Gert Heckman
*IMAPP, Afdeling Wiskunde*
*Radboud Universiteit Nijmegen*
*g.heckman@math.ru.nl*

**Boekbespreking** Jacques Tits, Œvres – Collected Works, Volumes I-IV

# Verzameld werk van Jacques Tits

**In 2008 ontvingen Jacques Tits en John Griggs Thompson de Abelprijs voor hun "profound achievements in algebra and in particular for shaping modern group theory" (zie abelprize.no). Tits werd daarbij geroemd om de wijze waarop hij groepen op een nieuwe manier als meetkundige objecten wist te zien. Naar aanleiding van het verschijnen van het verzameld werk van Tits belicht Gert Heckman het gebied waarop Tits actief was.**

**Groepen en meetkunde**

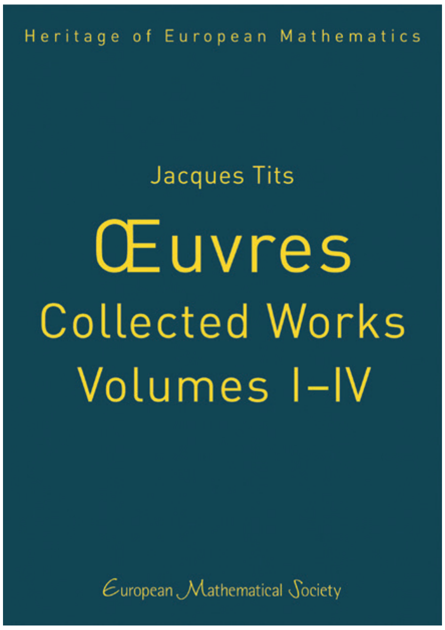
Een groep $G$ is een verzameling met een productregel, dat wil zeggen een binaire operatie $G \times G \to G$ is gegeven, die associatief is, een eenheidselement heeft en waarbij ieder element een inverse heeft. De moeder aller groepen is de groep $\mathrm{Sym}(X)$ van alle bijecties op een verzameling $X$ met compositie van bijecties als productregel. Een ondergroep $G$ van $\mathrm{Sym}(X)$ komt dus met een realisatie van $G$ als transformatiegroep op $X$. Zulke groepen $G$ laten in de regel zekere algebraïsche of meetkundige structuren op $X$ invariant, en het is interessant op zoek te gaan naar die structuren op $X$, waarvoor $G$ kan worden gekarakteriseerd als de groep van alle bijecties op $X$ die de betreffende structuur invariant laten.

Opgemerkt dient te worden dat zo'n meetkundige realisatie van een groep $G$ verre van uniek is. Denk bijvoorbeeld aan de alternerende groep $A_5$, die enerzijds optreedt als groep van rotaties van de icosaëder, en die anderzijds als enkelvoudige groep de onoplosbaarheid van de algemene vijfdegraadsvergelijking door middel van worteltrekken tot gevolg heeft. Felix Klein heeft in zijn icosaëderboek uit 1884, dat opnieuw is uitgegeven in 1990 in een prachtige band door Peter Slodowy, een natuurlijk verband gegeven tussen deze twee verschillende realisaties van $A_5$.

Een belangrijk voorbeeld is een eindig-dimensionale vectorruimte $V$ over een lichaam $F$, en $\mathrm{GL}(V)$ de groep van lineaire transformaties van $V$.

De klassieke groepen $\mathrm{SL}(V)$, $\mathrm{O}(V,g)$ en $\mathrm{Sp}(V,\omega)$, die respectievelijk volume, een niet-ontaarde symmetrische bilineaire vorm $g$ en een niet-ontaarde antisymmetrische bilineaire vorm $\omega$ behouden, zijn belangrijke ondergroepen van Her All Embracing Majesty, een koosnaam voor $\mathrm{GL}(V)$ afkomstig van Hermann Weyl. Meer in het algemeen zijn algebraïsche groepen ondergroepen van $\mathrm{GL}(V)$ die door polynoomvergelijkingen kunnen worden gedefinieerd.

