Raf Bocklandt
Korteweg-de Vries Instituut
Universiteit van Amsterdam
raf.bocklandt@gmail.com

Evenement Abelprijs, Wolfprijs en Fieldsmedaille

Eén programma, zovele prijzen

Zoals elk jaar van de vorm $4k+2$, was 2018 een topjaar voor wiskundige prijzen. Naast de Abelprijs en de Wolfprijs die jaarlijks door de Noorse koning en de Israëlische president worden overhandigd in Oslo en Jeruzalem, werden op het internationaal congres voor wiskundigen in Rio de Janeiro deze zomer ook vier Fieldsmedailles uitgereikt.

Hoewel de opzet van de prijzen heel verschillend is — de Abel- en Wolfprijs bekronen meestal oudere wiskundigen die kunnen terugblikken op een rijk gevulde carrière, terwijl de Fieldsmedailles gereserveerd zijn voor opkomende talenten onder de 40 jaar — is er toch een verrassende eenheid van onderwerpen. Zowel de Abelprijs (voor Robert Langlands) en de Wolfprijs (Vladimir Drinfeld en Alexander Beilinson), als twee van de vier Fieldsmedailles (Peter Scholze en Akshay Venkatesh) passen in een onderzoeksprogramma dat een groot deel van het wiskundeonderzoek in de afgelopen halve eeuw heeft kleur gegeven: het Langlands-programma.

Wanneer je kijkt naar de functie

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

is het niet zo eenvoudig om in te zien dat deze functie een verborgen symmetrie heeft: $f(x+2\pi i) = f(x)$. De exponentiële functie is echter geen uitzondering: heel vaak hebben functies die op een natuurlijke wijze als reeks gedefinieerd kunnen worden wonderbaarlijke eigenschappen als we ze beschouwen als functies in een complexe variabele.

Taylorreeksen zijn trouwens niet de enige reeksen waarmee je dit spelletje kan doen, er zijn ook Fourierreeksen

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{2\pi i k z}$$

en (misschien iets minder bekend) Dirichletreeksen

$$L(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k^s}.$$

De vermaardste van deze laatste soort is de Riemann ζ-functie (neem alle $a_k = 1$) maar ook andere L-functies zijn van groot belang in de getaltheorie. Dirichlet zelf introduceerde deze functies om aan te tonen dat er oneindig veel priemgetallen zijn van de vorm $a + b\mathbb{Z}$ voor elk paar onderling ondeelbare gehele getallen (a,b).

Bij al deze reeksen leveren speciale keuzes van coëfficiënten mooie wiskundige eigenschappen op, maar wat wiskundigen mooi vinden hangt vaak af van hun interesse. Een meetkundige houdt van invariantie onder symmetriegroepen, terwijl een analist misschien de voorkeur geeft aan analytische continueerbaarheid of bijzondere functionaalvergelijkingen. Het wonderlijke is echter dat dezelfde coëfficiënten vaak voor elk wat wils kunnen opleveren mits je ze op verschillende manieren gebruikt. Erich Hecke toonde namelijk aan dat als je de Fouriercoëfficiënten van een functie met een mooie symmetrie (bijvoorbeeld een θ-functie) invoert in de machinerie van Dirichlet, je een functie krijgt met mooie analytische eigenschappen (bijvoorbeeld een ζ-functie) en bovendien gebruikte hij Dirichlets ideeën uit de getaltheorie om een hele rist van zulke coëfficiëntenreeksen te genereren.

Zoals vaak in de wiskunde was dit prachtige resultaat geen eindpunt maar een beginpunt. Na Hecke werkten Emil Artin en André Weil aan veralgemeningen in verscheidene richtingen en rond de jaren zestig ontstond er een gevoel dat dit alles slechts het topje was van een enorme ijsberg van verbanden tussen getaltheorie, meetkunde en analyse. In zijn artikel over Robert Langlands neemt Bas Edixhoven ons mee langs de hoofdingrediënten in dit verhaal en schetst hij de context die Robert Langlands ertoe bracht hierover een heel onderzoeksprogramma met verregaande vermoedens en diepe verbanden te formuleren.

In de vijftig jaar die volgden stond de wiskunde niet stil en nieuwe generaties gebruikten het Langlands-programma als leidraad voor hun wetenschappelijk onderzoek. Zijn ideeën werden uitgebreid en overgezet naar andere vakgebieden. De bekendste spin-off is de meetkundige Langlands-correspondentie, die de setting verplaatst van getaltheorie naar algebraische meetkunde, representatietheorie en theoretische natuurkunde. In het artikel 'Een kleine suggestie met grote gevolgen' kan je lezen welke rol Beilinson en Drinfeld speelden in het ontstaan van deze nieuwe invalshoek.

Een overzicht van alle resultaten die uit het Langlands-programma volgden, leest als een bloemlezing van topwiskundigen van de voorbije halve eeuw. Zo is Andrew Wiles' bewijs van de laatste stelling van Fermat te zien als een voorbeeld van Langlands reciprociteitsvermoeden. Laurent Lafforgue won de Fieldsmedaille in 2002 voor zijn beroemde stelling die Langlands vermoedens bevestigde voor GL_n voor functielichamen in karakteristiek p. In 2010 won Ngô Bao Châu dezelfde prijs voor zijn bewijs van het fundamentaallemma, dat een hoeksteen is het Langlands-programma. Het locale Langlands-vermoeden voor GL_n in karakteristiek 0 werd maar liefst drie keer bewezen. In 2000 door Henniart, in 2001 door Harris en Taylor, en ten slotte door Peter Scholze, die in 2013 een belangrijke klip uit de voorgaande bewijzen op een totaal andere manier wist te omzeilen.

Op het moment van publicatie was Scholze pas 25 jaar, maar na dit belangrijke werk bleef hij niet bij de pakken zitten en transformeerde eigenhandig zijn vakgebied in de getaltheorie door de introductie van een totaal nieuw soort ruimtes: *perfectoid spaces*. In het derde artikel van onze Langlands-special vertelt Ben Moonen over de wiskunde achter deze bijzondere objecten en de nu al impressionante carrière van dit jonge genie, waarvan we nog veel zullen horen.