Rudi Penne
Faculteit toegepaste Ingenieurswetenschappen/
Departement Wiskunde, Universiteit Antwerpen
rudi.penne@uantwerpen.be

Stijn Dierckx
Faculteit toegepaste Ingenieurswetenschappen
Universiteit Antwerpen
stijn.dierckx@uantwerpen.be

Paul Levrie
Faculteit toegepaste Ingenieurswetenschappen
Universiteit Antwerpen
paul.levrie@uantwerpen.be

Geschiedenis De complexe kunst van creatie door visualisatie

Hoe imaginair zijn de complexe getallen?

Complexe getallen hebben een wat wereldvreemd imago met hun *imaginaire* deel. Uitgedaagd door het publiek tijdens een lezing nemen Rudi Penne, Stijn Dierckx en Paul Levrie de handschoen op en proberen zij de complexe getallen van dit slechte imago te bevrijden.

Toen we onlangs een lezing gaven voor een breed publiek in de Warande te Turnhout, werd uit het publiek achteraf een uitdagende vraag afgevuurd. Een toehoorder wilde namelijk weten hoe we ons complexe getallen kunnen voorstellen. “Hebben ze een fysische betekenis?” Hij herinnerde zich dit concept van uit zijn schooltijd, waar de complexe getallen hem overkwamen als een wereldvreemde uitvinding, enkel leidend tot pret voor de wiskundige en het breken van het brein van de gewone mens.

Zelfs Gerolamo Cardano (1501–1576), die in de zestiende eeuw de complexe getallen ontdekt had, beschouwde ze als een misleidende drogreden en als een mentale foltering, helaas onvermijdelijk in zijn berekeningen van de oplossingen van derdegraadsvergelijkingen. Het complexe getal werd dus geboren onder een slecht gesternte, van meet af aan verworpen als het monster van Victor Frankenstein. Deze getallen werden beschouwd als een lelijke constructie die buiten de realiteit stond, en aldus al snel zonder eerlijk proces veroordeeld en bestempeld als imaginair. Toch nemen we de uitdaging aan om bovenstaande vraag te beantwoorden en de complexe getallen van hun wereldvreemd imago te bevrijden. Als wiskundigen zijn we nu eenmaal gewend om als advocaat van de duivel op te treden.

Creatie

De bovengenoemde foltering voor Cardano vond plaats bij het oplossen van volgend vraagstuk[1]: vind twee getallen die samen opgeteld 10 geven en als product 40 hebben. De oplossingen van dit probleem bleken $5+\sqrt{-15}$ en $5-\sqrt{-15}$ te zijn. Cardano noemde dit ‘gesofisticeerd’, aangezien hij hier geen enkele fysische betekenis aan kon geven, maar kon formeel wel uitrekenen dat het product wel degelijk $25-(-15)=40$ was. Hij zei dat het antwoord ‘even subtiel als nutteloos’ was.

Cardano bleek dus het getal $\sqrt{-15}$ nodig te hebben, met andere woorden een oplossing van de vergelijking $x^2+15=0$. Tot dan stelden de wiskundigen dat dergelijke vergelijkingen simpelweg onmogelijk waren en geen oplossingen hadden. In een tijd dat een negatief getal al moeilijk te verteren was[2], was het trekken van de vierkantswortel hieruit al helemaal uit den boze. Een goede instelling, zou je kunnen opperen: laat de onmogelijke vergelijkingen voor wat ze zijn en zoek de problemen niet op. Het lastige was echter dat deze probleemkinderen ook de kop op staken in de oplossingsmethode voor derdegraadsvergelijkingen. Voor vergelijkingen van de vorm $x^3=px+q$ was reeds langer geweten, onder andere door zijn collega’s Scipione del Ferro (1465–1526) en Niccolò Tartaglia (1499–1557), hoe men oplossingen kon vinden voor negatieve waarden van p en in sommige gevallen van positieve waarden van p zolang q maar groot genoeg was in absolute waarde. Cardano ging echter verder graven, en vond ook oplossingen voor de zogenoemde *casus irreducibilis* waarbij

