Rob van Oord
Waddinxveen
robvanoord@tiscali.nl

Evenement 24ste Nationale Wiskunde Dagen

En dat is dan $(2+0+1)\times 8=24$!

Op vrijdag 2 februari en zaterdag 3 februari vonden in Noordwijkerhout voor de 24ste keer de Nationale Wiskunde Dagen plaats. Dit jaar was er in het programma speciale aandacht voor het thema vouwen. Een persoonlijke impressie van Rob van Oord.

Met een flippo op de achterkant van de FUNRUN-trofee (het traditionele T-shirt) wordt cryptisch uitgebeeld dat dit jaar de Nationale Wiskunde Dagen voor de vierentwintigste keer gehouden zijn. Met een auto vol spullen en twee collega's van mijn oude school gingen we goedgemutst naar Noordwijkerhout. Deze keer stonden er veel knutsel- en vouwworkshops in het programma met als klapper het optreden van Katie Steckles [1], een jonge Britse wiskundige uit Manchester van wie ook veel op YouTube te vinden is. Ze is iemand die op middelbare scholen lezingen houdt en workshops geeft waarin ze leerlingen enthousiast maakt voor wiskunde. In 2016 kreeg ze de Josh Award voor haar inspanningen waarmee ze wiskunde populair maakt.

Na een schitterende Dûnsje yn Style, Dansen op de Stijl, door twaalf prachtige in zwarte lange jurken geklede dames op en rond Rietveld-krat-krukjes in allerlei kleuren opende Joke Daemen de NWD met het treurige nieuws dat professor Frederik van der Blij op 27 januari is overleden. Ik heb net als Joke ooit college van hem gehad en aan den lijve het zogenoemde Van der Blij-effect gevoeld. Zelfs nog in 2003, op de lerarendag in Groningen, waarop ik zelf mijn eerste workshop voor collega's gaf ("Makkelijker kan ik het niet maken, maar wel leuker"), kreeg ik dat gevoel weer bij zijn lezing over Kletterdriehoeken. Driehoeken waarvan een zwaartelijn, een hoogtelijn en een bissectrice door een punt gaan [2].

Maar laat ik beginnen met de startlezing van de NWD. Hoewel Leila Schneps van huis uit getaltheoreticus is heeft ze bijzondere belangstelling voor wiskunde bij moordprocessen. Zo schrijft ze ook graag thrillers onder het pseudoniem Catherine Shaw. Ik zie al zeven titels op het internet. In een boeiend verhaal liet Leila zien hoe je de fout in kunt gaan door statistische gegevens verkeerd te gebruiken. Ze liet, gekleed in een zwierige India-jurk, zien

Dûnsje yn Style

Foto: F. van der Lecq

Leila Schneps

hoe aanvullende informatie en vooroordelen van invloed kunnen zijn op het oordeel (van een jury) over een verdachte.

Als publiek konden we interactief stemmen op uitspraken over de geloofwaardigheid van extra argumenten of iemand schuldig zou zijn aan een moord. Ook als wiskundemensen onder elkaar waren we telkens behoorlijk verdeeld. Ze schreef hier een boek over: *Math on Trial, how members get used and abused in the courtroom*. Ook uitspraken over de kans op kanker na een positieve test kunnen behoorlijk fout zijn, omdat hier voorwaardelijke kansen aan de orde zijn. Neem aan dat bekend is dat voor een bepaalde test geldt dat deze voor 95% van de vrouwen die kanker hebben een positieve uitslag geeft. Neem bovendien aan dat 1 op de 1000 vrouwen kanker heeft. Neem ook aan dat de kans op een positieve uitslag op de test bij gezonde vrouwen 1% is. Bij 100.000 vrouwen die getest worden hebben er dus 100 kanker. De test geeft hen 95 keer een positieve uitslag. Maar bovendien geeft 1% van de 99.900 tests bij vrouwen zonder kanker foutief aan dat er toch kanker is (1% kans op een 'false positive'). Dus bij de $(999+95=)\,1.094$ positieve testen is er maar in 95 gevallen echt sprake van kanker: $8{,}7\%$. De ene dokter beweert dat je bij een positieve uitslag 95% kans hebt dat je echt kanker hebt, terwijl de andere dokter zegt dat de kans slechts ongeveer 1 op 10 is. Welke dokter heeft er nu gelijk?

