K. P. Hart
Faculteit EWI
TU Delft
k.p.hart@tudelft.nl

Boekbespreking Grzegorz Tomkowicz en Stan Wagon: The Banach–Tarski Paradox

De kwadratuur van de cirkel en de Banach-Tarskiparadox

De kwadratuur van de cirkel is een veelgebruikte metafoor voor iets dat onmogelijk is. Maar is dat terecht? De stelling van Banach–Tarski over decomposities van bollen is alom bekend als de Banach-Tarskiparadox. Het kwadratuurprobleem en de stelling nemen een belangrijke plaats in in het boek *The Banach–Tarski Paradox* van Tomkowicz en Wagon, dat hier besproken wordt door K. P. Hart.

Ik heb ooit een cartoon gehad waarop een passer tegen een muur of lantaarnpaal geleund staat te dromen; in het droomwolkje zien we een vierkant. Ik ben hem helaas kwijtgeraakt. Hij deed natuurlijk denken aan de bekende onmogelijkheid een vierkant met oppervlakte π te construeren met behulp van slechts een passer en een liniaal.

In de eerste helft van de vorige eeuw bewezen Stefan Banach en Alfred Tarski [2] een stelling die bekend geworden is als de Banach-Tarskiparadox: het is mogelijk de massieve eenheidsbol in de driedimensionale ruimte in eindig veel verzamelingen te verdelen en deze eindig veel verzamelingen na wat transleren en roteren samen te voegen tot twee kopieën van diezelfde massieve eenheidsbol. U kunt hier zelf een cartoon bij bedenken; ik denk aan een plaatje waarop Banach en Tarski helpen bij de wonderbaarlijke vermenigvuldiging van het brood en de vissen. In het hier te bespreken boek *The Banach–Tarski Paradox* van Tomkowicz en Wagon [9] staat het volgende 'epigram':

> *Delians:* How can we be rid of the plague?
> *Delphic Oracle:* Construct a cubic altar having double the size of the existing one.
> *Banach en Tarski:* Can we use the Axiom of Choice?

Wat hebben de kwadratuur van de cirkel en de Banach-Tarskiparadox met elkaar te maken? Ze komen allebei voor in het voornoemde boek en hoe dat zo komt zullen we in de rest van dit artikel zien.

Het boek is de tweede editie van het boek met dezelfde naam van Wagon [10], en veel van wat hier besproken wordt is tussen die twee edities bewezen (en één resultaat is zelfs van na de tweede editie).

Euclides en Archimedes

We kunnen natuurlijk niet om de oorsprong van het cirkelprobleem heen.

Wie *De Elementen* van Euclides leest, vindt daarin, onder veel meer, constructies van:

1. een vierkant met dezelfde oppervlakte als een gegeven rechthoek;
2. een rechthoek met dezelfde oppervlakte als een gegeven parallellogram;
3. een parallellogram met dezelfde oppervlakte als een gegeven driehoek.

Hier zien we de oorsprong van het woord 'kwadratuur': we achten de oppervlakte van een figuur bepaald als we een vierkant hebben geconstrueerd/bepaald dat even groot is als de figuur. Aantonen dat twee figuren even groot zijn gebeurt bij Euclides en anderen door de ene in een (eindig) aantal stukken te verdelen en de stukken van deze legpuzzel zo aan elkaar te leggen dat de tweede figuur ontstaat.

De manier van verdelen is bij Euclides gebonden aan regels die voortvloeien uit zijn postulaten: door twee gegeven punten kunnen we een lijn trekken, en als twee punten gegeven zijn dan kunnen we de cirkel tekenen door het ene punt en met het andere als middelpunt. Nieuwe punten verkrijgen we door deze lijnen en cirkels te snijden.

Wat in *De Elementen* ontbreekt is een constructie van, gegeven twee punten A en B, een vierkant met dezelfde oppervlakte als de cirkel om A die door B gaat.