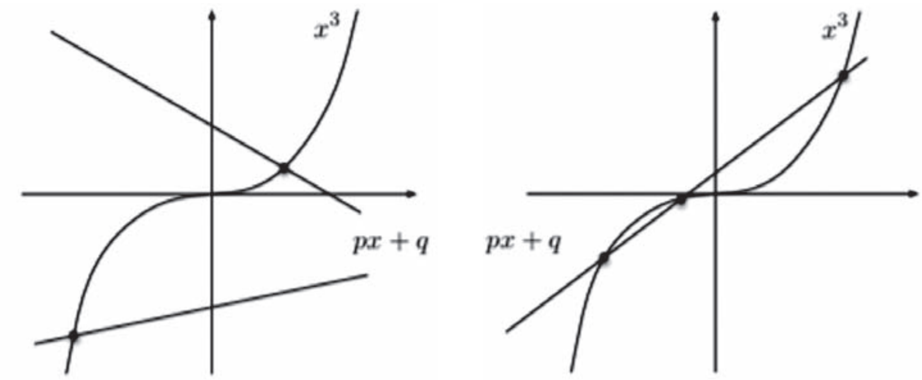
$$\Delta=\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3<0.$$

In dit geval heeft de vergelijking zelfs drie reële oplossingen, zoals in Figuur 1 geïllustreerd. De algemene oplossing

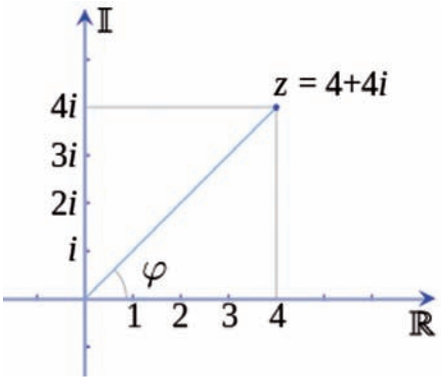
$$x=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}$$

maakt echter gebruik van de vierkantswortel van het negatieve getal Δ, wat voor problemen zorgde in het hoofd van Cardano en menig ander wiskundig brein van die tijd.

Een getormenteerde Cardano



Figuur 1 Oplossingen van een derdegraadsvergelijking volgens del Ferro en Tartaglia (links) en volgens Cardano (rechts).



Figuur 2

Bekijk bijvoorbeeld de vergelijking $x^3 = 15x+4$, waarvan $x=4$ en $x=-2\pm\sqrt{3}$ de oplossingen zijn, reële getallen zonder meer. De algebraïsche oplossing van Cardano kon echter enkel worden genoteerd als

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}\,.$$

Toen Cardano deze formule ontdekte, besefte hij dus dat hij soms een heel nieuw gebied van de wiskunde moest betreden, namelijk de wereld van de *imaginaire getallen*, om reële oplossingen te vinden vertrekkende van reële coëfficiënten in een derdegraadsvergelijking.

Waarschijnlijk beschouwde Cardano dit als een schoonheidsfoutje van de methode zelf en vermoedde hij dat later iemand een zuiverdere methode zou ontdekken om de reële oplossingen van een derdegraadsvergelijking te berekenen zonder onderweg een imaginaire wortel van een negatief getal te gebruiken. Maar in 1843 heeft Pierre Wantzel (1814–1848), dezelfde man die ook bewees dat het verdubbelen van de kubus en de trisectie van een hoek onmogelijk zijn met passer en liniaal, bewezen dat er voor vele derdegraadsvergelijkingen geen formule kan bestaan die de reële oplossingen berekent zonder daarbij vierkantswortels van negatieve getallen te ontmoeten.

Dus de complexe getallen bleken niet zomaar een tussenoplossing, en bij wiskundigen evolueerde het aanvaarden van het noodzakelijk kwaad traag maar gestaag tot het omarmen van het beste wat hen ooit overkomen is. Illustratief is de volgende uitspraak, die in de mond van de Franse wiskundige Jacques Hadamard (1865–1963) gelegd wordt:

> "Le plus court chemin entre deux vérités dans le domaine réel passe par le domaine complexe."

Visualisatie

De complexe getallen waren aldus geboren, en al snel werden rekenregels voor optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en worteltrekken ontwikkeld door Rafael Bombelli (1526–1572), die iets minder moeite had met deze vreemde getallen dan Cardano. Men worstelde echter nog met een notationeel probleem, aangezien de notatie $\sqrt{-1}$ nogal snel tot fouten[3] kon leiden zoals $-1 = (\sqrt{-1})^2 = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$. Het was de Zwitser Leonard Euler (1707–1783) die de notatie invoerde voor deze imaginaire eenheid, namelijk i (*een* vierkantswortel van -1, de andere is immers $-i$).

Een complex getal $z = a+bi$ mag dan virtueel overkomen, het bestaat wel uit twee reële componenten: a (het reële deel van z) en b (het imaginaire deel van z). De reële getallen zijn dus speciale complexe getallen met een imaginair gedeelte gelijk aan 0, en de hierboven reeds genoemde wortels van negatieve getallen zijn complexe getallen met reëel gedeelte gelijk aan 0.

