Robbert Fokkink
Delft Institute of Applied Mathematics
TU Delft
r.j.fokkink@tudelft.nl

Boekbespreking Geert Jan Olsder

Rondzwervingen door een toegepast wiskundig heuvellandschap

Geert Jan Olsder was hoogleraar wiskundige systeem- en besturingstheorie in Delft van 1983 tot en met 2008. Hij heeft zijn uittreerede uitgewerkt tot een boek, dat onlangs is verschenen bij Delft Academic Press. Het is een wiskundige autobiografie waarin persoonlijke herinneringen en wiskundige onderwerpen op humoristische wijze aan elkaar worden geregen. Robbert Fokkink bepreekt het boek en licht er een hoofdstukje uit.

De kleine Geert Jan was al op jonge leeftijd gefascineerd door sterrenkunde en voerde thuis op de boerderij allerlei experimenten uit. Het liefst wilde hij ellipsoloog worden, maar dat beroep bestond niet en dus studeerde hij wiskunde. Aanvankelijk ging dat moeizaam. Het kostte als ellipsoloog enige moeite om terug te schakelen van kosmische grootheden naar delta's en epsilons. Een ontmoeting op de schaatsbaan leidde tot een promotie in de regeltechniek gevolgd door een postdocpositie in Stanford. Toen hij terugkwam uit de Verenigde Staten schreef Olsder samen met Tamer Başar het standaardwerk over dynamische speltheorie. De basis voor een academische carrière was gelegd.

Toen China enkele jaren geleden de eenkindpolitiek afschafte, haalde Olsder het wereldnieuws omdat hij ooit een artikel had geschreven dat de directe aanleiding bleek te zijn geweest van deze Chinese politiek. Een Chinese delegatie had een werkbezoek gebracht aan de Universiteit Twente, waar Olsder toen werkzaam was. Song Jian, een raketdeskundige, maakte deel uit van die delegatie. Vanwege de gezamenlijke interesse voor regeltechniek werden Olsder en Song aan elkaar gekoppeld. Toen het gesprek wat begon te stokken, vertelde Olsder over zijn recente artikel waarin regeltechniek werd toegepast op geboortecijfers. Song spitste de oren. Later bleek dat hij naar aanleiding van dit gesprek architect van de eenkindpolitiek was geworden. Het is slechts een van de vele onderhoudende anekdotes in dit boek. De lezer leert niet alleen praktische zaken zoals het nut van de brandgang als gedachtegang of de techniek van het korenbinden, maar vooral veel wiskunde, zoals het verschil tussen de Nash-oplossing en de Stackelberg-oplossing, het gebruik van maxplus-algebra's voor dienstregelingen of het omwerken van een optimaal pad tot een differentiaalvergelijking. Nergens verzandt het boek in techniek. Iedereen die weet wat een cosinus is, kan dit boek lezen. Ik vond het jammer dat ik het zo snel uit had en dat is eigenlijk mijn enige kritiek op dit boek. Dit en het feit dat een boerenzoon uit Oost Groningen misschien een zuiniger prijsje had kunnen onderhandelen met de uitgever. Twaalf euro vijftig voelt als zoveel meer dan tien euro.

Geert Jan Olsder, *Mijn rondzwervingen door een toegepast wiskundig heuvellandschap*, Delft Academic Press, 91 p., ISBN 9789065624178, €12,50.

Song Jian en Geert Jan Olsder

Om een indruk te geven van de inhoud van het boek volgt hier een fragment waarin Geert Jan Olsder uitlegt wat een differentiaalspel is.

The Lady in the Lake

“Laat ik nu een klassiek voorbeeld geven van de theorie der differentiaalspelen, een achtervolgingsspel. Een jongedame zwemt in een ronde vijver en een oudere man met duidelijk ondeugende gedachtes en de zwemkunst niet machtig, staat aan de wal. De jongedame, niet gediend van deze man, laat ik haar L noemen van Lady, wil niet eeuwig in de vijver blijven rondzwemmen; zij wil naar de kant en eenmaal aan wal kan zij harder (weg-)rennen dan de man. Haar doel is daarom die wal te bereiken op een punt waar die man dan op datzelfde moment niet is. De man, M, die alleen langs de kant kan rennen, wil net het omgekeerde.