Iemand die wel iets over die oppervlakte kon zeggen was Archimedes. Die *bewees* dat de oppervlakte van een cirkelschijf, met straal r, gelijk is aan die van een driehoek met hoogte gelijk aan de straal en basis gelijk aan de omtrek van die cirkel. Aangezien de omtrek van de cirkel gelijk is aan $2\pi r$ is de oppervlakte van de schijf dus gelijk aan $\frac{1}{2}\cdot 2\pi r\cdot r$ en dat is gelijk aan het welbekende πr^2. Archimedes had deze notaties nog niet tot zijn beschikking; hij moest het bij de bovengegeven formulering houden.

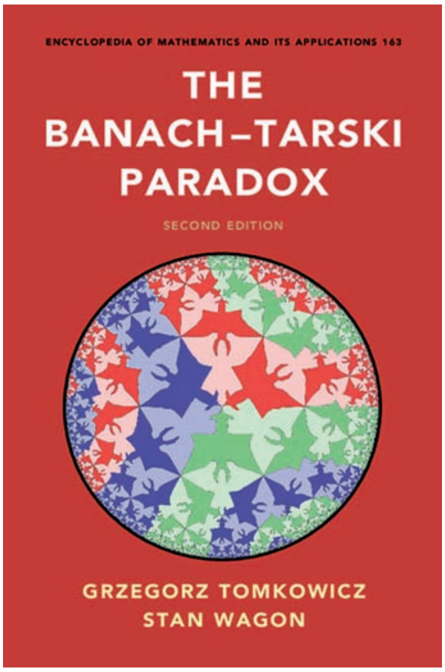
Archimedes liet ook zien dat, in moderne termen, π tussen de twee rationale getallen $3\frac{10}{71}$ en $3\frac{1}{7}$ ligt. De bewijzen zijn te vinden in 'Measurement of a Circle' in [1] (of online via de Wikipedia-pagina met dezelfde naam). Hierbij zij aangetekend dat het bewijs van het even groot zijn van de cirkelschijf en de driehoek niet euclidisch is maar gebruikmaakt van de uitputtingsmethode: de aanname dat de oppervlakten *niet* gelijk zijn leidt, via in- en omgeschreven regelmatige veelhoeken, tot een tegenspraak.

Onmogelijkheid

In de negentiende eeuw werd duidelijk waarom die kwadratuur van de cirkel niet in *De Elementen* gegeven was. Het is namelijk niet mogelijk om deze met inachtneming van alleen de regels van Euclides uit te voeren.

Het waarom van deze onmogelijkheid ligt in de algebra. Nadat we twee punten A en B in het vlak hebben getekend kunnen we een assenstelsel maken en wel zó dat onze punten de coördinaten $(0,0)$ en $(1,0)$ krijgen. De eerste propositie in *De Elementen* laat zien hoe een gelijkzijdige driehoek te construeren met AB als basis (of eigenlijk meteen twee). De snijpunten van de cirkels om A door B en om B door A geven ons dergelijke driehoeken. In termen van coördinaten hebben we nu $(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\sqrt{3})$ en $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\sqrt{3})$ geconstrueerd.

Algebraïsch blijkt dat we werkend volgens de regels van Euclides — met passer



Grzegorz Tomkowicz en Stan Wagon, *The Banach–Tarski Paradox*, 2nd edition, Cambridge University Press, 2016, 360 p., hardcover, ISBN 9781107042599, prijs £ 74.99.

en latje — het volgende kunnen doen: optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen en vierkantswortels trekken. *En dat is alles*. Op deze manier zijn veel getallen, zoals $\sqrt{2}$, $\sqrt{\sqrt{2}}$, $\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{5}}}$,... te construeren, maar *lang niet alle getallen*. De precieze formulering, in termen van graden van lichaamsuitbreidingen, is te vinden in vrijwel elk boek over Galoistheorie. N.B.: we noemen een getal a construeerbaar als het punt met coördinaten $(a,0)$ dat is.

