

Walter Daems

Faculteit Toegepaste Ingenieurswetenschappen
Universiteit Antwerpen
walter.daems@uantwerpen.be

Paul Levrie

Faculteit Toegepaste Ingenieurswetenschappen
Universiteit Antwerpen
Departement Computerwetenschappen
KU Leuven
paul.levrie@uantwerpen.be

Evenement Abelprijs

Abelprijs 2017 voor Yves Meyer

Yves Meyer ontving in 2017 de Abelprijs (die samen met de Fieldsmedaille als de Nobelprijs voor de wiskunde wordt beschouwd) omwille van zijn fundamentele bijdrage aan de wavelettheorie. Naast deze meest prestigieuze wiskundeprijs won Meyer ook al de Salemprijs (1970), de Carrièreprijs (1972), de grote prijs van de Franse Académie des Sciences (1984), en de Gaussprijs (2010). Als eerbetoon en ook gewoon omdat het enorm boeiend is, gaan Walter Daems en Paul Levrie dieper in op het leven en werk van de laureaat en meer specifiek op de theorie der wavelets.

Van wereldoorlog tot wereldklasse

Toen Yves Meyer op 19 juli 1939 te Parijs werd geboren, liep de politieke spanning in Europa hoog op. De tweede wereldoorlog stond voor de deur. Niets — buiten zijn Franse afkomst — deed vermoeden dat op die doordeweekse woensdag een groot wiskundige het levenslicht zag. Bijna tachtig jaar later is Yves Meyer bekend om zijn bijdragen op het vlak van harmonische analyse, getaltheorie, singuliere integraaloperatoren (Calderóntheorie) en wavelets. Hij is gelauwerd als lid van de Académie des Sciences (1993), ontving de C.F. Gaussprijs (2010), werd Fellow van de AMS en won vorig jaar de Abelprijs (2017), deze laatste voor zijn bijdrage aan de wavelettheorie.

Opleiding

We keren ongeveer 75 jaar terug in de tijd. Ten gevolge van de oorlog verhuist de familie Meyer naar Tunesië. Yves groeit op in Tunis waar hij naar school gaat in de Lycée Carnot, die hij zelf omschrijft als 'een intellectueel erg stimulerende omgeving', onder meer omwille van de erg goede leraren. Zijn liefde gaat vooral uit naar wijsbegeerte en letteren, maar hij blijkt ook erg goed te zijn in wiskunde.

Net zeventien geworden, keert de jonge Meyer terug naar Frankrijk waar hij een voorbereidend jaar volgt om dan toela-

jaar later eindigt hij als eerste in dat toelatingsexamen, waarna hij zijn studies start aan de ENS.

Zijn liefde voor wijsbegeerte en letteren is geen onbelangrijk detail: tijdens zijn studies heeft hij meer contact met de studenten wijsbegeerte en letteren dan met zijn wetenschapscollega's. Een van zijn medeleerlingen omschreef hem als 'de enige wetenschapper waarmee je kon praten'. Zijn echte passie voor wiskunde komt pas later. Zijn sociale karakter (geen evidentie voor exacte wetenschappers) zou later een ongelooflijke troef blijken.

In 1960 breekt de Algerijnse oorlog uit. Alle jonge mannen worden opgeroepen om dienst te doen in het leger, tenzij ze bezig

tingsexamen te doen in de École Normale Supérieure (ENS) de Paris in de rue d'Ulm (waar onder anderen ook Louis Pasteur les volgde en waar je wiskunde en fysica, maar ook letteren kon studeren). Ondanks zijn buitengewone wiskundetalent twijfelt Meyer nog over zijn toekomst. De keuze voor wiskunde is op dat ogenblik louter economisch gemotiveerd. Ongeveer een