De classificatiestelling van Wilhelm Killing en Élie Cartan zegt dat in geval $F = \mathbb{C}$ de enkelvoudige algebraïsche groepen op isomorfie na ofwel klassieke groepen ofwel van exceptioneel type $\mathrm{E}_6$, $\mathrm{E}_7$, $\mathrm{E}_8$, $\mathrm{F}_4$ of $G_2$ zijn. Het is regel om enkelvoudig te lezen als enkelvoudig modulo eindig centrum. Deze classificatie roept direct een vervolgvraag op: Wat is dan wel de meetkundige betekenis voor deze vijf exceptionele groepen? Voor $\mathrm{G}_2$ werd deze vraag reeds in 1914 beantwoord door Cartan, namelijk als




Jacques Tits, *Œvres – Collected Works, Volumes I-IV*, European Mathematical Society, 3963 p., ISBN 9783037191262, €598,00.

automorfismengroep van de octonionen, een alternatieve delingsalgebra van dimensie $8$. Het woord alternatief betekent dat de associatieve wet $(xy)z = x(yz)$ niet langer algemeen geldig behoeft te zijn, maar alleen vereist wordt als $x = y$ of $y = z$.

**Het projectieve vlak**

De lijnen in $\mathbb{R}^3$ door de oorsprong vormen de punten van het reële projectieve vlak $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, terwijl de lijnen in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ bestaan uit de collectie van die lijnen door de oorsprong in $\mathbb{R}^3$, welke in een gegeven vlak liggen. Projectieve vlakken kan men evenzo construeren met $\mathbb{R}$ vervangen door een willekeurig lichaam $F$, of de associatieve delingsalgebra $\mathbb{H}$ van quaternionen, en zelfs de alternatieve delingsalgebra $\mathbb{O}$ van octonionen. Dit soort projectieve vlakken heten ook wel coördinaat-projectieve vlakken.

Een abstract projectief vlak is een verzameling $\mathcal{P}$ van punten met een collectie deelverzamelingen $\mathcal{L}$ van lijnen, die aan een paar eenvoudige axioma's voldoen. Ieder tweetal verschillende punten ligt op een unieke lijn, en er bestaan vier punten, waarvan geen drie op een lijn liggen. En duaal, ieder tweetal verschillende lijnen snijdt elkaar in een uniek punt, en er bestaan vier lijnen, waarvan geen drie elkaar in een punt snijden. Coördinaat-projectieve vlakken zijn abstracte projectieve vlakken. In zijn *Grundlagen der Geometrie* uit 1899 bewees Hilbert dat coördinaat-projectieve vlakken over een lichaam kunnen worden gekarakteriseerd als die abstracte projectieve vlakken, waarin de stelling van Pappos geldt, terwijl de stelling van Desargues gezien kan worden als karakterisering van coördinaat-projectieve vlakken over een associatieve delingsalgebra. Deze insteek werd in 1933 verder uitgewerkt door Ruth Moufang. Zij bewees dat coördinaat-projectieve vlakken over een alternatieve delingsalgebra gekarakteriseerd kunnen worden als abstracte projectieve vlakken, waarin de stelling van de volledige vierhoek geldt.

De symmetriegroep van het projectieve vlak over de octonionen werd in 1950 door Chevalley, Schafer en Borel gerelateerd aan de exceptionele groepen van type $\mathrm{F}_4$ en $\mathrm{E}_6$. Freudenthal zette dit werk voort met zijn tekst *Oktaven, Ausnahmegruppen und Oktavengeometrie* uit 1951, hetgeen later zou uitmonden in het magisch vierkant van Freudenthal, waarin ook de resterende ex-



Jacques Tits

ceptionele groepen $\mathrm{E}_7$ en $\mathrm{E}_8$ figureerden. Het werd een actief onderzoeksthema op het Mathematisch Instituut in Utrecht van de jaren vijftig, met gerelateerd werk door Van der Blij, Schellekens, Springer en Veldkamp. In deze tijd stapte ook Jacques Tits in, aanvankelijk volgend met opnieuw de bestudering van het projectieve vlak over de octonionen, maar na enkele jaren leidend met zijn creatie van Tits-meetkunde, een universele aanpak om voor alle enkelvoudige algebraïsche groepen, zowel klassiek als exceptioneel, een axiomatische meetkunde te definiëren, met deze groepen als symmetriegroep.