Nu komt de kwadratuur van de cirkel erop neer een vierkant te maken waarvan de oppervlakte gelijk is aan die van de cirkel om A door B. In onze termen: construeer een vierkant met oppervlakte π, of, met Archimedes, een driehoek met hoogte 1 en basis 2π. Zodra dat laatste gedaan is kunnen we de aan het begin beschreven stappen uitvoeren om het vierkant te maken.

Uiteindelijk komt dit dan weer neer op het construeren van π of $\sqrt{\pi}$. In 1882 liet Lindemann zien dat er geen enkele manier is om uitgaande van het getal 1 en met gebruik van optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen, en vierkantswortels het getal π te maken.

Maat

In het begin van de twintigste eeuw rees de behoefte om aan steeds meer deelverzamelingen van de getallenlijn, het vlak, en de ruimte respectievelijk een 'lengte', 'oppervlakte' of 'volume' toe te kennen.

In [5] zette Lebesgue de eerste stappen:

> "Nous nous proposons d'attacher a chaque ensemble borné un nombre positif ou nul que nous appellerons sa mesure et satisfaisant aux conditions suivantes:
>
> 1 Il existe des ensembles dont la mesure n'est pas nulle.
> 2 Deux ensembles égaux ont même mesure.
> 3 La mesure de la somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles, sans points communs, deux à deux, est la somme des mesures de ces ensembles."

Met het woord 'maat' bewaren we enige afstand tot de concrete meetkunde maar voor de reële rechte, het platte vlak, en de ruimte leiden de eisen van Lebesgue voor bekende meetkundige figuren tot respectievelijk hun lengte, oppervlakte en inhoud, op vermenigvuldiging met een constante na. Uit eisen 2 en 3 laat zich namelijk snel bewijzen dat voor elke n de maat van het interval $[0,\frac{1}{n}]$ gelijk is aan de maat van $[0,1]$ gedeeld door n. Door de volle kracht van eis 3 te gebruiken volgt dat voor elk positief reëel getal a de maat van $[0,a]$ gelijk is aan a maal de maat van $[0,1]$. Hieruit volgt dat er een vaste constante α is zó dat voor elk interval de maat gelijk is aan α maal zijn lengte; en α is gewoon gelijk aan de maat van $[0,1]$. Eis 1 impliceert dat $\alpha\neq 0$. Dezelfde redenering gaat op voor het vlak en de ruimte. We kiezen er natuurlijk voor om de maat van het eenheidsinterval, het eenheidsvierkant, en de eenheidskubus op 1 te normaliseren.

Zoals gezegd, voor bekende meetkundige figuren heeft de maat de 'juiste' waarde; voor algemenere verzamelingen is het echter oppassen geblazen.

De Banach-Tarskiparadox

Een extreem voorbeeld werd gegeven door de Polen Banach en Tarski. Voortbouwend op werk van Hausdorff lieten deze zien dat men een massieve bol met straal 1 in eindig veel deelverzamelingen kan verdelen, en dat men daarna die eindig veel stukken in elkaar kan schuiven tot *twee* massieve bollen van straal 1. Wie met het artikel van Banach en Tarski in de hand nu een wonderbaarlijke vermenigvuldiging van één sinaasappel tot twee sinaasappels wil uitvoeren komt bedrogen uit. De bollen zijn ideale wiskundige bollen, geen fysieke sinaasappels. En, en daar was het Banach en Tarski om te doen, de stukken waarin ze de bol verdeelden zijn zo lelijk dat er op geen enkele manier een maat aan toe te kennen is. Immers, als dat wel mogelijk was dan zou $1+1=1$ bewezen zijn.

Hoe de constructies van Hausdorff en van Banach en Tarski in hun werk gaan wordt in het onderhavige boek *The Banach–Tarski Paradox* van Tomkowicz en Wagon uitgebreid beschreven. Banach en Tarski bewezen meer, hun algemene stelling luidt:

Stelling. *Als A en B begrensde deelverzamelingen van $\mathbb{R}^3$ zijn, met niet-leeg inwendige, dan kan men A en B schrijven als respectievelijk $\bigcup_{i=1}^n A_i$ en $\bigcup_{i=1}^n B_i$, waarbij de families paarsgewijs disjunct zijn en waarbij voor elke i de verzamelingen A_i en B_i congruent zijn.*

We noemen A en B congruent als er een isometrie ρ van de ruimte is met $\rho[A]=B$.

