Rob Tijdeman
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
tijdeman@math.leidenuniv.nl

Geschiedenis

Gelijkverdeelde rijen bestaan niet

In 1935 stelde J.G. van der Corput een vraag over gelijkverdeling van rijen die in 1945 door mevrouw Van Aardenne-Ehrenfest beantwoord werd. Daarmee startte een interessante ontwikkeling die hier door Rob Tijdeman samengevat wordt.

Stel je wilt n punten gelijkelijk verdelen over een cirkel. Dan is er een ideale oplossing: je verdeelt de cirkel in n stukken van gelijke lengte en neemt de eindpunten. Het wordt veel ingewikkelder als je telkens een punt wilt toevoegen en daarbij de punten min of meer gelijkverdeeld wilt houden. Hoe gelijkverdeeld kun je dat doen? Dat is een vraag die J.G. van der Corput in 1935 stelde. In 1948 formuleerde Van der Corput het in een artikel over de wiskunde in Nederland in de jaren 1940–1945 zo [4, p. 273]:

> "Stel, ik wijs op een lijnstuk een bepaald punt aan, een seconde later een tweede punt, weer een seconde later een derde punt, en zo ga ik door tot in de eeuwigheid. Kan ik het nu zo inrichten, dat elk paar even lange deelintervallen van het beschouwde lijnstuk steeds ongeveer evenveel aangewezen punten bevat? Nauwkeuriger gezegd, kan ik het gedaan krijgen, dat de afwijking tussen de aantallen der aangewezen punten kleiner is dan honderdduizendmiljard (of een ander groot getal, zo u dit wenst)?"

Als dat het geval is, noemt Van der Corput de aangewezen punten rechtvaardig verdeeld op het lijnstuk, maar hij sprak het sombere vermoeden uit, dat er geen rechtvaardige verdelingen bestaan.

Deze formulering lijkt op de formulering die Wolff van het probleem geeft (zie [11, p. 14]), en die mevrouw Van Aardenne in 1936 van haar ouderejaars studiegenoot in Leiden Carel de Ridder ontving. In 1945 slaagde Van Aardenne er in om zoals Van der Corput het zelf uitdrukte 'op vernuftige wijze' te bewijzen dat er geen rechtvaardig verdeelde rijen bestaan. Van der Corputs vraag werd het startpunt voor een theorie over onregelmatigheden in verdelingen van punten in verzamelingen. In het bijzonder is het probleem om n punten in een vierkant zo gelijk mogelijk te verdelen nauw verwant met het gelijkverdelingsprobleem van een rij punten op een cirkel. Gelijkverdeelde rijen in hoogdimensionale blokken vinden toepassingen in de numerieke wiskunde, onder andere bij berekeningen in de financiële wiskunde. Voor een uitgebreide verhandeling verwijs ik naar Faure, Kritzer en Pillichshammer [6] en voor een recente ontwikkeling naar Larcher [9].