**Coxeter-groepen**

Meetkunde kun je doen in ruimten van willekeurige dimensie. Dit inzicht brak in het midden van de negentiende eeuw krachtig door in het werk van Schläfli en Riemann. Riemanns Habilitatievoordracht uit 1854, getiteld 'Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen', is een juweel van de hoogste karaat. Enkele jaren daarvoor had Schläfli de platonische lichamen in hogere dimensie geclassificeerd. Zijn lange artikel, 'Theorie der vielfachen Kontinuität', haalde echter niet de *Crelle Journal*, en bleef op de plank liggen. De symmetriegroepen van deze platonische lichamen zijn (irreducibele) ondergroepen van $\mathrm{O}(\mathbb{R}^n)$ voortgebracht door spiegelingen, maar er zijn meer eindige (irreducibele) spiegelingsgroepen in $\mathrm{O}(\mathbb{R}^n)$ dan deze. Gefascineerd door dit werk van Schläfli bestudeerde Donald Coxeter rond 1930 deze spiegelingsgroepen $W$ uitvoerig: classificatie met behulp van Coxeter-diagrammen, de Coxeter-presentatie van $W$ met voortbrengers $S \subset W$ en relaties $(st)^{m_{st}} = 1$ met $M = (m_{st})$ de Coxeter-matrix, met $m_{ss} = 1$ en $m_{st} = m_{ts} \geq 2$ voor $s \neq t$. Dit alles wordt piekfijn uitgelegd in het meest succesvolle deel uit de Bourbaki-reeks: *Groupes et Algèbres de Lie, Chapitres 4,5 et 6*, uit 1968.

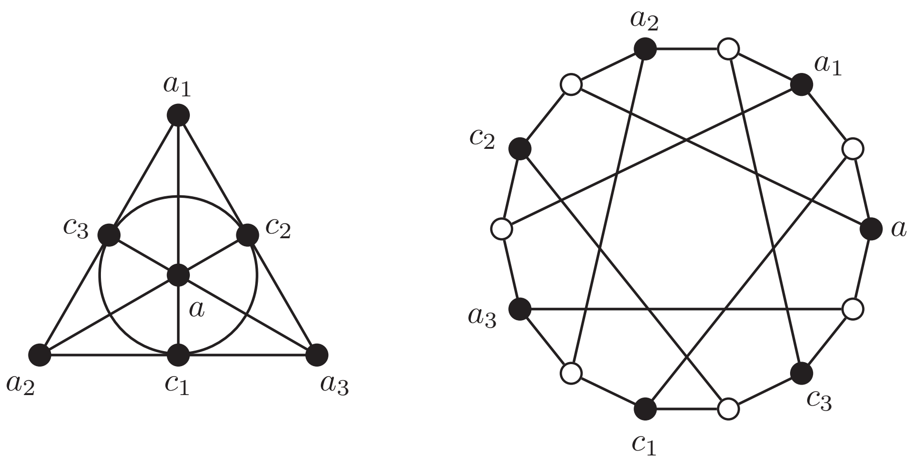
Geheel tegen de traditie van het anoniem Bourbaki-collectief wordt Tits in het voorwoord expliciet bedankt voor de talrijke conversaties en kostbare hulp bij het schrijven van deze drie hoofdstukken. De ongepubliceerde tekst van Tits, *Groupes et géométries de Coxeter* uit 1961, relevant voor de opzet van dit Bourbaki-deel, is in zijn verzameld werk opgenomen. De stelling van Tits over de trouwheid van de meetkundige representatie van een algemene Coxeter-groep is er een 'uit het Boek'. De bouwkundige terminologie van kamers, wanden, plinten, galerijen, appartementen en gebouwen als natuurlijke taal voor het werk van Tits gaat ook terug naar dit Bourbaki-deel.