The Banach–Tarski Paradox

Het boek vertelt het verhaal van deze stelling op de eerste 36 bladzijden, maar is dan nog lang niet klaar. Er zijn namelijk nog veel meer situaties waar 'paradoxale decomposities' mogelijk zijn.

Tomkowicz en Wagon bekijken de algemene situatie van een groep G die werkt op een verzameling X. We noemen twee deelverzamelingen A en B van X (G-)equidecomposabel als $A=\bigcup_{i=1}^n A_i$ en $B=\bigcup_{i=1}^n B_i$, met beide families paarsgewijs disjunct, en zó dat A_i en B_i telkens (G-)congruent zijn: er is een $g_i \in G$ met $B_i = g_i A_i$. Een deelverzameling E van X noemen we (G-)paradoxaal als deze te schrijven is als de vereniging van twee disjuncte verzamelingen, A en B, beide (G-)equidecomposabel met E zelf.

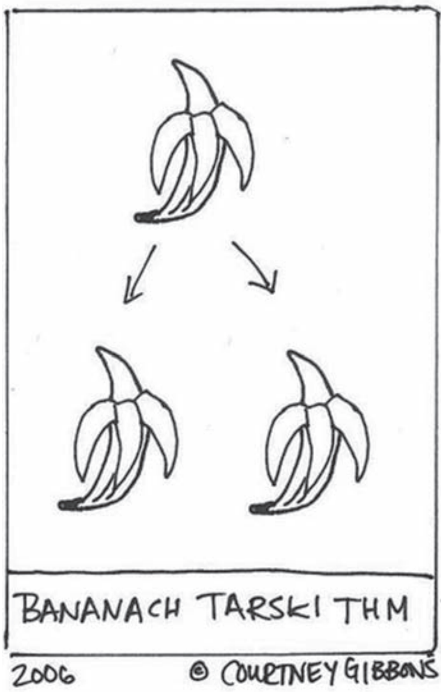
Het bovengenoemde resultaat van Hausdorff kunnen we formuleren als: "De eenheidssfeer S^2 in de ruimte is paradoxaal ten opzichte van de groep van alle rotaties." Het eerste resultaat van Banach en Tarski zegt dat de eenheidsbol in $\mathbb{R}^3$ paradoxaal is ten opzichte van de isometriegroep van $\mathbb{R}^3$.

Bestudering van de bewijzen leert dat alles is terug te voeren tot paradoxale decomposities van het vrije product $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$ van $\mathbb{Z}_2$ en $\mathbb{Z}_3$ en/of de vrije groep van rang 2 die in dit product bevat is. Dat vrije product is een ondergroep van de rotatiegroep van $\mathbb{R}^3$, voortgebracht door twee rotaties: één van orde 2 en één van orde 3; die groep werkt dus op S^2 en door middel van een keuzefunctie voor de verzameling banen onder de werking wordt de decompositie van de groep vertaald naar een decompositie van S^2.

Het boek valt grofweg uiteen in drie delen:

het begin: hierin gaan de schrijvers op zoek naar vele paradoxale decomposities, met als voornaamste wapen de vrije groep op twee generatoren;
het midden: hierin vinden we situaties waarin paradoxale decomposities juist niet mogelijk zijn;
het eind: dit wat kortere stuk bekijkt de rol van het Keuzeaxioma in dit alles.

Wat het laatste betreft: hierboven is het woord 'keuzefunctie' al gevallen en zonder een zekere hoeveelheid keuze krijgen we geen Banach-Tarskiparadox. Er is namelijk een model van de verzamelingenleer (zonder Keuzeaxioma) waarin alle deelverzamelingen van $\mathbb{R}^n$ Lebesgue-meetbaar zijn. En omdat $1+1\neq 1$ absoluut is, zijn in dat model de resultaten van Hausdorff en van Banach en Tarski niet geldig. Aan de andere kant, de volle kracht van het Keuzeaxioma is niet nodig; de titel van [7] zegt het al: de Banach-Tarskiparadox volgt uit de stelling van Hahn–Banach.