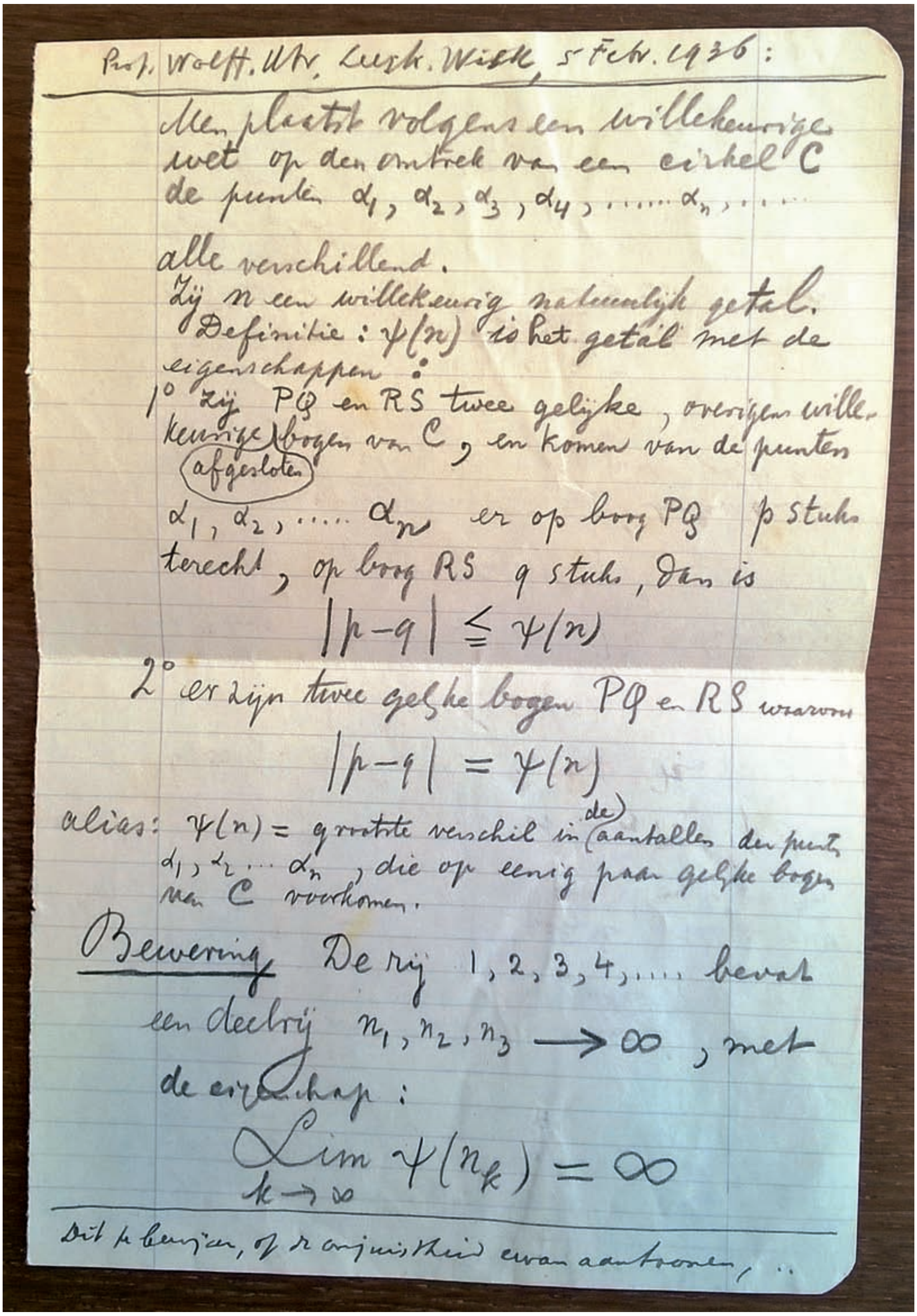
Het eendimensionale geval

We gaan in op de vraag van Van der Corput. We beschouwen daartoe het interval $[0,1)$ waarbij het getal x het punt op de eenheidscirkel onder hoek $2\pi x$ met de positieve x-as representeert. Dus $x=0$ correspondeert met $(1,0)\in\mathbb{R}^2$, $x=1/4$ met $(0,1)$, $x=1/2$ met $(-1,0)$ en $x=3/4$ met $(0,-1)$. Van Aardenne bewees dus dat het onmogelijk is om een rij $\omega=(x_n)_{n=1}^{\infty}\in[0,1)$ te vinden zó dat voor elk paar intervallen van gelijke lengte in $[0,1)$ het verschil van de aantallen punten uit die rij in die intervallen begrensd blijft als je de punten aftelt.

Om de kwaliteit van rijen te kunnen vergelijken moet een maat worden ingevoerd. Voor een rij $\omega=(x_1,x_2,\dots,x_N,\dots)$ in $[0,1)$ definiëren we de *discrepantie* $D_N(\omega)$ voor $N=1,2,\dots$ als

$$D_N = D_N(x_1,\dots,x_N) = \sup_{0\le\alpha<\beta\le1} |A(\alpha,\beta;N) - N(\beta-\alpha)|$$

waar $A(\alpha,\beta;N)$ het aantal n's is met $\alpha\le\{x_n\}<\beta$ en $1\le n\le N$. We noemen de rij ω *gelijkverdeeld modulo* 1 als



Prof. Wolff. Utr. Leesk. Wisk, 5 Feb. 1936:

Men plaatst volgens een willekeurige wet op den omtrek van een cirkel C de punten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots\ldots \alpha_n, \ldots$

alle verschillend.

Zij n een willekeurig natuurlijk getal.

Definitie: $\psi(n)$ is het getal met de eigenschappen:

1° zij PQ en RS twee gelijke, overigens willekeurige (afgesloten) bogen van C, en komen van de punten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ er op boog PQ p stuks terecht, op boog RS q stuks, dan is

$$|p-q| \leqq \psi(n)$$

2° er zijn twee gelijke bogen PQ en RS waarvoor

$$|p-q| = \psi(n)$$

alias: $\psi(n)$ = grootste verschil in (de) aantallen der punten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, die op eenig paar gelijke bogen van C voorkomen.

Bewering: De rij 1, 2, 3, 4, ... bevat een deelrij $n_1, n_2, n_3 \longrightarrow \infty$, met de eigenschap:

$$\lim_{k\to\infty} \psi(n_k) = \infty$$

Dit te bewijzen, of de onjuistheid ervan aantoonen, ..