Yves Meyer

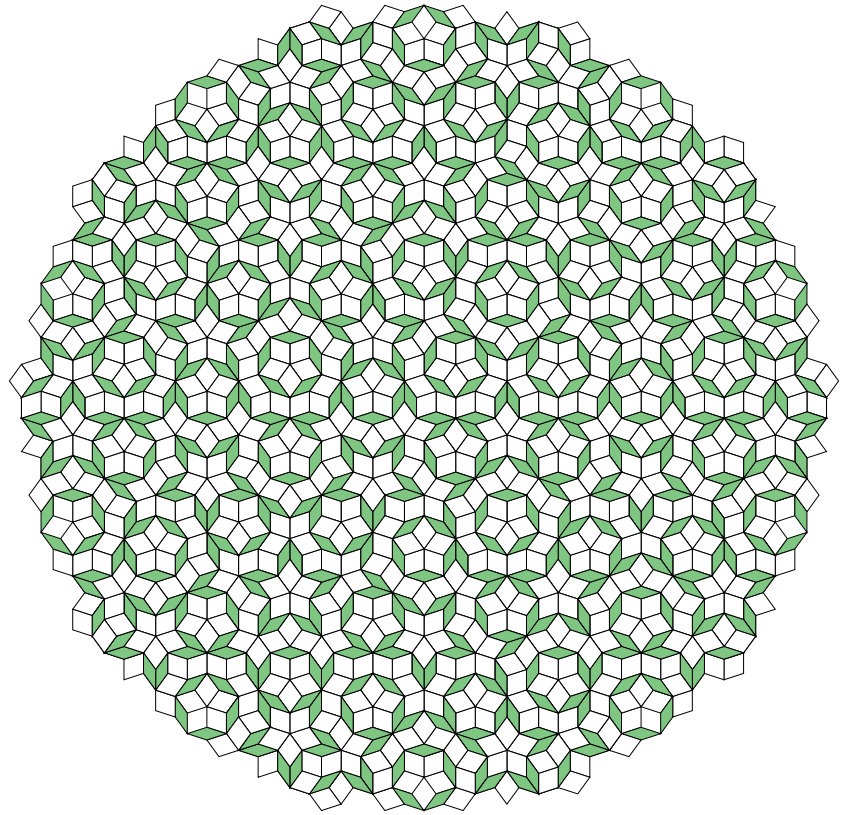
zijn met een doctoraat. Meyer zei hierover recent [17]: “Beginning a Ph.D. to avoid being drafted would be like marrying a woman for her money.” Ook Meyer wordt dus opgeroepen maar vraagt om les te mogen geven. Dat wordt toegestaan en hij geeft gedurende drie jaar les in de Prytanée Nationale Militaire, een van de zes militaire scholen in Frankrijk, gelegen in de Loire-streek.

Doctoraat

Na zijn legerdienst wordt hij in 1963 aangeworven als assistent in het departement wiskunde van de Université de Strasbourg. Op dat ogenblik werkten daar veertien professoren en veertien assistenten. Als assistent kreeg je de volledige vrijheid in het kiezen van een onderwerp voor een PhD en het zoeken van een promotor. Meyers keuze wordt bepaald door het lezen van een boek (uit 1935) van Antoni Zygmund [18]: *Trigonometric Series*. Nadat hij een tijdje heeft gewerkt op dit onderwerp, gaat hij op zoek naar een promotor. Op advies van Pierre Cartier, een van de wiskunde-professoren, neemt Meyer contact op met Jean-Pierre Kahane (1926–2017), professor aan het Centre d’Orsay de l’Université de Paris-Sud. Meyer had in Tunis al kennisgemaakt met Kahane, toen die in de Lycée Carnot een lezing gaf over wiskunde, meer bepaald over Fourierreksen. Toen hij Kahane zijn resultaten liet zien en vroeg of hij hem bij zijn verdere onderzoek wilde begeleiden, antwoordde Kahane: “Dat zou belachelijk zijn. Je hebt klaarblijkelijk al een doctoraat geschreven.” Even later behaalt Meyer dan ook officieel zijn doctoraat, in 1966, met Kahane als promotor.

Het Calderón-programma

Datzelfde jaar wordt Meyer aangenomen aan de Université de Paris-Sud, waar hij zijn samenwerking met Kahane verder uitdiept. Hij verandert hiervoor van onderzoeksonderwerp, wat normaal was voor startende doctores: ze moesten zich losmaken van onder de vleugels van hun promotor en bewijzen dat ze zelfstandig onderzoek konden doen. Meyer neemt de omgekeerde weg (hij had immers al volledig zelfstandig zijn doctoraatsonderzoek gevoerd) en zet in de voetsporen van Kahane mee zijn schouders onder de getaltheorie. Hij begint te werken op diofantische benaderingen, lost in die periode een belangrijk probleem op dat verband houdt met getallen van Pi-



Figuur 1 Penrose-betegeling.

sot en Salem en harmonische analyse [13], en wint hiermee in 1970 de Salemprijs. Dit onderzoek leidt tot de eerste echt grote bijdrage van Meyer aan de wiskunde: hij ontwikkelt de theorie van de modelsets. De Meyersets zijn naar hem genoemd. Er zijn ook links met de theorie van de *mean-periodic functions*, waarvoor Meyer samenwerkt met Jean Delsarte, een van de grondleggers van de Bourbaki-groep.

Dit onderzoek vindt later nog toepassing in de chemie: in 1981 bestudeert N.G. de Bruijn de niet-periodieke betegelingen van het vlak die Roger Penrose in 1974 had uitgedacht (zie Figuur 1). De Bruijn bewijst dat een Penrose-betegeling kan gezien worden als een projectie op een vlak van een rooster in vijf dimensies. Hij legt daarbij de link met het werk van Meyer. In 1982 ontdekt Daniel Shechtman kristallen waarin de atomen op een aperiodieke manier gerangschikt zijn, zoals bij de Penrose-betegelingen, de zogenaamde quasi-kristallen, wat hem in 2011 de Nobelprijs chemie oplevert. Interessante kanttekening: in 2007 vindt de fysicus Peter Lu gelijkaardige patronen op Islamitische bouwwerken uit de vijftiende eeuw [10].