Het eerste deel bevat nog een positieve oplossing, uit 2005 [11], van een probleem opgeworpen door onze landgenoot J. H. de Groot: "Kun je de Banach-Tarskiconstructie (voor de bol) zo uitvoeren dat de stukken door middel van continue functies verplaatst kunnen worden, en wel zó dat men op tijdstip 0 één bol heeft en op tijdstip 1 twee bollen en waarbij de stukken de hele tijd disjunct blijven?" Ook noemenswaardig is een hoofdstuk over het hyperbolische vlak; dat laat ook paradoxale decomposities toe en een en ander wordt kleurrijk geïllustreerd met Escher-achtige plaatjes.

Het middelste stuk brengt ons, onder meer, weer terug naar de kwadratuur van de cirkel. In het vlak is geen Banach-Tarskiconstructie met isometrieën mogelijk, er is namelijk een eindig additieve uitbreiding van de Lebesgue-maat die congruente verzamelingen gelijke maat toekent.

Dit bracht Tarski ertoe om in [8] de volgende vraag te stellen: zijn een cirkelschijf en een vierkant, van gelijke oppervlakte, equidecomposabel ten opzichte van de isometriegroep van het vlak? Hier werden verder geen eisen aan de aard van de stukken gesteld.

De kwadratuur van de cirkel

Een eerste antwoord kwam in [3]: met een schaar lukt het niet. Dat wil zeggen, als men het vierkant met behulp van enkelvoudige krommen in eindig veel stukken knipt, en dat mogen heel ingewikkelde krommen zijn, niet eens rectificeerbaar, dan is de resulterende legpuzzel niet uit te leggen tot een cirkelschijf.

Het bewijs voor rectificeerbare krommen is te aardig om hier niet te schetsen. Neem een puzzelstukje P en definieer een functie f_P op zijn rand als volgt. Als x op de rand ligt en er een $\varepsilon > 0$ is zó dat de rand binnen de schijf $N(x,\varepsilon)$ om x met straal ε een stuk van een cirkelboog is, definieer dan $f_P(x)=1$ als $N(x,\varepsilon)\cap P$ convex is en $f_P(x)=-1$ als dat niet zo is. In alle andere gevallen zetten we $f_P(x)=0$ — dit gebeurt zeker als x op de buitenrand van het vierkant ligt.

Integreer nu, voor elk stukje P, de functie f_P over de rand van P, ten opzichte van de booglengte. Als we de resultaten optellen dan vallen alle stukjes integraal in het inwendige tegen elkaar weg; we houden dan de integraal langs de buitenrand van het vierkant over, en die is gelijk aan 0

omdat de functies op die rand alleen de waarden 0 aannemen.

Als we de puzzel zouden uitleggen in een cirkelschijf dan zou de som van de integralen ook gelijk zijn aan de integraal langs de buitenrand, maar die integraal is gelijk aan de lengte van de cirkel. De functies nemen immers op de hele rand de waarde 1 aan, behoudens in een eindig aantal punten.

In 1990 gaf Laczkovich in [4] een positief antwoord op Tarski's vraag: met behulp van alleen translaties zijn een schijf en een vierkant met dezelfde oppervlakte equidecomposabel. Het boek geeft een volledig bewijs van een algemene stelling van Laczkovich: als A en B gelijke oppervlakte hebben en als hun randen niet al te dik zijn (de Minkowski-dimensie is klein) dan zijn A en B equidecomposabel ten opzichte van de groep $\mathbb{R}^2$ zelf (werkend als translatiegroep).

In het voorwoord van het boek werd nog als een van de "outstanding problems left open" aangemerkt of de stelling van Laczkovich zonder gebruik van het Keuzeaxioma bewezen kon worden. Niet lang na het verschijnen van het boek lieten Andrew Marks and Spencer Unger in [6] zien dat dat inderdaad kan: men kan stukken gebruiken die Borel zijn en, zeker in het geval van schijf en vierkant, van zeer lage complexiteit. Het bewijs is een mooie combinatie van beschrijvende verzamelingenleer, grafentheorie, en optimaliseringstechnieken.

