

Wim Caspers

Lyceum Ypenburg, Den Haag, en
 Faculteit EWI en Lerarenopleiding, TU Delft
 w.t.m.caspers@tudelft.nl

Onderwijs Bespreking examens vwo wiskunde B en C 2019

Als het niet lukt, is het niet erg

Wiskunde C is het wiskundevak op het vwo dat gekozen kan worden door leerlingen in het profiel Cultuur en Maatschappij (kort door de bocht samengevat: het minst technische/exacte profiel). Het kent eigen domeinen als Logisch Redeneren en Vorm en Ruimte, maar heeft ook onderwerpen uit de domeinen Verbanden, Veranderingen en Statistiek en Kansrekening met wiskunde A gemeenschappelijk. Wiskunde B is de wiskunde die hoort bij het profiel Natuur en Techniek (het meer technische/exacte profiel). In zekere zin bevinden de twee vakken zich dus aan de uitersten van het spectrum aan wiskundevakken op het vwo (natuurlijk is er ook nog wiskunde D als profielkeuzevak binnen Natuur en Techniek, maar dat vak kent geen centraal examen). Wim Caspers belicht de centrale examens van beide vakken en duidt hierbij hun verschillen en overeenkomsten.

Het vwo in Nederland heeft afgelopen zomer weer een nieuwe lichtung studenten afgeleverd. De tweede lichtung van leerlingen die examens deden volgens de vernieuwde wiskundeprogramma's. Meteen na het centraal examen verscheen op internet een plaatje waarmee iemand een verschil tussen wiskunde B en wiskunde C onder de aandacht wilde brengen [1] – zie Figuur 1. Te zien zijn de enigszins abstract ogende opgave 12 uit het wiskunde B-examen en het wat meer toepassingsgerichte vraagstuk 6 waarin de wiskunde C-kandidaten uitgenodigd werden een vlakverdeling in te kleuren. De maker van het plaatje voegde bij de wiskunde C-opdracht zelf de teksten "Zet hem op!" en "En vergeet niet: als het niet lukt is het niet erg, meedoen is het belangrijkste!" toe en ook de vrolijke krijtjes en enthousiaste kinderen. Misschien ter geruststelling: de meme doet geen recht aan het examen wiskunde C, alleen al omdat 20 tot 25 procent van het examen overeenkomt met het wiskunde A-examen.

Vwo wiskunde C

De kleurplaat was onderdeel van de eerste opgave van het examen, getiteld 'Mondriaan'. Een kunstenaar wil, volgens het

gelijke kleuringen M wordt vooraf gegeven door de formule

$$M = 3^V$$

waarbij V het aantal vakken is. Dat de formule niet afgeleid hoeft te worden is waarschijnlijk ingegeven door het schrappen van het domein 'Tellen' uit de centraal-examenstof vorig jaar en dit jaar. De kunstenaar wil graag minimaal vijf miljoen mogelijkheden hebben; waarom wordt overigens niet duidelijk. De eerste vraag is hoeveel vlakken daarvoor nodig zijn. Kandidaten mogen de vergelijking

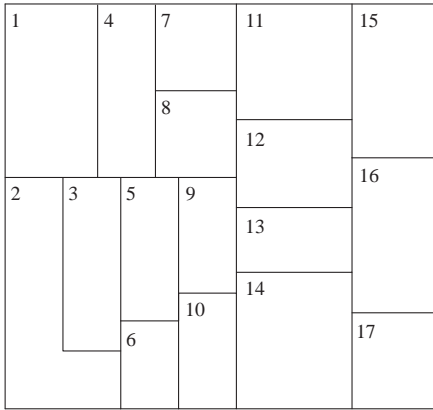
$$3^V = 5 \cdot 10^6$$

grafisch met een rekenmachine oplossen, wat sommige kandidaten er niet van weer-

verhaal in deze opgave, in navolging van Mondriaan een schilderij bestaand uit vlakken kleuren met de kleuren rood, blauw en wit. (Dat is handig omdat in het basispakket hulpmiddelen dat kandidaten meenemen naar het examen een blauw en een rood kleurpotlood zitten.) Het aantal mo-



Figuur 1 Vergelijking examens wiskunde B en wiskunde C [1].