Een eitje

Na de lunch volgde ik de lezing van Professor Robert Mudde. Hij demonstreerde dat vrijwel alle vragen in het dagelijks leven op te lossen zijn met de 'balansvergelijking':

$$\frac{d}{dt} = \text{in} - \text{uit} + \text{productie}.$$

Ik kreeg bij zijn lezing weer hetzelfde gevoel dat ik altijd heb bij een natuurkundeprobleem. Je hoeft 'alleen maar' de differentiaalvergelijking op te stellen. Maar je moet wel even weten wat er constant blijft en hoe het behoud van energie moet worden ingepast. Dat geleiding evenredig gaat met de diameter van een staaf of evenredig met de inhoud van een bol. Dat alle eenheden moeten kloppen, dus dat er altijd wel een constante bij komt die in feite ervoor zorgt dat de eenheden van beide kanten van de vergelijking gelijk zijn. Als de leraar het voorzegt is het "oh ja", maar zelf kom ik er niet op. Het model waarbij je kijkt naar de wereldbevolking die 1% per jaar groeit, waarbij er dus niemand van buiten de aarde bij komt en er niemand van de aarde weggaat, snap ik nog wel. Het levert in het balansmodel

$$\frac{dN}{dt} = 0 - 0 + 0{,}01N(t)$$

met de oplossing van

$$N'(t) = 0{,}01 \cdot N(t)$$

is

$$N = N_0 \cdot e^{0{,}01t}.$$

Maar de balansvergelijking bij de vraag hoe lang je een struisvogelei moet koken als je voor een kippenei (van zeg 60 gram) 8 minuten rekent, is al een stuk lastiger. Bij een ei in heet water gaat het er om hoe lang het duurt voordat de warmte van het kokende water buiten het ei ervoor zorgt dat het binnenste op 70°C komt, de temperatuur waarop eiwit stolt. In de balansvergelijking gaat er alleen warmte in het ei, er komt geen warmte uit en er wordt ook geen warmte geproduceerd, dus de balansvergelijking is

$$\frac{dE}{dt} = \text{in}.$$

Je moet ook bedenken dat de vloeistof in het ei stil staat, dus er vindt alleen geleiding plaats. Omdat een ei ongeveer bolvormig is gaat de geleiding evenredig met D^3, met D de diameter van het ei. $\Delta E \sim D^3 \cdot \rho \cdot c_P \cdot \Delta T$, met c_P de soortelijke warmte van de eivloeistof en ρ een constante. Hieruit volgt

$$\frac{dE}{dt} \sim D^3 \cdot \rho \cdot c_P \cdot \frac{dT}{dt}.$$

Je kunt stellen dat $D^3 \sim$massa is, dus $D^2 \sim \text{massa}^{2/3}$. Het *Fouriergetal* Fo_q is gelijk aan $\frac{at}{D^2}$, waarin a een constante is die voor alle eisoorten hetzelfde is: $a = \frac{\lambda}{\rho c_P}$. Dit geeft

$$t_{\text{struisvogel}} = \left(\frac{m_{\text{struisvogel}}}{m_{\text{kip}}}\right)^{2/3} \cdot t_{\text{kip}}$$

oftewel

$$t_{\text{struisvogel}} = \left(\frac{1200}{60}\right)^{2/3} \cdot 8 = 58{,}94$$

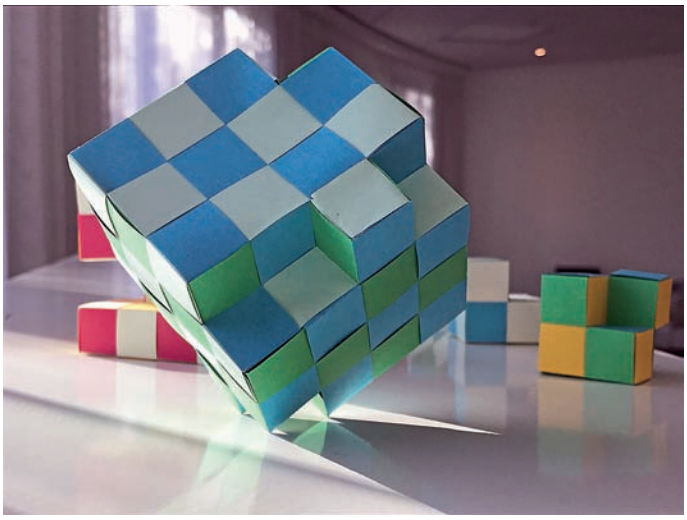
minuten. Dus het koken van een struisvogelei duurt ongeveer 60 minuten.