Rafael Bombelli

Complexe getallen voegen dus een imaginaire component toe aan de bestaande getallen, en deze kunnen we ons voorstellen als een extra dimensie bij de reële getallenas. Dit brengt ons tot de visualisering van complexe getallen in het complexe vlak, zie Figuur 2. Deze meetkundige voorstelling werd vooral populair sinds de grote wiskundige Carl Friedrich Gauss (1777–1855) het gebruik ervan verspreidde toen hij in 1831 eindelijk zijn eigen twijfels over de complexe getallen had overwonnen. Meteen kwamen complexe getallen uit de taboesfeer. Inderdaad, zodra mensen zich iets kunnen voorstellen, dan bestaat het ook echt voor hen. Het verschil tussen de werkelijke wereld en de wereld zoals wij ze aantreffen, is te subtiel voor ons. De werkelijkheid is voor ons wat we waarnemen, of toch tenminste wat we met onze fantasie in verband brengen met een waarneming, bijvoorbeeld door visualisatie. We geloven in het getal 5 omdat we dit kunnen voorstellen door vijf vingers.

Leonard Euler

Carl Friedrich Gauss

Sir William Rowan Hamilton

Abraham de Moivre

Ook al spreken we tot op de dag van vandaag nog van het vlak van Gauss, deze meetkundige voorstelling werd eerder reeds gepresenteerd in 1799 in een artikel van de Noor Caspar Wessel (1745–1818). Het artikel was in het Deens geschreven en werd gepubliceerd in een tijdschrift dat buiten Denemarken slechts sporadisch gelezen werd, dus zijn ideeën bleven lange tijd onopgemerkt. Ook in 1806 werd, onafhankelijk van Wessel, hetzelfde concept beschreven door de Franse amateur-wiskundige Jean-Robert Argand (1768–1822).

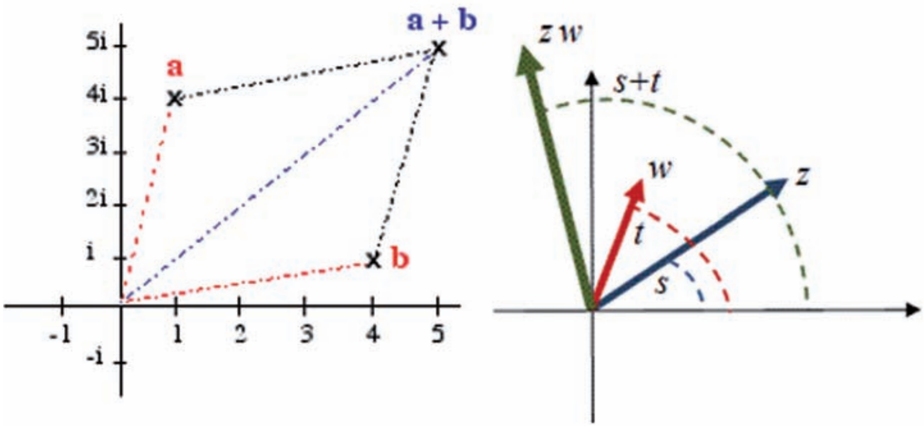
Vanaf toen werden complexe getallen beschouwd als wezens die in het vlak leefden, en het imaginaire gedeelte van deze getallen gewoon als een extra dimensie die het mogelijk maakt om te ontsnappen aan de reële getallenas met de observeerbare lengtes. Voor de formele wiskundige was er niets mysterieus meer aan complexe getallen zoals $5-3i$ of $1+i$, aangezien hij ze als gewone getallenkoppels $(5,-3)$ of $(1,1)$ zag, met de gebruikelijke optelling en met een mooie, nieuwe vermenigvuldiging op punten:

$$(5,-3)\times(1,1)=(8,2),$$

want

$$(5-3i)\times(1+i)=5+5i-3i+3=8+2i.$$

Een complex getal $z=a+bi$ wordt dus gedemystificeerd als een entiteit bestaande uit twee reële getallen. Alternatief kunnen we met z ook de volgende reële getallen associëren: de modulus $r=|z|$ (afstand tot oorsprong) en het argument $t=\arg(z)$ (de hoek naar z vanuit de positieve reële as), zodat $z=r(\cos t+i\sin t)$. Zie Figuur 3. Dankzij deze voorstelling bleek een product van complexe getallen simpelweg een optelling van hoeken, waarbij de moduli zich vermenigvuldigen als een gewoon getallenproduct. De vermenigvuldiging met i is dus in het complexe vlak gewoonweg een rotatie over $90°$ tegen de wijzers van de klok in. Niets imaginairs aan de hand dus. Zoals eerder gebeurd was in de wiskunde, bleek ook nu de visualisering meer had te bieden dan het oorspronkelijke concept (wortels van negatieve getallen). Het hek was van de dam. Meetkundige constructies en goniometrische formules bleken plots veel eenvoudiger dankzij het complexe product. Ook fysici en ingenieurs maakten dankbaar gebruik van complexe getallen in hun berekeningen voor golven of elektrische netwerken.