De zwemsnelheid van L is v en de rensnelheid van M is 1. Als v groot is zal L aan M kunnen ontsnappen, als v klein is niet. De te beantwoorden vraag is: hoe groot moet v zijn, of hoe klein kan v zijn, opdat L nog net aan M kan ontsnappen? We nemen aan dat er zich gedurende dit achtervolgingsspel geen vermoeidheidsverschijnselen zullen voordoen; L kan net zo lang met snelheid v blijven zwemmen als zij wil en de man kan steeds met snelheid 1 blijven rennen. Beide spelers zien elkaar en kunnen instantaan op elkaars bewegingen reageren.

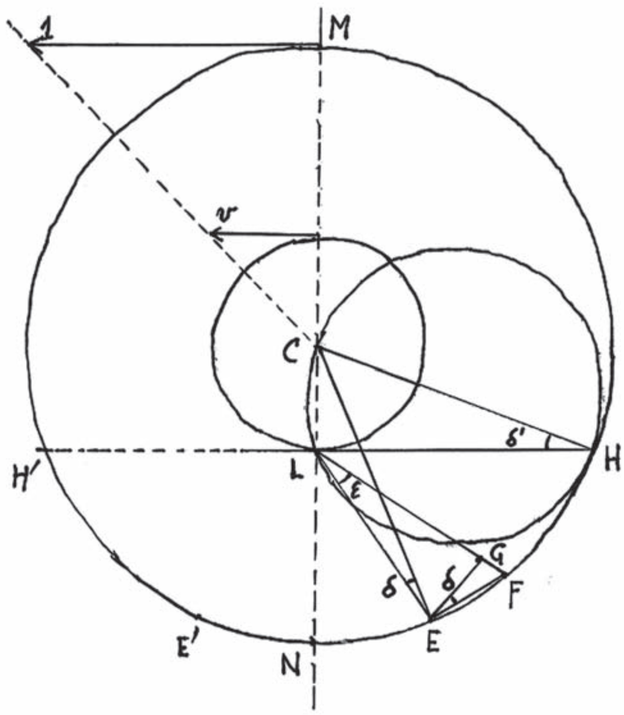
Het blijkt dat de straal van de vijver geen rol speelt en die heb ik voor het gemak in onderstaande analyse op 1 gezet. De vijver is in de figuur weergegeven door de grote cirkel met punt C als middelpunt. De kleinere cirkel, ook met C als middelpunt is een hulpcirkel die straal v heeft. Binnen die hulpcirkel kan L altijd zo zwemmen dat het middelpunt C zich precies tussen M en L blijft bevinden, hoe de man ook rent (L’s hoeksnelheid ten opzichte van het middelpunt van de vijver is hier immers groter dan die van M). Zij zwemt vanuit het middelpunt C diametraal weg van de man. Buiten die hulpcirkel lukt dat niet meer.

Stel nu dat we op het punt zijn aangekomen waarbij L(ady) zich in het punt L van de figuur bevindt en M(an) in punt M. Wegens die grotere hoeksnelheid binnen de kleine cirkel kan L zich altijd in zo’n positie precies tegenover de man manoeuvreren (dat kan zelfs in eindige tijd, maar dat gaan we hier niet aantonen). De eerste gedachte die nu waarschijnlijk opkomt is om L vervolgens naar punt N te laten zwemmen. L heeft daar $\frac{1-v}{v}$ tijdseenheden voor nodig. M moet dan een halve cirkel (links- of rechtsom) afleggen en dat kost hem π tijdseenheden. Als nu

$$\pi > \frac{1-v}{v}$$

dan kan L aan M ontsnappen. De cruciale v is te berekenen door in bovenstaande formule het $>$-teken te vervangen door het $=$-teken; de bijbehorende v is dan $0{,}2415$.

Maar ook met een nog kleinere v kan L aan M ontsnappen. Laten we daartoe eens twee eindpunten voor L aan de wal, waar zij heen zou kunnen zwemmen, E en F,



Schematische weergave van The Lady in the Lake.

bekijken. Stel, eerst gaat ze in richting E. Ze zal dit in een rechte lijn doen omdat een kromme lijn meer tijd kost en dan kan M dichterbij komen. Wel moet ze bij richting E weten dat de man links om de vijver gaat rennen (tegen de klok in dus), wat niet zeker is. Daarom gaat L eerst een fractie van een seconde vanuit punt L richting N zwemmen. De man moet nu iets doen, anders verliest hij tijd. Kiest hij linksom, dan gaat L vervolgens richting E, zou de man voor rechtsom hebben gekozen, dan kiest L voor het punt E', verticaal gespiegeld ten opzichte van E gelegen. Voor het verdere verhaal neem ik aan dat de man linksom heeft gekozen en L dan richting E gaat. De man blijft linksom rennen zolang L buiten die hulpcirkel blijft; zou hij omkeren dan verliest hij immers terrein. De hoek MCL, waarbij dan nu L en M de bewegende posities van beide spelers zijn, is kleiner, en wordt steeds kleiner, dan 180^o zolang L buiten de kleine cirkel blijft en de man linksom door blijft rennen.