Figuur 2 Vlakvulling uit vraag 3 tot en met 6.

houdt om toch netjes een logaritme met grondtal 3 aan te roepen. De tweede vraag was om te onderzoeken of voor een verdubbeling van het aantal kleuringen een verdubbeling van het aantal vlakken nodig is. Een getallenvoorbeeld met bijvoorbeeld $V=3$ respectievelijk $V=6$ (of eigenlijk $V=5$ of mogelijk zelfs een nog kleinere waarde) is voldoende om duidelijk te maken dat een verdubbeling van V niet nodig is.

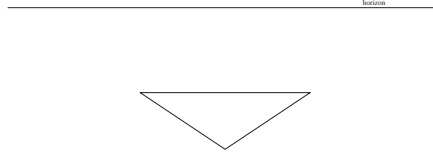
Dan wordt de werkelijke reden voor het opnemen van deze opgave in het examen duidelijk: het domein Logisch Redeneren wordt getoetst. De kunstenaar kiest een vlakverdeling (Figuur 2) en besluit, anders dan Mondriaan, dat aan elkaar grenzende vlakken niet eenzelfde kleur mogen krijgen.

Er wordt een notatie geïntroduceerd. W_5 betekent bijvoorbeeld dat vlak nummer 5 wit wordt gekleurd. De kunstenaar zegt: "Vlak nummer 1 is rood, dus vlak nummer 4 is blauw of wit." De kandidaten wordt gevraagd die mededeling te "vertalen in logische symbolen", gebruikmakend van de afgesproken notatie. In de vraag erna is besloten dat vlak 4 wit wordt en dienen vier redeneerstappen die daaruit volgen (zie Figuur 3) te worden gegeven in gewone zinnen.

En dan volgt de opdracht om gebruikmakend van de afgesproken notatie en logische symbolen een redenering te geven, bestaande uit een aantal redeneerstappen,

- $(R_1 \wedge W_4) \Rightarrow B_3$
- $B_3 \Rightarrow (\neg B_5 \wedge \neg B_2)$
- $(R_1 \wedge \neg B_2) \Rightarrow W_2$
- $(W_2 \wedge B_3) \Rightarrow R_6$

Figuur 3 Redeneerstappen uit vraag 4.



Figuur 4 Bijlage bij opgave 22.

waaruit blijkt dat kleuren van vlak nummer 5 problemen op gaat leveren. De hele opgave graaft dus iets dieper dan men in eerste instantie zou denken.

Om het bovengenoemde probleem op te lossen wordt een nieuwe kleur geïntroduceerd: vlak 5 krijgt de kleur geel. De gewraakte vraag 6 waar de kleurplaat verder ingekleurd moet worden met blauw, wit en rood vormt het sluitstuk, ook tot verbazing van sommige kandidaten. Velen zullen het als een zegen ervaren hebben dat met deze redelijk overzichtelijke openingsvragen het domein Logisch Redeneren werd afgedekt. Landelijk werd 84% van de punten voor de eerste zes vragen gescoord. Veel slechter werd er gescoord op de vragen uit het domein Vorm en Ruimte. Vooral het tekenen van een regelmatige zeshoek in een gegeven gelijkzijdige driehoek in tweepuntsperspectief (Figuur 4) leverde problemen op (30% van de punten landelijk behaald).

Vwo wiskunde B

In de internetmeme werd de kleuropgave uit het wiskunde C-examen vergeleken met vraag 12 uit het wiskunde B-examen. Die vraag was onderdeel van de opgave 'Gebroken goniometrische functie' (Figuur 5); inderdaad een van de lastigere opgaven uit het examen. Vraag 10 bijvoorbeeld doet een behoorlijk beroep op algebraïsche vaardigheden, door te vragen naar het oplossen van een gebroken vergelijking met goniometrie en kwaadaardige wortels erin:

$$\frac{\cos(x)}{-\sin^2(x)} = \sqrt{2}.$$

De grafische rekenmachine mag niet aangewend worden, want de vergelijking moet exact opgelost worden. Dan volgt een onderzoek naar het bestaan van perforaties van de grafiek van de functie f_p met

