 'lopen van grafieken': leerlingen werd gevraagd met behulp van een bewegingssensor een gegeven tijd-afstandgrafiek na te maken, waarbij de eigen loopbewegingen direct op het scherm gevisualiseerd werden als de gerealiseerde tijd-afstandgrafiek. Gedurende dergelijke activiteiten wordt het functiebegrip — afstand als functie van tijd — aan den lijve ondervonden [7].

Tot slot

Ik vroeg me aan het begin van dit artikel af welke wiskunde een leerling nog moet leren als de wiskunde zo 'gealgoritmiseerd' is, en hoe ICT-gereedschap zelf in dat leerproces een nuttige rol kan spelen. Ik denk

dat de benadering van *belichaamde instrumentatie* met name bij de tweede vraag van pas kan komen.

Het idee van belichaamde cognitie benadrukt dat cognitie geworteld is in sensomotorische ervaringen. Dat dreigen we nog wel eens te vergeten in het wiskundeonderwijs, en nieuwe ontwikkelingen in ICT-gereedschap maken dat deze benadering meer binnen handbereik komt. Hoe deze ervaringen leiden tot bruikbare conventionele kennis van wiskunde, is nog onvoldoende duidelijk. Daarbij zou instrumentatietheorie kunnen helpen. Instrumentatietheorie benadrukt de verwevenheid van het gebruik van gereedschap en de wiskundige kennis die daarbij komt kijken, maar besteedt geen aandacht aan de lichamelijke basis. De twee kunnen elkaar dus aanvullen.

Hoewel het een uitdaging is om leerlingactiviteiten te ontwikkelen waarin belichaamde instrumentatie op een natuurlijke manier plaatsvindt, is dit naar mijn idee een veelbelovende benadering die richting kan geven aan het ontwerp van ICT-rijk wiskundeonderwijs. ICT neemt dan niet alleen wiskundewerk uit handen, maar kan, net zoals pen-en-papier en krijtbord, helpen om wiskunde werkelijk 'in de vingers' te krijgen. ☘

Noot

Dit artikel is een vrije bewerking van [6].

Referenties

- 1 D. Abrahamson, Building educational activities for understanding: An elaboration on the embodied-design framework and its epistemic grounds, *International Journal of Child-Computer Interaction* 2(1) (2014), 1–16.
- 2 D. Abrahamson en R. Sánchez-García, Learning is moving in new ways: the ecological dynamics of mathematics education, *The Journal of the Learning Sciences* 25 (2016), 203–239.
- 3 R. Alberto en R. Bos, Het Flzier gericht op ... embodied cognition in het wiskundeonderwijs, *Euclides* 95(5) (2020), 4–6.
- 4 R. Alberto, A. Bakker, O. Walker-van Aalst, P. Boon en P. Drijvers, Networking theories with design research: An Embodied Instrumentation case study in trigonometry, in U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen en M. Veldhuis (eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME (2019), pp. 3088–3095.
- 5 P. Drijvers, Instrument, orkest en dirigent: een theoretisch kader voor ICT-gebruik in het wiskundeonderwijs, *Pedagogische Studiën* 84(5) (2007), 358–374.
- 6 P. Drijvers, Embodied instrumentation: combining different views on using digital technology in mathematics education. In U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen en M. Veldhuis (eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME (2019), pp. 8–28.
- 7 A. C. G. Duijzer, M. Van den Heuvel-Panhuizen, M. Veldhuis en L. M. Doorman, Greep op grafieken, in Marc Van Zanten (red.), *Rekenen-wiskunde in de 21e eeuw — Ideeën en achtergronden voor primair onderwijs — Jubileumbundel ter gelegenheid van het 35-jarig bestaan van Panama*, Panama – NVORWO – Universiteit Utrecht – SLO (2017) pp. 53–58.
- 8 G. Lakoff en R. Núñez, *Where Mathematics Comes From.*, Basic Books, 2000.
- 9 M. Müller, Op weg naar een nieuw curriculum, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/21(2) (2020), 129–133.
- 10 A. Shvarts, A dual eye-tracking study of objectification as student-tutor joint activity appropriation, in E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg en L. Sumpter (eds.), *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, PME (2018), pp. 171–178.
- 11 A. Shvarts en D. Abrahamson, Dual-eye-tracking Vygotsky: A microgenetic account of a teaching/learning collaboration in an embodied-interaction technological tutorial for mathematics, *Learning, Culture and Social Interaction* 22 (2019), 100316.
- 12 N. J. Van der Wal, A. Bakker en P. Drijvers, Which Techno-Mathematical Literacies are Essential for Future Engineers? *International Journal of Science and Mathematics Education* 15 (2017), 87–104.