Casper Albers
Psychometrie & Statistiek
Rijksuniversiteit Groningen
c.j.albers@rug.nl

Column Casper grijpt een kans

π schatten met behulp van kansrekening

Er zijn weinig getallen zo veel bestudeerd als π. Er zijn veel manieren om π te benaderen, gebaseerd op algebraïsche argumenten. Casper laat zien dat er ook methoden zijn om π door middel van kansrekening te bepalen. Het bestuderen van een getal dat compleet vast ligt door middel van een proces dat uitgaat van onzekerheden, leidt tot interessante analyses.

Er bestaan vele manieren om het getal π te benaderen. In hun boek *π unleashed* geven de Duitse wiskundigen Jörg Arndt en Christoph Hänel [1] ruim tweehonderd pagina's van verschillende afleidingen voor dit getal.

Een bekend voorbeeld is de methode van Gregory en Leibniz:

$$\pi = 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1},$$

oftewel $\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots$. Deze reeks alterneert om de waarde $\frac{\pi}{4}$ heen waarbij de afstand tussen de reeks en $\frac{\pi}{4}$ per stap kleiner wordt. Een andere reeks bestaande uit de breuken van opeenvolgende natuurlijke getallen, is die van Leonhard Euler:

$$\pi^2 = 6\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Deze reeksen worden door wiskundigen gewaardeerd omdat ze zo eenvoudig zijn: door eenvoudige breuken gebaseerd op opeenvolgende (oneven) natuurlijke getallen op te tellen, wordt π verkregen.

De Indiase wiskundige Srinivasa Ramanujan heeft tientallen verschillende formules voor π gegeven, waaronder

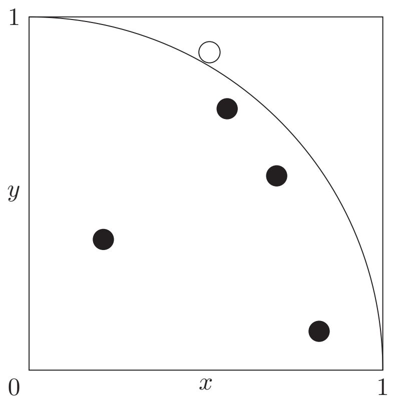
$$\pi^{-1} = \frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k)!(1103+26390k)}{(k!)^4 396^{4k}}.$$

Deze formule wordt juist mooi gevonden niet vanwege haar eenvoud maar vanwege haar complexiteit. Er zit behoorlijk ingewikkelde wiskunde achter deze afleiding. Bij al dit soort reeksen krijg je een benadering van π door een bepaalde, eindige, keuze voor k te maken en de som uit te rekenen. Het is deterministisch vastgelegd wat eruit komt en hoe de convergentie verloopt als $k \to \infty$.

Er zijn echter ook methoden om π te benaderen die van het toeval afhangen. Een elementaire aanpak is als volgt. Trek getallen x_i, y_i, $i = 1, \ldots, n$ uit de uniforme verdeling op $[0,1]$ (de uniforme verdeling houdt in dan elk getal tussen 0 en 1 even waarschijnlijk is om gekozen te worden). Coördinaat (x_i, y_i) is dus op een willekeurige locatie in het eenheidsvierkant. Bereken vervolgens welke proportie van deze coördinaten binnen de eenheidscirkel valt, oftewel $x_i^2 + y_i^2 \leq 1$. Deze cirkel heeft straal $r = 1$ en dus oppervlakte $\pi r^2 = \pi$ en een kwart hiervan valt binnen het vierkant (zie Figuur 1). Je kan dus n van zulke coördinaten trekken, en de proportie $\hat{p}$ binnen de cirkel berekenen. Het aantal successen heeft een binomiale verdeling met parameters n en $p = \frac{\pi}{4}$. Dit impliceert voor $4\hat{p}$ een verwachtingswaarde π en standaardfout $\pi(4-\pi)/n$. Stel, je doet dit duizend keer en vindt 785 punten binnen de cirkel. De puntschatting voor π is dan $\hat{\pi} = 4 \times \frac{785}{1000} = 3{,}140$, en het 95% betrouwbaarheidsinterval wordt gegeven door

$$\hat{\pi} \pm 1{,}96\sqrt{\frac{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})}{1000}} \to (3{,}04; 3{,}24).$$

De methode werkt, in de zin dat π inderdaad 95% van de keren omvat wordt door het interval, maar het schiet natuurlijk niet erg op. Om het interval een factor 10 smaller te krijgen, zou je een factor 100 meer metingen moeten doen. Dan is het uitwerken van de Gregory–Leibniz-formule voor bijvoorbeeld de eerste 100 termen een stuk minder werk. Toch is het mooi om te zien hoe iets als π,



Figuur 1 Eenvoudige manier om via toeval π te schatten. Vijf willekeurige coördinaten zijn getrokken, waarvan vier binnen de cirkel. Dit leidt tot een schatting $\hat{\pi} = 4 \times \frac{4}{5} = 3{,}2$.

wat tot oneindig veel decimalen vast staat, benaderd kan worden met een proces dat door het toeval gedreven wordt.

Een interessantere manier om met behulp van kansrekening π te benaderen, is te ontlenen aan de achttiende-eeuwse Franse graaf van Buffon, die het volgende gedachte-experiment opstelde [2]. (NB: de vraag kwam niet voort uit de wens om π probabilistisch te benaderen, maar dit is er dus wel mee mogelijk.) Zijn experiment kwam op het volgende neer:

Stel we hebben een houten vloer gemaakt van een aantal planken. Elke plank heeft breedte t en alle planken zijn keurig parallel aan elkaar gelegd. Op willekeurige plek op deze vloer, en in willekeurige richting, laten we een naald, stokje of luciferhoutje, van lengte l vallen. Wat is de kans dat deze op twee planken tegelijk ligt?