Bron: Noord-Hollands Archief, Haarlem, toegang 685, doos 5

Het probleem van Van der Corput, genoteerd door Wolff; bijlage bij brief, 6-2-1936, van C.C.J. de Ridder aan Tatiana van Aardenne-Ehrenfest

$\lim_{N\to\infty} D_N(\omega)/N = 0$. Het betekent dat elk deelinterval van $[0,1)$ in de limiet een fractie van de punten van ω bevat die gelijk is aan de lengte van het interval. Uit de definitie volgt direct dat voor elke rij ω en elke N geldt dat

$$1 \le D_N(\omega) \le N.$$

In 1904 merkte Lerch [10] op dat voor de rij $(n\alpha \bmod 1)$ met $\alpha = (1+\sqrt{5})/2$ de rij $\left(\frac{D_N(\omega)}{\log N}\right)$ begrensd is. De begrensdheid geldt voor alle getallen α waarvoor de wijzergetallen in de kettingbreukexpansie begrensd zijn, in het bijzonder voor elk irrationaal getal dat wortel is van een niet-triviaal kwadratisch polynoom met gehele coëfficiënten. In 1922 bewezen Hardy en Littlewood [7] en Ostrowski [13] dat anderzijds in dit resultaat de factor $\log N$ niet verbeterd kan worden.

Van der Corput introduceerde een andere rij waarvoor $\left(\frac{D_N(\omega)}{\log N}\right)$ begrensd is. De naar hem genoemde rij krijg je door de getallen $0,1,2,\ldots$ binair te schrijven en dan de bits achter de komma te ‘spiegelen’. De Van der Corputrij is

$$0,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{8},\frac{5}{8},\frac{3}{8},\frac{7}{8},\frac{1}{16},\frac{9}{16},\frac{5}{16},\dots$$

Zoals in de inleiding beschreven vroeg Van der Corput [3] zich af of er een oneindige rij ω bestaat waarvoor $D_N(\omega)$ begrensd blijft als $N\to\infty$. Deze vraag werd beantwoord door Van Aardenne-Ehrenfest, dochter van de fysicus Paul Ehrenfest. Zij bewees dat er geen enkele rij bestaat waarvoor $D_N(\omega)$ begrensd blijft [1]. Een paar jaar later toonde ze aan dat er een $c>0$ is zó dat er voor elke rij ω oneindig veel N’s zijn met $D_N(\omega)>c\frac{\log\log N}{\log\log\log N}$ [2]. In 1954 verbeterde Roth de ondergrens tot $c\sqrt{\log N}$ [14]. Ten slotte bewees Schmidt in 1972 dat voor elke rij ω er oneindig veel N’s zijn met $D_N>c\log N$ met $c=1/100$, [15]. Eerder genoemde rijen hebben dus afgezien van de multiplicatieve constante de optimale discrepantie.

De zoektocht daarna betrof de optimale waarde van de constante c. We noemen hier alleen de nu bekende beste grenzen. In 2016 bewees Larcher dat in Schmidts resultaat $c=0{,}21$ genomen kan worden [9]. Anderzijds construeerde Ostromoukhov een variant van de Van der Corputrij waarvoor geldt dat $D_N(\omega)\le 0{,}354\log N$ voor alle N [12]. De factor $\log N$ geldt voor bijna het gehele interval $[0,1)$: in 1980 bewezen Wagner en de auteur [16] dat als $A_N(x)$ het aantal gehele getallen n is met $1\le n\le N$ en $0\le x_n<x$ en $D_N^*(x)=|A_N(x)-Nx|$, dat dan voor elke rij ω geldt dat

$$\max_{1\le n\le N} D_n^*(x)>\frac{1}{400}\log N-2$$

voor alle $x\in[0,1)$ met uitzondering van een deelverzameling van $[0,1)$ met Lebesguemaat ten hoogste $3N^{-1/6}$.

Het meerdimensionale geval

Voor een natuurlijk getal k beschouwen we rijen ω in het eenheidsblok $[0,1)^k$. De *discrepantie* van $\omega=(x_1,x_2,\dots,x_N)$ definiëren we als

$$\begin{aligned}D_N&=D_N(x_1,x_2,\dots,x_N)\\&=\sup_J|A(J,N)-N\mu(J)|\end{aligned}$$

waarbij het supremum genomen wordt over alle deelblokken in $[0,1)^k$ van de vorm

$$J=\{(x_1,\dots,x_k)\colon \alpha_i\le x_i\le\beta_i \text{ voor } 1\le i\le k\},$$

$A(J,N)$ het aantal getallen i met $1\le i\le N$ is waarvoor x_i in J ligt en μ de Lebesguemaat aangeeft. De rij ω heet *gelijkverdeeld* als $\lim_{N\to\infty}D_N/N=0$. Dat houdt in dat in de limiet elk deelblokje een fractie van de punten van ω bevat die gelijk is aan zijn volume.