Meyer werkt in die periode ook op ergodische theorie, samen met Benjamin Weiss,

en bewijst dat Rieszproducten isomorf zijn met Bernoulli shifts [15].

In 1974 verandert Meyer opnieuw van onderzoeksonderwerp. Rond 1960 startte Alberto Pedro Calderón met wat nu bekend staat als het ‘Calderón-programma’, een onderzoek dat draait rond singuliere integraaloperatoren. Samen met Ronald Raphael Coifman (Yale University, bekend als de man die de ruis probeerde te verwijderen van een opname van Johannes Brahms die piano speelt, op een Edison-cilinder daterend uit 1889) slaagt Meyer erin om in dit onderzoeksgebied een aantal belangrijke resultaten te bewijzen. Hieruit blijkt al een eerste keer het vermogen van Meyer om bruggen te slaan tussen verschillende domeinen in de wiskunde. Tijdens een lunch met een van de gaststudenten in het Centre d’Orsay, Alan McIntosh, weet hij de connectie te leggen tussen het werk van Tosio Kato (de promotor van Alan McIntosh in Berkeley) over operatortheorie en het werk van Calderón (in Chicago) en bewijst zo — als kers op de taart — in 1982 [2] het vermoeden van Calderón.

Van 1980 tot 1986 geeft Meyer ook les aan de École Polytechnique te Parijs. Daar begint het avontuur met de wavelets.

Een fotokopieerapparaat, olie en trillingen

Zoals hij zelf zegt komt Meyer in 1984 bijna per toeval in contact met wavelets. Het verhaal gaat als volgt: het hoofd van zijn afdeling aan de École Polytechnique, Jean Lascoux, had de gewoonte alles te fotokopieren wat hij wilde lezen. Dat had als gevolg dat collega's die zelf kopieën wilden maken, vaak moesten wachten. Zo ook Meyer. Op een dag in september 1984 stond Meyer te wachten tot het zijn beurt was, en om de tijd te doden had hij (in tegenstelling tot vele collega's die geïrriteerd waren door Lascoux's monopolie op de kopieermachine) de gewoonte om over wiskunde te praten met Lascoux. Die gulheid om alles te delen (die hij al van kindsbeen meedroeg) bleek alweer de 'juiste blik over het muurtje' op te leveren. Lascoux toonde hem een preprint van een artikel van een theoretisch fysicus uit Marseille, Alex Grossmann, omdat hij dacht dat dit Meyer wel zou interesseren. Coauteur was Jean Morlet, een geofysicus van een groot Frans oliebedrijf die om praktische redenen (het zoeken naar olie in de ondergrond) bij Grossmann terecht was gekomen. Eenvoudig gesteld stuurde men vibraties de grond in om vervolgens hun echo's te analyseren. Uit de frequenties van die echo's kan je informatie afleiden over de dikte en de samenstelling van de grondlagen. Maar omdat de echo's van die verschillende lagen met elkaar interfereren, is het erg moeilijk om er de juiste informatie uit te halen: de Fouriertransformatie schiet dan tekort. Morlet had het geprobeerd met de short-time Fouriertransformatie (of Gabortransformatie) [7], maar merkte op dat werken met een vaste breedte voor het analysevenster, niet hielp. Het artikel gebruikte een nieuwe methode die Meyer bekend voorkwam en die hij was tegengekomen bij het werken met Calderón–Zygmund-operatoren.

Heaviside, Fourier en Gabor

Laten we even enkele stappen terug zetten in de signaalanalyse (of meer wiskundig: functie-analyse). De zoektocht naar inzicht in specifieke kenmerken van signalen ('features' in het Engels) is eeuwenoud en speelt zich af tussen twee opponenten: tijd en frequentie. In die zoektocht proberen we signalen te ontbinden in basiscomponenten in de hoop dat die ons meer inzicht geven in de kenmerken van de signalen (analyse) of dat ze ons gemakkelijker operaties op signalen laten uitvoeren (bewerking of synthese).