Als we aannemen dat $l < t$, dan is de oplossing als volgt. Noem de afstand van het midden van de naald tot de dichtstbijzijnde lijn tussen twee planken x, en noem de hoek die de naald maakt met de lijn naar die plank θ, zoals te zien in Figuur 2. Omdat alles compleet willekeurig is, is de waarde van x uniform verdeeld op $(0, \frac{t}{2})$ en de waarde van θ uniform op $(0, \frac{\pi}{2})$ (we kunnen er voor kiezen om de kleinste hoek tussen de stippellijn en doorgetrokken lijn in Figuur 2 θ te noemen). Omdat x en θ niet van elkaar afhangen, is de gezamenlijke dichtheid daarmee

$$f(x,\theta) = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi t}, & 0 \le x \le \dfrac{t}{2}, 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{anders.} \end{cases}$$

De naald gaat de lijn over als $\cos\theta \times \frac{l}{2} > x$. De kans hierop wordt gevonden door het uitwerken van de dubbele integraal

$$\mathrm{P}(\text{naald gaat over lijn}) = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{x=0}^{(l/2)\cos\theta} \frac{4}{\pi t} \mathrm{d}x \mathrm{d}\theta.$$

De integrand $\frac{4}{\pi t}$ hangt niet van x en ook niet van θ af en zodoende is de integraal in twee stappen uit te werken:

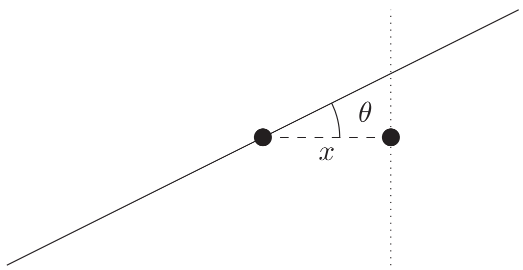
$$\int_{x=0}^{(l/2)\cos\theta} \frac{4}{\pi t} \mathrm{d}x = \frac{4x}{\pi t}\Big|_0^{(l/2)\cos\theta} = \frac{2l}{\pi t}\cos\theta.$$

Vervolgens is de integraal uit te werken:

$$\mathrm{P} = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \frac{2l}{\pi t}\cos\theta \mathrm{d}\theta = \frac{2l}{\pi t}\sin\theta\Big|_0^{\pi/2} = \frac{2l}{\pi t}.$$

Stel we gooien n naalden, waarvan er m over een lijn gaan, dan kunnen we dus π schatten via

$$\hat{\pi} = \frac{2ln}{tm}.$$



Figuur 2 Visualisatie van Buffons idee. Het gestippelde verticale lijnstuk is de scheiding tussen twee planken, het doorgetrokken diagonale lijnstuk is de naald.

Figuur 3 Uitvoering van het experiment.

Analoog aan de methode van Figuur 1 kan een betrouwbaarheidsinterval worden opgesteld om de nauwkeurigheid van de schatting aan te geven.

In Figuur 3 zien we een poging van mij om π te schatten. Op een stuk papier heb ik lijnen op afstand $t = 66$ mm geprint, vervolgens heb ik een aantal cocktailprikkers van lengte $l = 62$ mm op het papier laten vallen. Een paar prikkers vielen buiten het A4'tje, maar $n = 14$ vielen er binnen, hiervan kruisten $m = 7$ een lijn. Mijn schatting van π is daarmee

$$\hat{\pi} = \frac{2 \cdot 6{,}2 \cdot 14}{6{,}6 \cdot 7} = 3{,}76.$$

Dit klinkt behoorlijk te hoog, maar het zit met 7 kruisingen maar 1 kruising boven de 'beste' schatter: bij $m = 6$ zouden we $\hat{\pi} = 3{,}29$ hebben, bij $m < 6$ zou $\hat{\pi} < 3$ zijn. Met slechts 14 worpen, en deze waarden van l en t, is het simpelweg onmogelijk om een schatting $3{,}1 < \hat{\pi} < 3{,}2$ te krijgen. Het is een wat omslachtige manier om aan een schatting voor π te komen, je moet aardig wat naalden of tandenstokers gooien voordat je nauwkeuriger bent dan $\frac{22}{7}$, maar het is wel een keer wat anders.

Er zitten echter nog wel wat haken en ogen aan het uitvoeren van dit gedachte-experiment. Het is nagenoeg onmogelijk om de prikkers zó te gooien dat ze inderdaad uniform verdeeld zijn, zowel qua de valrichting (een hoek tussen 0 en 2π) als de locatie van het middenpunt van de prikkers (een willekeurig punt op het papier). Ik heb het meermalen geprobeerd. Maar de stokjes vallen over elkaar heen of zijn in groepjes geclusterd, als ze niet al gewoon met z'n allen van het papier afrollen. Daarnaast is het natuurlijk onmogelijk om zo π op veel decimalen nauwkeurig te schatten, aangezien het niet te doen is om de lengtes t en l met oneindige precisie te meten.

De graaf van Buffon had het over een gedachte-experiment. Wellicht had het dat moeten blijven, want ten uitvoer brengen in de praktijk levert onoverkomelijke problemen op. Ik onthoud gewoon dat $\pi \approx 3{,}1415$, en dat is voor nagenoeg alle keren dat ik π nodig heb nauwkeurig genoeg.

Referenties

1 J. Arndt en C. Hänel, *π unleashed*, Springer, 2000

2 G. Buffon, *Essai d'arithmétique morale. Histoire naturelle, générale et particulière,* Supplément 4 (1777), 46–123.