Bij de vraag hoe lang het duurt voordat je je vingers brandt aan het handvat van een lepel die in een pan heet water (soep) wordt gezet komt het begrip *indringdiepte* tevoorschijn. Dit is de x-coördinaat van het snijpunt van de raaklijn vanuit het punt op de y-as aan de grafiek van de oplossing. Er geldt $l \approx \sqrt{\pi a t}$. Voor zilver geldt $a = 2 \cdot 10^{-4}$. Het duurt dus ongeveer $2{,}65$ minuten voordat je je brandt aan een zilveren lepel van 10 cm, want

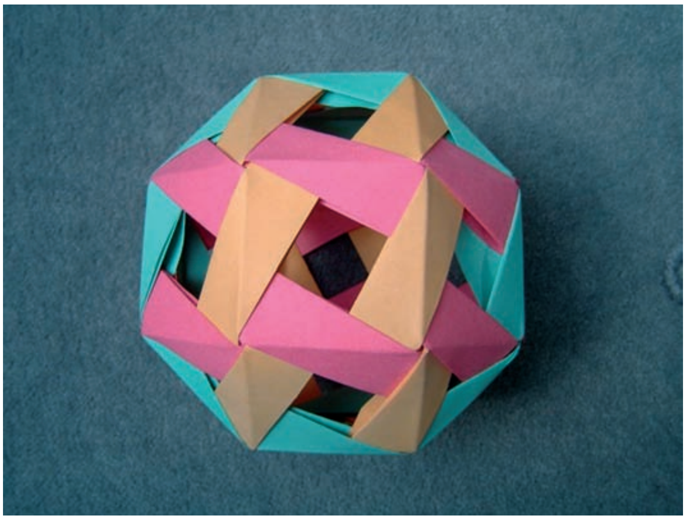
$$t = 0{,}1^2/(\pi \cdot 2 \cdot 10^{-4}) \approx 159 \text{ s}.$$

Vooraf moet je controleren dat de eenheden kloppen. Ik ga uit van m en s.

Om niet alles zelf te hoeven uitrekenen kan gebruikgemaakt worden van een speciale tabel van $\frac{T_1 - T}{T_1 - T_0}$ tegen Fo. Hiermee kun je snel vinden dat het afkoelen van een blikje cola van 250°C naar 80°C door het in het vriesvak van de koelkast te leggen ongeveer 15 minuten duurt.



Figuur 1 Kubus binnenste buiten.



Figuur 2 Origami met modules.

Knutselhoek

Alle tijd tussen de workshops en lezingen in ben ik gauw naar de Harvard-zaal gegaan. Florine Meijer en ik hebben daar een knutselhoek gemaakt. Een soort doorlopende workshop met boeiende wiskundige modellen.

Op tafel liggen allerlei voorbeelden en bouwplaten die deelnemers aan de NWD kunnen gebruiken om iets na te maken of zelf creatief mee bezig te zijn. Er waren voortdurend flink wat collega's aan het knutselen. De kubus binnenstebuiten (Figuur 1), origami met modules (Figuur 2), hartenvlechten, flexagons, Möbius-harten, enzovoorts. Op de volgende NWD mag ik een workshop geven waarbij ik dieper op de samenhang tussen de modellen zal ingaan.

Het werken met modellen is hot. Ik las deze week in de krant dat Peter Beck een 'Humanity Star' in een baan om de aarde heeft gelanceerd. "Een hemelse discobal (met een doorsnee van ruim 1 meter) die de mensen moet herinneren aan hun kwetsbare plek in het universum." En Elon Musk liet een knalrode Tesla-auto de ruimte in schieten.