Het verloopt grof geschetst als volgt. We nemen aan dat de schijf en het vierkant binnen het eenheidsvierkant V liggen. Een stelling van Laczkovich garandeert dat we vijf vectoren u_1, u_2, u_3, u_4, en u_5 in V kunnen kiezen waarvan de gehele lineaire combinaties genomen modulo 1 de maten van de schijf en het vierkant zeer goed benaderen in de volgende zin. Neem $A \subseteq V$ en bekijk voor elke $N \in \mathbb{N}$ alle vijftallen $(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)$ in $\mathbb{Z}^5$ met $|z_i| \leq N$ voor alle i. We noteren met $d_N(A)$ het quotiënt van het aantal vijftallen waarvoor $\sum_{i=1}^{5} z_i u_i \in A$ en $(2N+1)^5$. De rij getallen $d_N(A)$ convergeert vrij snel naar de Lebesgue-maat van A, *als* de rand van A een kleine Minkowski-dimensie heeft. Het is zelfs zo dat voor elke $x \in V$ de opgeschoven lineaire combinaties, $x + \sum_{i=1} z_i u_i$, ook deze eigenschap hebben en zelfs uniform in x.

Na de keuze van een geschikte N zijn er dan vanuit elke x in de schijf veel lineaire combinaties die in het vierkant zitten, en omgekeerd. Dit leidt tot een tweedelingsgraaf met de schijf links en het vierkant rechts en een tak van x naar y als $y = x + \sum_{i=1} z_i u_i$ (met $|z_i| \leq N$). Een versie van de huwelijksstelling leidt tot een volledige matching tussen schijf en vierkant. Elke lineaire combinatie bepaalt een klasse echtparen en deelverzamelingen van de schijf en het vierkant die door *die* combinatie in elkaar overgevoerd worden.

Om te zorgen dat de volledige matching Borel is gaan Marks en Unger op zoek naar maximale stromen in de graaf bepaald door de werking van $\mathbb{Z}^5$ op V. Er is namelijk een goed ontwikkelde theorie over matchings en maximale stromen in Borelgrafen. De niet-triviale details moet u maar in het artikel lezen.

Referenties

1 Archimedes, *The Works of Archimedes*, edited by T.L. Heath, Dover Publications, 2002. Reprint of the 1897 edition and the 1912 supplement.

2 Stefan Banach en Alfred Tarski, Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes, *Fundamenta Mathematicae* 6 (1924), 244–277.

3 Lester Dubins, Morris W. Hirsch en Jack Karush, Scissor congruence, *Israel Journal of Mathematics* 1 (1963), 239–247.

4 M. Laczkovich, Equidecomposability and discrepancy; a solution of Tarski's circle-squaring problem, *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* 404 (1990), 77–117.

5 H. Lebesgue, Intégrale, longueur, aire, *Annali di Matematica Pura et Applicata (3)* 7 (1902), 231–359.

6 Andrew S. Marks en Spencer T. Unger, Borel circle squaring, *Annals of Mathematics (2)* 186 (2017), 581–605.

7 Janusz Pawlikowski, The Hahn–Banach theorem implies the Banach–Tarski paradox, *Fundamenta Mathematicae* 138 (1991), 21–22.

8 A. Tarski, Problème 38, *Fundamenta Mathematicae* 7 (1925), 381.

9 Grzegorz Tomkowicz en Stan Wagon, *The Banach–Tarski Paradox*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications 163, Cambridge University Press, 2016.

10 Stan Wagon, *The Banach–Tarski Paradox*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications 24, Cambridge University Press, 1985.

11 Trevor M. Wilson, A continuous movement version of the Banach–Tarski paradox: a solution to de Groot's problem, *Journal of Symbolic Logic* 70 (2005), 946–952.