$$f_p(x) = \frac{\cos(x)}{p - \sin^2(x)}.$$

Ondankbaar werk, want voor geen enkele waarde van p blijken ze er te zijn. De grafiek van de voor de hand liggende kandidaat f_1 blijkt een verticale asymptoot op de bedoelde plek van de perforatie te her-

bergen. Veel kandidaten zullen daar niet op bedacht geweest zijn. Vraag 12 valt dan nog wel mee. Van de punten P , Q en R op de grafiek van f_p wordt de x -coördinaat gegeven en vervolgens wordt gevraagd exact de waarden van p te berekenen waarvoor $PQ \perp QR$. Wanneer deze vraag bij leerlingen de associatie "product richtingscoëfficiënten gelijk aan -1 " of "inproduct gelijk aan 0 " oproept, is de oplossing niet ver weg.

Het examen bleek achteraf de nogal hoge N-term 1,8 toegekend te krijgen; het cijfer dat de kandidaten krijgen is dan 0,8 hoger dan de standaardnormering.

Die hoge N-term kan ook mede tot stand zijn gekomen vanwege de betrekkelijk lastige vragen in de opgave 'Een logaritmische functie en haar afgeleide'. Om te beginnen worden de functies f en g gegeven door

$$f(x) = x \ln(x) - x + 1$$

en

$$g(x) = f'(x)$$

om vervolgens te vragen naar de x -coördinaten van snijpunten van de grafieken van f en g (niet een erg interessante vraag). Het leidt tot de op te lossen vergelijking

$$x \ln(x) - x + 1 = \ln(x)$$

waar toch enige handigheid voor vereist is. Waarom er niet gewoon gevraagd wordt om op te lossen

$$f(x) = f'(x)$$

en in plaats daarvan g op zo'n vreemde manier geïntroduceerd wordt, blijkt uit de volgende vraag waar gevraagd wordt een waarde voor p te vinden zodanig dat

$$\int_p^{2p} g(x) dx = 0.$$

Dat leidt dan weer tot de vergelijking

$$2p \ln(2p) - p \ln(p) - p = 0,$$

ook geen alledaagse verschijning. Vermelenswaardig is dat $F(x) = x \ln(x) - x$ niet meer als primitieve van $f(x) = \ln(x)$ tot het examenprogramma behoort. Is deze opgave misschien een aangepaste versie van een ouder ontwerp?

Een vraag die een uitdaging opleverde voor de examinatoren vanwege het grote aantal oplossingsmethoden is vraag 14. Gegeven lijn k door de punten $A(0,10)$ en $B(40,0)$ en lijn m als baan van een punt P

Gebroken goniometrische functie

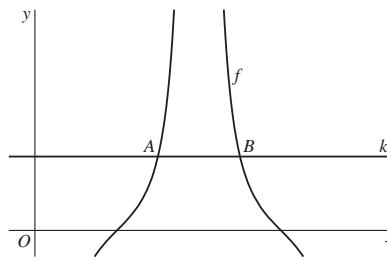
De functie f is gegeven door:

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{-\sin^2(x)}$$

Lijn k is de lijn met vergelijking $y = \sqrt{2}$.

Lijn k en de grafiek van f hebben oneindig veel snijpunten. De punten A en B zijn de twee snijpunten met de kleinste positieve x -coördinaten. Deze zijn in figuur 1 aangegeven.

figuur 1



6p 10 Bereken exact de x -coördinaten van A en B .

Voor elke waarde van p is de functie f_p gegeven door:

$$f_p(x) = \frac{\cos(x)}{p - \sin^2(x)}$$

6p 11 Onderzoek of er waarden van p zijn waarvoor de grafiek van f_p perforaties heeft.

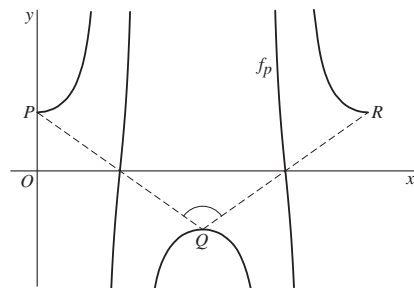
In de rest van de opgave beperken we ons tot waarden van p waarvoor geldt: $p \neq 0$

De punten op de grafiek van f_p met x -coördinaten 0 , π en 2π noemen we respectievelijk P , Q en R .