Aan het ene eind van de schaal kunnen we signalen ontbinden volgens basiscomponenten die oneindig veel detail bieden in de tijd, maar geen detail in de frequentie. Oliver Heaviside was een van de eersten om een signaal te beschouwen als een som van verschoven eenheidsimpulsen met behulp van een functie (of correcter *distributed*) die later bekend zou worden als de Diracimpuls [8]. Hij creëerde de impulsdecompositie:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau. \quad (1)$$

Het andere eind van de schaal werd bestudeerd door Joseph Fourier [6]. Volgens het idee van Fourier ontbinden we een signaal in componenten die oneindig veel detail bieden in de frequentie, maar geen detail in de tijd, met name de Fourierkernen $e^{j\omega t}$:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (2)$$

waarbij $F(\omega)$ de Fouriergetransformeerde van het signaal f is en kan berekend worden als:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt.$$

We noteren deze transformatie zo: $f \xrightarrow{\mathcal{F}} F$.

De theoretische fundamenten voor signaalontbindingen liggen in de lineaire operatortheorie en de uitbreiding van het begrip vectorruimte tot ruimtes met een oneindige dimensie. Hierbij bieden de Hilbertruimtes $L^2(\mathbb{R})$ en $\ell^2(\mathbb{Z})$ het nodige fundament om het concept van het ontbinden van N -dimensionale vectoren in goedgekozen basisvectoren door te trekken naar het ontbinden van (continue en discrete) functies. Het begrip *scalair product* speelt hierin een sleutelrol. Voor functies f en g van de tijd t in $L^2(\mathbb{R})$ noteren we dit als $\langle f(t), g(t) \rangle$ en definiëren we dit als

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g^*(t) dt.$$

waarbij $g^*(t)$ de complex toegevoegde is van $g(t)$. Hieraan kunnen we eventueel ook nog een gewichtsfunctie toevoegen.

Indien de verzameling basisvectoren $\{b_\gamma(t)\}$ met $\gamma \in \Gamma$ een orthogonale familie vormt, wat wil zeggen

$$\langle b_{\gamma_1}, b_{\gamma_2} \rangle = \begin{cases} 1 & \text{als } \gamma_1 = \gamma_2, \\ 0 & \text{als } \gamma_1 \neq \gamma_2, \end{cases}$$

dan kunnen we de ontbinding van een functie in termen van de basisvectoren b_γ ,

$$f(t) = \int_{\Gamma} F(\gamma) b_\gamma(t) d\gamma$$

berekenen als:

$$F(\gamma) = \langle f, b_\gamma \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) b_\gamma^*(t) dt.$$

Deze formule kan bijvoorbeeld gebruikt worden om de waarden van $F(\omega)$ in (2) te berekenen.

Om een weg te banen tussen de twee extremen, tijd en frequentie, moeten we op zoek naar basisvectoren die het midden houden tussen de basisvectoren van de impulsdecompositie (1) en de Fourierdecompositie (2). Dit zijn basisfuncties $\phi_\gamma(t)$, ook wel atomen genoemd, die een beperkte voetafdruk hebben in tijd en frequentie. Indien we ervoor kiezen dat

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\phi_\gamma(t)|^2 dt = 1,$$

dan vormt $|\phi_\gamma(t)|^2$ een welgevormde (waarschijnlijkheids)dichtheidsfunctie waardoor we — geïnspireerd door de beschrijvende statistiek — de positie t_γ en breedte $\sigma_{t,\gamma}$ in de tijd van de basisfunctie $\phi_\gamma(t)$ kunnen definiëren als:

$$t_\gamma = \int_{-\infty}^{+\infty} t |\phi_\gamma(t)|^2 dt,$$

$$\sigma_{t,\gamma}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - t_\gamma)^2 |\phi_\gamma(t)|^2 dt.$$

Indien we stellen dat $\Phi_\gamma(\omega)$ de Fouriergetransformeerde is van $\phi_\gamma(t)$ dan kunnen we (op basis van Parsevals theorema) een gelijkaardige positie en breedte in het frequentiedomein berekenen als:

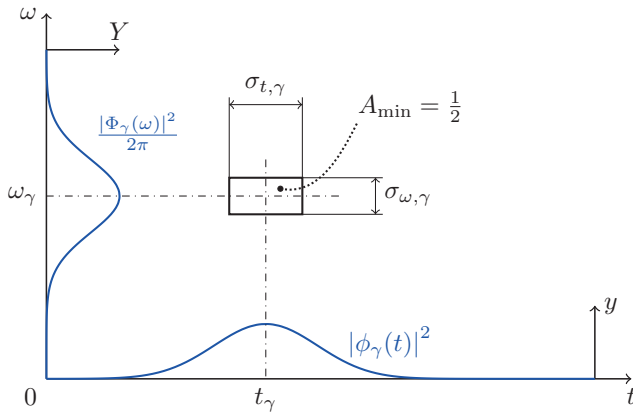
$$\omega_\gamma = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega \frac{|\Phi_\gamma(\omega)|^2}{2\pi} d\omega,$$

$$\sigma_{\omega,\gamma}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (\omega - \omega_\gamma)^2 \frac{|\Phi_\gamma(\omega)|^2}{2\pi} d\omega.$$

De breedte van de atomen is een maat voor hoe gedetailleerd de informatie is die de signaalontbinding ons oplevert. Er blijkt een fundamentele ondergrens aan dit detailniveau te zijn [11], met name

$$\sigma_{t,\gamma} \sigma_{\omega,\gamma} \geq \frac{1}{2}$$

wat we om evidente redenen ook wel het *Heisenberg onzekerheidsprincipe* noemen (zie Figuur 2).