Wat als L nu F zou kiezen in plaats van E als punt van aan wal gaan? Dan moet zij een stuk GF extra zwemmen en de man een stuk EF extra. De vraag is nu of (lengte GF)/(lengte EF) kleiner of groter is dan v. Is die verhouding kleiner dan v, dan is het voor L voordeliger om naar F te zwemmen in plaats van naar E. Noem de hoek tussen de lijnstukken EG en EF δ; die hoek is bij benadering gelijk aan de hoek tussen EL en EC. Die benadering is exacter naarmate de hoek ε, de hoek tussen de benen LE en LF, kleiner is en tot nul nadert. (Ik geef toe, ik doe hier een beetje *hand waving*, maar de foutjes die er bij positieve ε nog zijn, zijn tweede-orde-effecten die op het uiteindelijk bewijs geen invloed hebben — dit moet u van me aannemen.) De hoek δ is kleiner dan de hoek δ', zoals aangegeven in de figuur. Punt H is hierbij geconstrueerd als het snijpunt van de vijverwal met de raaklijn aan de hulpcirkel in punt L. De hoek δ' is groter dan de hoek δ omdat E buiten de nog niet genoemde hulpcirkel door de punten C, L en H ligt. Immers, een bekende stelling zegt dat: het lijnstuk CL wordt vanuit alle punten op die cirkelrand onder dezelfde hoek δ gezien (vanuit punten op de lange cirkelboog tenminste). Deze laatste cirkel ligt helemaal binnen de vijver, behalve punt H dan, wat gemakkelijk te bewijzen is, omdat hoek CLH 90^o is. Omdat $\delta' > \delta$, is ook $\sin\delta' = v$ groter dan $\sin\delta = \frac{\text{lengte } GF}{\text{lengte } EF}$ en de conclusie is dat L beter in richting F kan zwemmen dan in richting E.

Maar dan kun je deze redenering doorzetten en het potentiële eindpunt F vergelijken met een ander eindpunt nog ietsje verderop. Even doordenkend blijkt dan dat het beste wat zij kan doen, is vanuit punt L (preciezer: ietsje pietsje daarbuiten zodat M zijn renrichting moet kiezen) in richting H zwemmen. Mocht M besloten hebben om rechtsom te gaan vanuit punt M in plaats van linksom, nadat L heel even richting N is gegaan, dan gaat L, nu vervolgens richting H'.

L zou nog even kunnen overwegen naar een punt op de kant boven punt H te zwemmen, maar dan wordt $\sin\delta$ van de bij dat punt behorende δ weer kleiner dan $\sin\delta'$, nog afgezien van het feit dat die rechte baan eerst weer de binnencirkel induikt, waarbij je terug bij af bent. Punt H is daarom het punt waar de dame in een rechte lijn heen moet zwemmen vanuit punt L.

Nu is de cruciale snelheid v_c van L te berekenen; v_c is die snelheid waarmee L en M gelijktijdig in H aankomen als ze beiden hun optimale strategieën, zoals boven aangegeven, gebruiken. Als $v > v_c$, dan kan zij aan M ontsnappen, anders niet. Die cruciale snelheid blijkt te zijn $v_c = 0,21723...$ (numeriek berekend). Voor degenen onder u die dit zouden willen narekenen, v_c is de oplossing van de vergelijking

$$\pi + \arccos(v) = \frac{\sqrt{1-v^2}}{v}.$$

Het linkerlid in deze vergelijking is de tijd die de man nodig heeft om van zijn positie M naar punt H te gaan, via de lange kant van de rand van de vijver (de afstand NH langs de rand volgt uit $\cos(\angle NCH) = CH/CL = v$); het rechterlid is de tijd die de dame nodig heeft om van punt L naar punt H te zwemmen.

Ik heb dit voorbeeld ook wel eens uitgelegd in omgevingen waarin ik vermoedde dat er een feministische sfeer zou kunnen heersen en daar heb ik veiligheidshalve de jongedame vervangen door een visser in een roeibootje zonder visakte en de man door een politieagent langs de kant die de visser wil gaan bekeuren.”