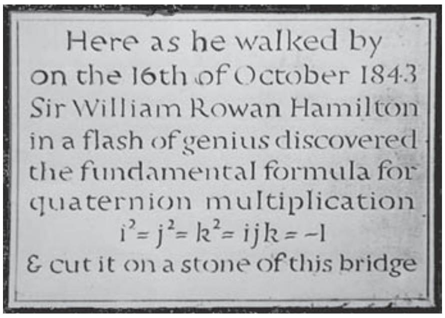


Figuur 3

Demystificatie

Het visualiseren van complexe getallen leidde dus tot een algemene acceptatie van deze oorspronkelijk verworpen mormels door wiskundigen en wetenschappers in heel Europa. Feit bleef echter dat de wiskundige definitie nog steeds opgebouwd was rond de mystieke constructie van de eenheid i als een wortel van -1. In 1833 was het de Ier sir William Rowan Hamilton (1805–1865) die hier een einde aan maakte door de verzameling van complexe getallen $\mathbb{C}$ algebraïsch te definiëren als de verzameling van geordende paren $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ waarvoor geldt dat de optelling $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$ en de vermenigvuldiging $(a,b)\times(c,d)=(ac-bd,bc+ad)$ goed gedefinieerd zijn. Het is dan uiteraard slechts een kwestie van notatie om (a,b) uit te drukken als $a+bi$ of omgekeerd.

Enkele jaren later, in 1843, ontdekte[4] Hamilton een gelijksoortige vermenigvuldiging op quadrupels (voor tripels lukte dit



niet, tot zijn grote frustratie) met dezelfde mooie algebraïsche eigenschappen als bij de reële en complexe getallen, met dit verschil dat de vermenigvuldiging nu niet meer commutatief is (de uitkomst hangt hier nu wel af van de volgorde van de factoren). Deze nieuwe getallen worden *quaternionen* genoemd, en de verzameling wordt aangeduid met de letter $\mathbb{H}$ ter ere van Hamilton. De quaternionen bestaan net als complexe getallen uit een reëel deel, maar deze keer bevatten ze drie soorten imaginaire delen:

$$q = a + bi + cj + dk.$$

De imaginaire eenheden i, j en k voldoen hierbij aan de relaties

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Verder geldt nog dat

$$ij = k = -ji,\ jk = i = -kj \text{ en } ki = j = -ik.$$

Zoals de vermenigvuldiging van complexe getallen een handig rekenmiddel bleek te zijn voor rotaties in het vlak, is de vermenigvuldiging van quaternionen erg bruikbaar in vele toepassingen om rotaties in 3D voor te stellen. Bijgevolg hebben ze vandaag de dag nog een onmisbare status in computergraphics, controletheorie, signaalverwerking, fysica, moleculaire dynamica, en ga zo maar door.

Het gebruik

Omdat de complexe getallen het bedrijven van vele wetenschappen sterk vereenvoudigen en bovendien een verklaring geven voor sommige fenomenen, hebben ze een bestaansrecht verdiend dat verder gaat dan enkel het dienen als een handige rekentool. Dit zien we duidelijk in de kwantummechanica, waar de elementaire deeltjes zich propageren als een superpositie van complex-waardige waarschijnlijkheden (golffuncties), waarbij de reële modulus overeenkomt met de reële mogelijkheden bij een meting of observatie. Omdat bij mensen de werkelijkheid samenvalt met de voorstelling van de werkelijkheid, zouden we kunnen zeggen dat de complexe getallen 'echt bestaan'.

Maar al bij al worden de complexe getallen toch het meest bemind in het gebied waar ze het eerst opdoken, namelijk de algebra. Ze geven immers een volmaakt en volledig kader voor alle algebraïsche bewerkingen: som, verschil, product, deling, machten en wortels. Enkel door i te introduceren (als een vierkantswortel van -1), kunnen we nu alle vierkantswortels uit negatieve getallen berekenen en ook alle hogere wortels. Ieder getal heeft in het complexe vlak bijvoorbeeld exact vijf vijfdemachtswortels die de hoekpunten vormen van een gelijkzijdige vijfhoek.