Figuur 2 De minimale afmeting van de atomen $\phi_\gamma(t)$ wordt begrensd door het Heisenberg onzekerheidsprincipe.

Dennis Gabor¹ stelde voor om als atomen de *shiftable windowed Fourier kernel* te gebruiken [7]:

$$\phi_{\tau,\xi}(t) = w(t - \tau) e^{j\xi t}$$

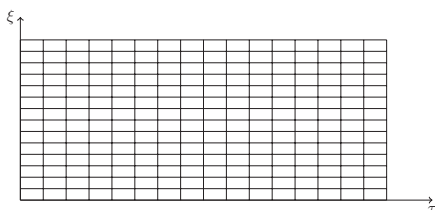
waarbij ξ de hoekfrequentie voorstelt en $w(t)$ een symmetrische, genormaliseerde vensterfunctie is, dat wil zeggen $w(t) = w(-t)$ en $\int_{-\infty}^{+\infty} |w(t)|^2 dt = 1$. Deze verschoven vensterfunctie zorgt ervoor dat de Fourierkern beperkt wordt tot een vast venster rond een vrij gekozen positie τ .

Hierbij moeten we opmerken dat de verzameling Gabor-kernels niet langer een basis vormt voor $L^2(\mathbb{R})$, ze is namelijk overcomplete. We spreken dan ook niet langer over een Gaborbasis, maar over een Gaborwoordenboek. Het Gaborwoordenboek vormt het fundament voor de short-time Fouriertransformatie S.

$$\begin{aligned} f(t) \xrightarrow{S} F(\tau, \xi) &= \langle f, \phi_{\tau, \xi} \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) w(t - \tau) e^{-j\xi t} dt \end{aligned}$$

Dikwijls geeft men $|F(\tau, \xi)|^2$ grafisch weer als een zogenaamd *spectrogram*. Het feit dat de atomen een vaste breedte hebben in tijd en frequentie, levert een spectrogram met uniforme dekking op (zie Figuur 3).

Men kan aantonen dat de inverse transformatie bestaat en gelijk is aan



Figuur 3 Uniforme dekking van de tijd-frequentieruimte door de short-time Fourier-atomen.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau, \xi) w(t - \tau) e^{j\xi t} d\xi d\tau$$

waaruit blijkt dat de voorstelling van Figuur 3 waarbij de atomen naast elkaar worden voorgesteld niet correct is. Eigenlijk hebben we een oneindig dichte dekking van het τ, ξ vlak nodig om het oorspronkelijke signaal te reconstrueren.

Wavelets

Een fundamenteel nadeel van het gebruik van vaste vensterfuncties is dat ze atomen met een constante breedte opleveren, zowel in tijd als in frequentie, en dat is waar Jean Morlet tegenaan liep. Samen met Grossmann ontwikkelt hij een theorie om signalen te analyseren op basis van basisfuncties die net zoals de basisfuncties van Gabor gelokaliseerd zijn in tijd en frequentie, maar ditmaal met een variabele breedte. Het is op dat ogenblik dat Meyer de preprint van Morlet en Grossmann in handen krijgt, en onmiddellijk de trein neemt naar Marseille, om met hen samen te werken. Daar ontmoet hij ook Ingrid Daubechies. Hij was, zoals hij het zelf zegt [5], als het ware de vierde musketier.

We starten met een generatorfunctie $\psi(t)$, de *moederwavelet* genaamd, die dan geschaald en verschoven wordt:

$$\psi_{\tau,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t - \tau}{s}\right), \quad s \in \mathbb{R}_0, \tau \in \mathbb{R}.$$

De factor $1/\sqrt{s}$ zorgt ervoor dat elke wavelet ongeacht zijn schaling dezelfde lengte $\|\psi(t)\|$ heeft.

Zo krijgen we dan de *continue wavelettransformatie* (CWT):

$$f(t) \xrightarrow{W} F(\tau, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^*\left(\frac{t - \tau}{s}\right) dt.$$

Net zoals bij de short-time Fouriertransformatie, wordt $|F(\tau, s)|^2$ ook hier frequent grafisch weergegeven in een zogenaamd *scaleogram*.