Lijkt dit Bourbaki-deel primair geschreven als een uiteenzetting van de combinatorische infrastructuur van de enkelvoudige algebraïsche groepen, het belang ervan strekt echter veel verder. Coxeter-groepen zijn alomtegenwoordig, bijvoorbeeld in de singulariteitentheorie, of bij de studie van roosters uit de algebraïsche meetkunde, denk aan de middel-homologieroosters van Del Pezzo-oppervlakken of K3-oppervlakken, of bijzondere roosters zoals het Leech-rooster met zijn bijbehorende sporadische Conway-groepen, of voor hypergeometrische functies. Deze ubiquiteit van Coxeter-groepen blijft verrassen.

**Tits-meetkunde**

Een gebouw is een simpliciaal complex $\Delta$, dat een vereniging is van deelcomplexen, genaamd appartementen, met de volgende eigenschappen: ieder appartement is een Coxeter-complex, ieder tweetal simplices $A, A'$ in $\Delta$ is bevat in een appartement, en voor twee van zulke appartementen $\Sigma, \Sigma'$ is er een isomorfisme $\Sigma \to \Sigma'$ dat $A$ en $A'$ puntsgewijs vast laat.

Een eenvoudig voorbeeld om in gedachten te hebben is een projectief vlak met puntenverzameling $\mathcal{P}$ en lijnenverzameling $\mathcal{L}$. Het bijbehorend vlagcomplex $\Delta(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ is een graaf met $\mathcal{P} \sqcup \mathcal{L}$ als knopen en inci-



Het Fano-vlak (links) en het bijbehorende Tits-gebouw (rechts).

dente paren $(p,L) \in \mathcal{P} \times \mathcal{L}$ met $p \in L$ als verbindingen. Een projectieve driehoek is de configuratie van een drietal punten niet op een lijn en het drietal lijnen door elk tweetal punten. Nemen we als appartementen de zeshoeken, met als knopen de drie punten en drie lijnen van een driehoek en verbindingen de zes incidente paren, dan wordt $\Delta(\mathcal{P},\mathcal{L})$ een gebouw.

Het Fano-vlak is het projectieve vlak $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$ over een lichaam $\mathbb{F}_2$ van slechts twee elementen. Het heeft zeven punten en zeven lijnen, in overeenstemming met de bovenstaande linker figuur. Het bijbehorende Tits-gebouw is de incidentiegraaf van het Fano-vlak, aangegeven in bovenstaande rechter figuur. Het heeft zeven zwarte knopen corresponderend met de verzameling $\mathcal{P}$ van punten en zeven witte knopen corresponderend met de verzameling $\mathcal{L}$ van lijnen, en heeft $21$ takken corresponderend met de incidente paren. De automorfismengroep van het Fano-vlak of het bijbehorend Tits-gebouw is de enkelvoudige groep $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{F}_2)$ van orde $168$. Deze rijke symmetrie is uit beide figuren niet zo duidelijk, maar volgt door op te merken dat de punten van het Fano-vlak corresponderen met de vectoren in $\mathbb{F}_2^3$ verschillend van $0$.

Het bovenstaande laat zich generaliseren naar projectieve ruimten $\mathbb{P}^n(F)$ van hogere dimensie over een lichaam $F$, en geeft op analoge wijze een gebouw horend bij de projectieve groep $\mathrm{PGL}_{n+1}(F)$. De appartementen zijn de Coxeter-complexen van de symmetrische groep $S_{n+1}$. Meer in het algemeen hebben enkelvoudige algebraïsche groepen geassocieerde vlagvariëteiten, waar weer gebouwen aan gekoppeld kunnen worden, die als automorfismengroep de oorspronkelijke groep hebben.