Bovendien krijgen we cadeau dat *iedere* veeltermvergelijking oplossingen heeft zodra we complexe getallen toelaten, zelfs als we de complexe getallen zelf als coëfficiënten mogen kiezen, terwijl we enkel de oplossing van $x^2 + 1 = 0$ toegevoegd hebben. Dit is de Hoofdstelling van de Algebra die meestal toegewezen wordt aan Jean le Rond d'Alembert (1717–1783), ook al was zijn bewijs in 1746 onvolledig (het eerste rigoureuze bewijs werd geformuleerd door Argand). Bijvoorbeeld de vergelijking $x^2 - 2x + 2 = 0$ heeft geen reële oplossingen wegens een negatieve discriminant. Maar je kan uitrekenen dat $(1+i)^2 - 2(1+i) + 2 = 0$. Met andere woorden: als we onze reële getallenas verlaten en onze getallen verrijken met een imaginair gedeelte, vinden we wel een oplossing, namelijk $1+i$. De andere oplossing van deze vergelijking wordt gegeven door $1-i$.

Terugkijkend op de meetkundige voorstelling van de vermenigvuldiging van complexe getallen, liet ook Euler zich nog verleiden tot enige vorm van wiskundig geëxperimenteer met een verbluffend mooi resultaat als gevolg. De basis van deze vermenigvuldiging, waarbij de argumenten simpelweg dienen opgeteld te worden, ligt namelijk in de formule van de Moivre, genoemd naar de Franse wiskundige en statisticus Abraham de Moivre (1667–1754):

$$\cos n\theta + i \sin n\theta = (\cos\theta + i \sin\theta)^n.$$

Euler liet zich hierdoor inspireren om de exponentiële functie e^x ook op complexe getallen toe te passen. Hij vond voor een veelvoud ti van i dat

$$e^{it} = \cos t + i \sin t.$$

Het gevolg is bekend: de door vele wiskundigen met superlatieven overgoten formule

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

waarin vijf belangrijke getallen ($e, i, \pi, 0$ en 1) op elegante wijze met elkaar in verband worden gebracht.

In het complexe vlak blijkt een exponentiële functie dus een golvend karakter te vertonen, aangezien ze gelijk is aan een combinatie van sinussen en cosinussen. Omdat deze exponentiële functies standaardoplossingen blijken te zijn voor vele vergelijkingen die systemen beschrijven (mechanische, biologische, ...), verklaart de aanwezigheid van niet-reële nulpunten dat onze (wiskundige voorstelling van de) wereld zich niet enkel exponentieel gedraagt, maar dat ze ook het decor is van talrijke golven en trillingen. In gebieden zoals signaaltheorie of regeltechnieken blijkt het complexe vlak dan ook de geschikte plaats om frequenties te beschrijven en de stabiliteit van processen te begrijpen.

Noten

1 Ars Magna (1545), hoofdstuk XXXVII.

2 Stel je even de kortsluiting voor in het brein van bijvoorbeeld een Middeleeuwse wiskundige, wanneer die oog in oog stond met een negatief getal, terwijl hij getallen altijd beschouwde als een fysische lengte. In Europa werd het rekenen met negatieve getallen pas vanaf de zeventiende eeuw gemeengoed, maar in India werden ze al in de zevende eeuw gebruikt (positieve getallen werden *fortuinen* en negatieve getallen werden *schulden* genoemd), en in China al in de derde eeuw. Maar in onze contreien kwam je tot de zestiende eeuw nooit een vergelijking van de vorm $3x^2 - 2x - 7 = 0$ tegen, maar eerder $3x^2 = 2x + 7$ omdat de coëfficiënten enkel betekenis hadden als lengtes, en dus als positieve getallen.

3 De eigenschap $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ geldt namelijk enkel voor niet-negatieve getallen a en b.

4 Nota bene tijdens een wandeling met zijn vrouw langs het *Royal Canal* in Dublin. Hij kerfde zijn ontdekking neer in een steen langs de *Broom Bridge*, waar elk jaar op 16 oktober, de verjaardag van deze heuglijke gebeurtenis, wiskundigen samenkomen tijdens de *Hamilton Walk* om de geboorte van de moderne algebra te gedenken. In feite ontdekte Gauss de quaternionen reeds in 1819, maar dat werk werd pas in 1900 postuum gepubliceerd waardoor het in eerste instantie onopgemerkt bleef.