Om een bruikbare wavelettransformatie op te leveren die ook omkeerbaar is, moet de moederwavelet voldoen aan de *toelaatbaarheidsvoorwaarde*:

$$0 < C_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < +\infty \quad (3)$$

waarbij we veronderstellen dat $\psi(t) \xrightarrow{F} \Psi(\omega)$. Vaak worden wavelets genormaliseerd zodanig dat $C_\psi = 1$. De vergelijking (3) betekent impliciet dat $\Psi(0) = 0$, waardoor de gemiddelde waarde van $\psi(t)$ nul moet zijn. Anders gesteld: $\psi(t)$ moet een oscillerend karakter hebben, het is dus een golf.

Onder deze toelaatbaarheidsvoorwaarde kunnen we de wavelettransformatie inverteren. Voor reële wavelets kan dit door gebruik te maken van:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s^2} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau, s) \psi_{\tau,s}(t) d\tau ds. \quad (4)$$

Merk op dat in de discussie over wavelets tot nog toe nergens geëist wordt dat de wavelets onderling orthogonaal zijn. Meyer leek toen als eerste² een wavelet voor te stellen (in het frequentiedomein), nu gekend als de Meyer-wavelet (zie Figuur 4) die het mogelijk zou maken om het waveletwoordenboek te beperken tot een (orthogonale) basis [4,14]:

$$\Psi(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{tenzij,} \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{cases} e^{j\omega/2} \sin\left(\frac{\pi}{2} \nu\left(\frac{3|\omega|}{2\pi} - 1\right)\right) & \text{als } \frac{2\pi}{3} \leq |\omega| \leq \frac{4\pi}{3}, \\ e^{j\omega/2} \cos\left(\frac{\pi}{2} \nu\left(\frac{3|\omega|}{4\pi} - 1\right)\right) & \text{als } \frac{4\pi}{3} \leq |\omega| \leq \frac{8\pi}{3}, \end{cases} \end{cases}$$

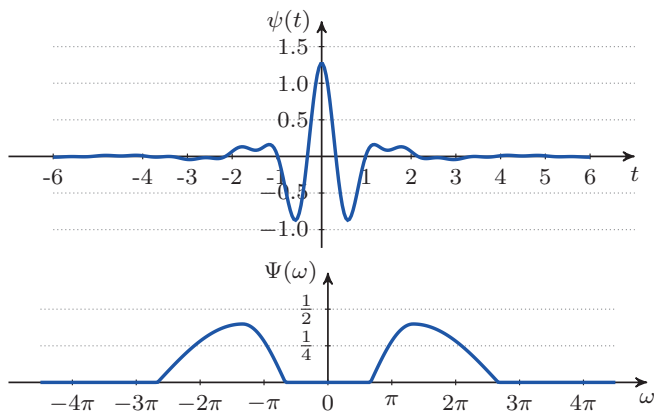
waarbij

$$\nu(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x < 0, \\ x & \text{als } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{als } x > 1. \end{cases}$$

Meyer werkte in die tijd intens samen met Ronald Coifman en Ingrid Daubechies (VUB Brussel, 1987–1994 Bell Labs, 1994–2011 Princeton University, sinds 2011 Duke University) om de wavelettheorie verder te ontwikkelen.

Meyer toonde aan wat voor de short-time Fouriertransformatie niet mogelijk bleek, namelijk dat het aantal waarden van τ en s dat men moest beschouwen kon beperkt worden tot

$$s = s_0^n \quad \text{en} \quad \tau = m s_0^n \tau_0$$



Figuur 4 The Meyer moederwavelet in het tijdsdomein (boven) en het frequentiedomein (onder).

met s_0 een goed gekozen reële schalingsverhouding (verschillend van 0 en 1), τ_0 een goede basisverschuiving en $m, n \in \mathbb{Z}$, waarbij de bekomen set wavelets een orthonormale basis vormt voor $L^2(\mathbb{R})$.

De reconstructieformule (4) beperkt zich dan tot:

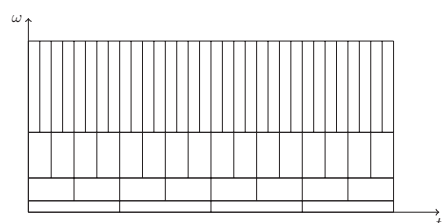
$$f(t) = \frac{1}{2\pi C_\psi} \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} F(ms_0^n \tau_0, s_0^n) \psi_{ms_0^n \tau_0, s_0^n}(t)$$

waarbij vaak gekozen wordt voor $s_0 = 2$ (dyadische wavelets). Dit leidt tot een niet-uniforme dekking van de tijd-frequentieruimte (zie Figuur 5).