Vouwen

Wat doe je met de NWD-posters die over zijn? Henk Hogervorst wist er wel raad mee. Met de speciale zigzagvouwtechniek wist hij de afgelopen maanden veel mooie kunstwerken te vouwen. In het Atrium kon je zijn creaties ook bewonderen. In de workshop oefenden we met de techniek. Henk kwam later ook nog in onze knutselhoek om met liefhebbers een groter object te vouwen. Voordat je aan een groot vouwsel begint moet je eerst eens uitzoeken welk effect de vouwhoeken op de kromming van het eindproduct hebben. Wat duidelijk werd is dat je gewoon zelf moet gaan proberen om te snappen welke vouwhoeken een mooi resultaat opleveren. Zie Figuur 3. In Figuur 4 en 5 zie je hoe hij na het vouwen twee verschillende aanzichten heeft gecreëerd. De ene kijkrichting zie je een donker patroon, de andere een licht patroon. Bij het ontwerpen kun je daar op inspelen.

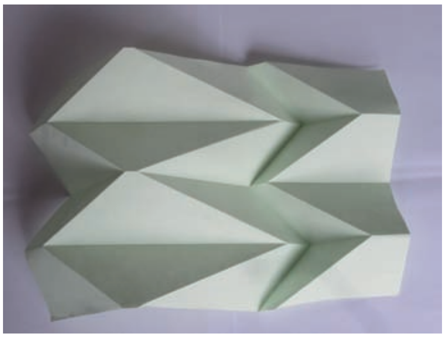
In de avondlezing nam Katie Steckles ons mee naar allerlei wiskundige vouwsels en knipsels. Eén van haar uitdagingen was dat je uit een vierkant blaadje met één keer in een rechte lijn knippen elke letter van het alfabet krijgt. Het wiskundige aspect zit hem in het uitzoeken hoe je het blaadje moet vouwen zodat het lukt. Op onze stoelen lagen enkele blaadjes waarmee we meteen tijdens de lezing haar ideeën in de praktijk konden brengen. Na enkele keren dubbelvouwen maakten we met één keer knippen een vijfpuntige ster.

Op internet heb ik al filmpjes gezien van colleges van Erik Demaine [3]. Hij levert ook het bewijs dat je elke figuur die getekend is met rechte randen altijd zo kunt vouwen dat je met één keer knippen die figuur uit het blaadje kunt krijgen.

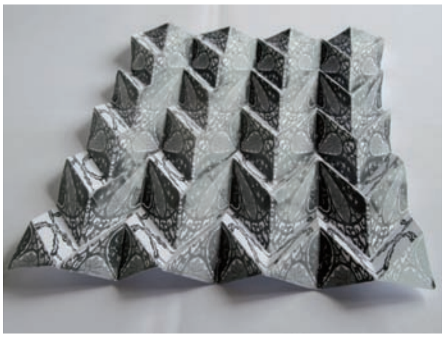
Je kunt er niet vroeg genoeg mee beginnen...

De laatste lezing die ik bijwoonde werd gegeven door Lieven Verschaffel. Paul Drijvers had hem ontmoet op een conferentie over wiskundedidactiek.

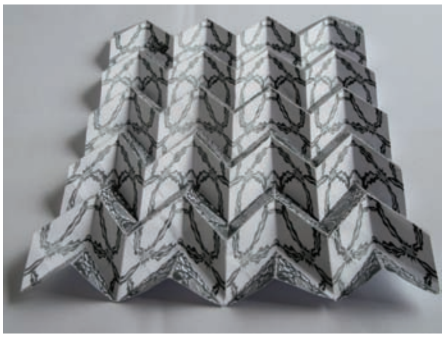
Welke reken-/wiskunde-ervaringen bij jonge kinderen zorgen ervoor dat je later beter beslagen ten ijs komt bij wiskunde? In acht items doet Lieven uit de doeken welke factoren wel, en welke niet bijdragen tot een voorspelde betere basis voor



Figuur 3 Verschillende vouwhoeken.



Figuur 4 Een donker patroon.



Figuur 5 Een licht patroon.