Roth bewees zijn resultaat voor willekeurige dimensie [14]. Voor elke rij ω in $[0,1)^k$ geldt voor zekere $c_k>0$ dat voor oneindig veel waarden van N geldt dat

$$D_N>c_k(\log N)^{k/2}.$$

Anderzijds zijn generalisaties van de Van der Corputrij geconstrueerd, zoals sommige Halton- en (t,s)-rijen, die voor zekere $C_k>0$ voor alle N voldoen aan

$$D_N<C_k(\log N)^k.$$

Vermoed wordt dat de bovengrens de goede orde van grootte aangeeft, maar behalve voor $k=1$ is het gat tussen onder- en bovengrens nog niet gedicht.

De discrepantie van een eindige rij in $[0,1)^{k+1}$ met $k>0$ is nauw verwant met de discrepantie van een oneindige rij in $[0,1)^k$. De relatie tussen beide rijen is dat als de oneindige rij met lage discrepantie begint met $x_1,x_2,\dots,x_N$ in $[0,1)^k$, deze vergeleken wordt met de rij

$$\left(x_1,\frac{0}{N}\right),\left(x_2,\frac{1}{N}\right),\dots,\left(x_N,\frac{N-1}{N}\right) \text{ in } [0,1)^{k+1}.$$

Zo geconstrueerde puntverzamelingen heten naar Hammersley. Er is dus een $c_k^*>0$ zó dat voor elke verzameling van N punten in $[0,1)^k$ geldt $D_N>c_k^*(\log N)^{(k-1)/2}$ [8, p. 105], terwijl er een C_k^* is en voor elke N er verzamelingen van N punten in $[0,1)^k$ zijn met $D_N<C_k^*(\log N)^{k-1}$ (zie bijvoorbeeld [5, Chapter 3]). In het geval $k=2$ is de ondergrens wel $c_k^*\log N$ vanwege Schmidts resultaat [8, p. 109].

Referenties

1 T. van Aardenne-Ehrenfest, Proof of the impossibility of a just distribution of an infinite sequence of points over an interval, *Indag. Math.* 7 (1945), 71–76.

2 T. van Aardenne-Ehrenfest, On the impossibility of a just distribution, *Indag. Math.* 11 (1949), 264–269.

3 J.G. van der Corput, Verteilungsfunktionen I, *Proc. Akad. Amsterdam.* 38 (1935), 813–821.

4 J.G. van der Corput, Wiskunde, in *Geestelijk Nederland 1920-1940, Deel II: De Wetenschappen van Natuur, Mens en Maatschappij*, Kosmos, 1948.

5 J. Dick en F. Pillichshammer, *Digital Nets and Sequences. Discrepancy Theory and Quasi-Monte Carlo Integration*, Cambridge University Press, 2010.

6 H. Faure, P. Kritzer en F. Pillichshammer, From Van der Corput to modern constructions of sequences for quasi-Monte Carlo rules, *Indag. Math.* 26 (2015), 760–822.

7 G.H. Hardy, J.E. Littlewood, Some problems of Diophantine approximation: The lattice points of a right-angled triangle I, *Proc. London Math. Soc. (2)* 20 (1922), 15–36.

8 L. Kuipers en H. Niederreiter, *Uniform Distribution of Sequences*, Wiley, 1974.

9 G. Larcher, On the discrepancy of sequences in the unit-interval *Indag. Math.* 27 (2016), 546–558.

10 M. Lerch, Question 1547, *L’Intermédiaire Math.* 11 (1904), 144–145.

11 J. van Maanen, Julius Wolff (1882–1945), www.fi.uu.nl/~janm.

12 V. Ostromoukhov, Recent progress in improvement of extreme discrepancy and star dicrepancy of one-dimensional sequences, in P.L.’Ecuyer and A.B. Owen (eds.), *Monte-Carlo and Quasi-Monte-Carlo Methods 2008*, Springer, 2009, pp. 561–572.

13 A. Ostrowski, Bemerkungen zur Theorie der Diophantischen Approximationen I, *Abh. Math. Sem. Hamburg* 1 (1922), 77–98.

14 K.F. Roth, On irregularities of distribution, *Mathematika* 1 (1954), 73–79.

15 W.M. Schmidt, Irregularities of distribution VII, *Acta Arith.* 21 (1972), 45-50.

16 R. Tijdeman en G. Wagner, A sequence has almost nowhere small discrepancy, *Mh. Math.* 90 (1980), 315-329.