Het begrip wavelets kan overigens nog verruimd worden tot bi-orthogonale wavelets. We verlaten dan het idee van een orthogonale waveletbasis die dient om zowel het signaal op te projecteren (analyse) als het te reconstrueren (synthese). In plaats daarvan gebruiken we een willekeurige, niet-orthogonale waveletbasis en beschouwen die samen met de bijhorende reciproke basis. Een dergelijk stel van twee basissen noemen we bi-orthogonaal. De enige voorwaarde waaraan een waveletbasis moet voldoen om een volledige reconstructie mogelijk te maken is:

$$A^2 \leq \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{ms_0^n \tau_0, s_0^n}(t) \rangle|^2 \leq B^2$$

voor een willekeurige $f \in L^2(\mathbb{R})$ en



Figuur 5 Niet-uniforme dekking van de tijd-frequentieruimte door de (dyadische) wavelettransformatie-atomen.

$A, B \in \mathbb{R}_0^+$. Als aan deze voorwaarde voldaan is, dan noemen we deze basisfuncties een *frame* [4]. Indien $A = B$, dan spreken we van een *tight frame* en is de basis orthogonaal. De vorige vergelijking kan op die manier beschouwd worden als een veralgemening van het theorema van Plancherel. Als $A \neq B$, dan kan een reciproke basis gevonden worden (in waveletterminologie een *duaal frame*), die volledige reconstructie toelaat. Het zijn dergelijke bi-orthogonale (Cohen–Daubechies–Feauveau [1]) wavelets die ook in de JPEG2000-compressiestandaard worden gebruikt. Indien u een film in digitaal formaat bekijkt is de kans groot dat deze wavelets achter de schermen aan het werk zijn.

Multiresolutie-analyse

Toen Meyer in 1986 in de Verenigde Staten van Amerika een cursus over wavelets verzorgde, werd hij gecontacteerd door een landgenoot die aan de Universiteit van Pennsylvania doctoraatsonderzoek deed naar beeldverwerking: Stéphane Mallat [9]. Mallat, toen slechts 23 jaar, had het briljante inzicht dat verschillende wetenschappelijke community's eigenlijk met hetzelfde onderwerp bezig waren: hij, als beeldverwerker met piramide-algoritmes, de signaalverwerkers met subband coding, de spraakverwerkers met kwadratuurspiegelfilters en de fysici met wavelets. Meyer, toen 47 jaar oud, had de gave om deze jonge hengst naar waarde te schatten en hem te helpen zijn punt te bewijzen. Op korte tijd ontwikkelden ze samen fundamentele inzichten die bekend zouden worden als multiresolutie-analyse en die iedereen plots deed beseffen dat ze allen hetzelfde probleem aan het oplossen waren. De artikelen die hun inzichten beschrijven (onder

andere [12]), verschenen met als enige auteur Stéphane Mallat, een indrukwekkende generositeit van Meyer. De ingenieurs die zich bezigielden met signaalverwerking werden zo plots intense gebruikers van de theorie der wavelets waar ze tot dan toe minachtend op neerkeken als *Spielerei* van de wiskundigen.

Het idee is dat wavelets toelaten om $L^2(\mathbb{R})$ te beschouwen als een sequentie van in elkaar gesloten ‘multiresolutie’ subruimtes V_i met

$$\{0\} \subset \dots \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \subset \dots \subset L^2(\mathbb{R})$$

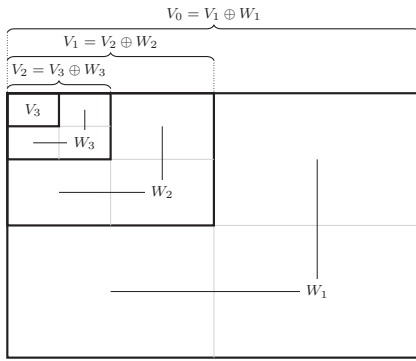
waarbij we een signaal f uit de ruimte $L^2(\mathbb{R})$ kunnen benaderen door het te projecteren op V_i wat benaderingen oplevert van het signaal f met voor dalende indexen i een stijgende nauwkeurigheid. Die stijgende nauwkeurigheid benoemen we als stijgende *resolutie* (vermogen om fijne details te beschrijven). Om te kunnen spreken van een multiresolutie-analyse moeten de verzamelingen V_i aan een aantal voorwaarden voldoen zoals (1) translatie-invariantie voor gehele veelvouden van 2^i binnen het resolutieniveau, (2) schalingsinvariantie met schalingsfactor 2^{j-i} tussen de niveaus en (3) genereerbaarheid van de subruimte V_0 op basis van een eindig aantal zogenaamde *schalingsfuncties*.³ Dit laatste wil zeggen dat de schalingsfunctie(s) en hun getransleerde varianten de subruimte V_0 volledig opspannen. Indien we een goede (set) schalingsfunctie(s) kunnen bepalen zodat de unie van alle subruimtes *topologisch dicht* is in $L^2(\mathbb{R})$, en de subruimtes orthogonaal zijn, dan kunnen we spreken van een multiresolutie-analyse. Dit wil zeggen dat we elke signaal $f \in L^2(\mathbb{R})$ met een arbitraire resolutie kunnen benaderen.