Foto: Mieke Abels

Katie Steckles

wiskunde. Het belangrijkste is dat er nu steeds meer aandacht is voor onderzoek naar voorspellend belang van gericht onderwijs van getallen en relaties. De resultaten daarvan kunnen leiden tot een goede aanpak van reken-/wiskundelessen vanaf de kleutertijd en voor beter leren van wiskunde op de middelbare school.

Piaget was een van de eersten die daar serieus onderzoek naar gedaan heeft. Hij richtte zich op logisch-mathematische vaardigheden. Er is niet duidelijk aangetoond dat zijn aanpak tot hogere wiskundige vaardigheden leidt. Met tellen op weg naar rekenen heeft meer effect. Neuropsychologisch onderzoek heeft aangetoond dat leren tellen, onderscheiden in vijf telprincipes, bepalend is voor later beter zijn in wiskunde. Er zijn onderzoeken geweest naar hoe mensen numerieke informatie representeren. Aantallen schatten, en aantallen vergelijken, zowel symbolisch als niet symbolisch, stimuleren de zogenoemde *number sense*. Een beter grootheidsbegrip leidt tot een hogere wiskundevaardigheid. Aandacht voor operaties, zoals optellen, geeft toename en wegnemen leidt tot afname, evenals kenmerken van commutativiteit en associativiteit, zorgen ook voor een hogere wiskundevaardigheid aan het eind van de basisschool. Mijn vrouw is kleuterjuf. Als zij haar rekenactiviteiten voorbereidt, hebben we het vaak over wat ze dan spelenderwijs zou kunnen doen. Ontdekken van patronen en structuren, in rijtjes gekleurde kralen, of ontbrekende lijntjes laten aanvullen. Spontane aandacht voor getallen, relaties, patronen en structuren maken de les rijker. Het voeren van een raaf (een pop) met bessen, waarbij de kleuters meetellen, het tonen van plaatjes, “wat zie je?”, waarbij ze dan ook het aantal dieren dat ze zien noemen. Onderzoek wijst uit dat dit allemaal factoren zijn die bijdragen tot een betere wiskundevaardigheid. Ten slotte moeten we niet vergeten dat ook factoren als intelligentie, cognitieve flexibiliteit, taalvaardigheid en werkgeheugen een rol spelen bij de ontwikkeling van wiskunde bij kinderen. In de klas van mijn vrouw zitten steeds meer kinderen die taalachterstand hebben, weinig van thuis mee krijgen op gebied van lezen en spelletjes doen. Voor hen is het vaak moeilijk om te begrijpen wat de vraag van de juf betekent. Ook bij tel- en rekenopdrachten is hoe je het zegt belangrijk. Maar duidelijk is dat je niet vroeg genoeg kunt beginnen met tellen en rekenen.

Zwart-witte dieren

In een wervelende show met plaatjes en filmpjes vertoonde Luc van den Broeck in de afsluitende lezing hoe hij met zijn leerlingen in Excel via sleutelfuncties de plaatjes van twee verschillende dieren kan omzetten naar een derde dier. Zo liet hij ons zien dat een konijn en een vis om te vormen zijn tot een bok. Het principe berust erop om hokjes binnen een dier zwart te maken en erbuiten wit. De gebruikte techniek maakt enkel gebruik van tabellen met logica (XOR) [4].

Bij de afsluitende lunch kwam ik er achter dat ik weer te weinig tijd heb gehad om de stands in de Rotonde te bezoeken. Daar had ik vast nog wat gratis spullen kunnen meekrijgen. Nu moest ik het doen met de vrijwel lege tas van Scheepstra. Helaas dit keer geen handige stoffen tas die ik altijd voor van alles gebruik, maar een soort Medium Shopper. In elk geval waren mijn hoofd en mijn maag weer goed gevuld deze dagen.

Referenties

1 www.katiesteckles.co.uk/

2 Wiskunde moet uitdagender en spannender, *Nieuwe Wiskrant* 23 (2004), 4–6, www.fi.uu.nl/wiskrant/artikelen/234/234juni_blij.pdf. Zie ook het artikel in *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/16(2) (2015), 83–87.

3 en.wikipedia.org/wiki/Erik_Demaine; www.youtube.com/watch?v=2CDQFvDAZCw.

4 Drie technieken voor visuele cryptografie; vandenbroeck_luc@telenet.be.