De automorfismengroep $G$ van een gebouw heeft een zogenaamd $BN$-paar, waarbij de letter $B$ voor Borel staat en $N$ de normalisator van $B \cap N$ in $G$ is. De quotiëntgroep $N/(B \cap N)$ is de Coxeter-groep van het gebouw. Voor enkelvoudige algebraïsche groepen is de Coxeter-groep van het gebouw de bijbehorende Weyl-groep. Maar er zijn gebouwen, waarvan de Coxeter-groep niet kristallografisch is, en waarvan de automorfismengroep dus geen algebraïsche groep kan zijn.

Voor enkelvoudige algebraïsche groepen over $\mathbb{Q}_p$ hebben Bruhat en Tits een variatie op het thema van Tits bedacht, het zogenaamde Bruhat–Tits-gebouw, waarvan de Coxeter-groep de bijbehorende affiene Weyl-groep is. Het Bruhat–Tits-gebouw kan worden gezien als het ultrametrisch analogon van de symmetrische ruimten voor de betreffende groep over $\mathbb{R}$. Een symmetrische ruimte is een samenhangende Riemannse variëteit waarvoor geodetische spiegeling in ieder punt een globaal gedefinieerde isometrie geeft. Alle enkelvoudige Lie-groepen treden op als symmetriegroep van een symmetrische ruimte, zo bewees Élie Cartan. En omgekeerd is de symmetriegroep van een irreducibele enkelvoudig samenhangende symmetrische ruimte (verschillend van de euclidische rechte) steeds een (half)enkelvoudige Lie-groep. Analoog zegt een stelling van Tits dat voor ieder irreducibel gebouw met als Coxeter-groep een affiene Weyl-groep van rang minstens drie er een enkelvoudige algebraïsche groep over een $p$-adisch lichaam is met dat Bruhat–Tits-gebouw. Het werk van Cartan en Tits geeft de voorbeelden par excellence over het verband tussen meetkunde en groepentheorie, zoals verwoord in 1872 door Felix Klein in zijn Erlanger Programm. Zowel de symmetrische ruimten van Cartan als de Bruhat–Tits-gebouwen zijn gereedschappen bij de studie van automorfe representaties van een enkelvoudige algebraïsche groep in de adelische setting, en de bestudering hiervan is een centraal thema in het Langlands-programma.

De mij hier toegemeten ruimte alsmede mijn beperkte kennis beletten mij meer te schrijven over het indrukwekkende werk van Tits, in vier copieuze delen van zo'n duizend bladzijden per deel. Zijn werk gaat over de meetkundige betekenis van de enkelvoudige groepen, de elementen van het periodiek systeem der symmetrie. Hebben die exceptionele of sporadische enkelvoudige groepen, pas gevonden na ijverige classificatie, nu daadwerkelijk betekenis, of moeten we ze louter zien als accidentjes, gelieerd aan kleine getallen? Het is een zeer fundamentele vraag, die iedere specialist in deze branche zich wel eens stelt. In zijn inaugurele rede aan het Collège de France uit 1975 lijkt Jacques Tits (voor wat betreft de sporadische groepen) te opteren voor de tweede keus, maar daar zij dan wel bij opgemerkt dat zijn levenswerk getuigt van een onvermoeide inzet voor de eerste keus.

Overigens lijkt Tits op latere leeftijd het bovenstaande geluid iets te nuanceren. Bij een interview ter gelegenheid van de aan hem en Thompson toegekende Abelprijs in 2008 werd hen de vraag gesteld, of de exceptionele of sporadische groepen ons iets belangrijks te vertellen hebben, in de wiskunde of in de natuur? Thompson grapt de vraag weg, door te zeggen dat hij geen fysicus is. Maar Tits is serieus: "Het is misschien naïef dit te zeggen, maar ik heb het gevoel dat wiskundige structuren van een dermate schoonheid als de Monster iets van doen moeten hebben met de natuur."