In figuur 2 is voor een waarde van p de grafiek van f_p weergegeven.

Ook zijn de lijnstukken PQ en QR weergegeven.

figuur 2



Er zijn waarden van p waarvoor PQ en QR loodrecht op elkaar staan.

4p 12 Bereken exact deze waarden van p .

Figuur 5 Opgave 'Gebroken goniometrische functie'.

met bewegingsvergelijkingen

$$\begin{cases} x = 18 + 5t, \\ y = 30 - 3t, \end{cases}$$

wordt gevraagd naar een positie van P zodat driehoek ABP (zie Figuur 6) gelijkbenig en rechthoekig is.

Het is een opgave die volop ruimte biedt om een eigen manier van oplossen te vinden. Van die ruimte is goed gebruik gemaakt door de kandidaten.

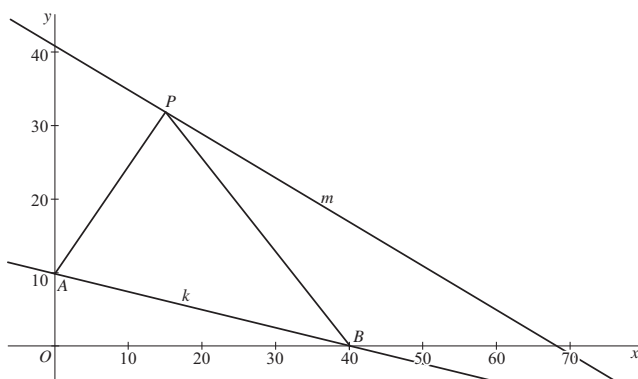
Conclusie

Uit de hier beschreven opgaven blijkt in ieder geval dat wiskunde C en B andere doelgroepen bedienen en op een andere manier voorbereiden op vervolgopleidingen. Het moge duidelijk zijn dat wiskunde B-leerlingen wiskundig handiger zijn dan C-leerlingen. De manier waarop wiskunde gedaan wordt verschilt overigens niet per se in enthousiasme, creativiteit of inventiviteit. Wiskunde C-leerlingen deden wel allemaal examen in een kunstvak en zullen bij de eerste opgave in hun wiskunde-examen meewarig het hoofd geschud hebben. Over Mondriaan wordt in de opgave namelijk gemeld dat zijn latere schilderijen bestaan uit zwarte lijnen en rode, gele, blauwe en witte vlakken, maar in die werken spelen zwarte en grijze vlakken ook bijna altijd een rol. En laten we ook een anonieme C-leerling prijzen die om eens rustig na te denken het examen voorzorg van illustraties (Figuur 7). Kom daar maar eens om, bij wiskunde B. ☺

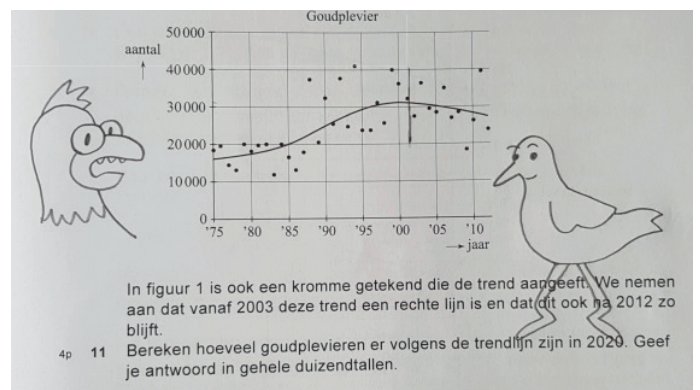
Alle opgaven van de examens wiskunde voor havo en vwo, eerste en tweede tijdvak zijn te vinden via de website Examenblad.nl.

Referentie

- 1 Gebruiker @Schoolstress2019 op Instagram, <https://www.instagram.com/p/BxsnsLLibPb>, 20 mei 2019.



Figuur 6 Figuur bij opgave 14.



Figuur 7 Illustratie bij opgave 11 wiskunde C.