Ook hier bewijst orthogonaliteit zijn dienst. Als we vertrekken van een schalingsfunctie $\phi(t)$ die orthogonaal is ten opzichte van zijn verschoven varianten en een beperkte voetafdruk heeft, dan kunnen we omwille van dit laatste eenvoudig aantonen dat de schalingsfunctie van V_0 kan geschreven worden als een eindige lineaire combinatie van de (getransleerde) schalingsfuncties op niveau V_{-1} (immers $V_0 \subset V_{-1}$):

$$\phi(t) = \sum_i \alpha_i \phi(2t - i). \tag{5}$$

Indien we de bijhorende moederwavelet $\psi(t)$ definiëren als

$$\psi(t) = \sum_i \beta_i \phi(2t - i) \text{ met } \beta_i = (-1)^i \alpha_{-i} \tag{6}$$



Figuur 6 Multiresolutie-analyse voor digitale beelden.

dan kan men aantonen dat de ruimte W_0 die door $\psi(t)$ en haar geschaalde varianten wordt opgespannen (die ook samen een orthogonale verzameling functies vormen) ook een deel is van V_0 . De specifieke keuze van $\psi(t)$ door een omgekeerde en altemnerende sequentie van a_i te nemen in combinatie met de orthogonaliteit van de schalingsfuncties, leidt tot $W_0 \perp V_0$ en ook $V_{-1} = V_0 \oplus W_0$. De sequentie a_i noemt men doorgaans de *scalingsgetallen* en de sequentie $(-1)^i a_{-i}$ de *waveletgetallen*. De subruimten V_i en W_i noemen we respectievelijk schalingsruimten en waveletruimten op niveau i .

Multiresolutie-analyse wordt heel aanschouwelijk indien we het toepassen op digitale beelden. Bij tweedimensionale discrete wavelettransformaties organiseert men de berekening meestal zodanig dat



Figuur 7a Foto (512x800) van een monumentale bogenrij in Città Di Castello (Italië).



Figuur 7c Reconstructie van de foto uit Figuur 7a waarbij enkel de V_3 -benadering gebruikt werd. Deze benadering gebruikt slechts 1/64 van de hoeveelheid gegevens van de oorspronkelijke foto; het kwaliteitsverlies is merkbaar.

de projectiecoëfficiënten van V_i op V_{i+1} terecht komen in het linkse, bovenste kwadrant van de figuur. De projectiecoëfficiënten op W_{i+1} komen terecht in de drie overige kwadranten. De recursieve toepassing van dit principe wordt geïllustreerd in Figuur 6.

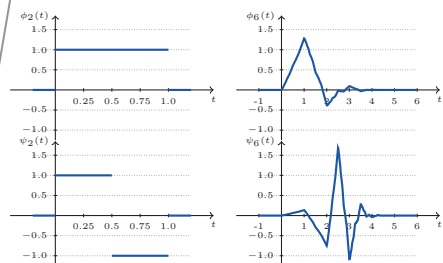
We pasten dit principe toe op de foto van Figuur 7a. Driemaal toepassen van deze multiresolutie-projectiestap, levert ons het beeld van Figuur 7b. De reconstructie van de foto op basis van V_3 levert het resultaat van Figuur 7c op. Merk op dat we deze foto kunnen reconstrueren met slechts 1/64 van de originele hoeveelheid gegevens. Dit is meteen ook een illustratie van het gebruik van wavelets om gegevens (met verlies van nauwkeurigheid) te comprimeren. Een betere keuze van wavelet (bijvoorbeeld Daubechies-6, zie Figuur 7d) met een iets fijnzinnigere compressiemethode (verwaarlozen van de waveletcomponenten kleiner dan 4 procent van de maximale componentwaarde) in plaats van het domweg negeren van alle W_1 - tot en met W_3 -componenten), leidt tot een gecompriemd beeld dat op de afdrukgrootte en met slechts 1/6 van de originele hoeveelheid gegevens met het blote oog niet te onderscheiden is van het origineel.

De jacht op wavelets

Tot voor Meyers ontmoeting met Mallat werden wavelets ad hoc opgesteld. Ver-



Figuur 7b Multiresolutie-analyse van de foto uit figuur 7a op basis van Haarwavelets (zie ook Figuur 6).



Figuur 7d Illustratie van de moederschaalfunctie ($\phi(t)$) en de moederwaveletfunctie ($\psi(t)$) voor de Haarwavelets (links) gebruikt in deze figuur en de Daubechies-6 wavelets (rechts) van het compressievoorbeeld (uit de tekst).

gelijkingen (5) en (6) leveren echter een systematische constructieprocedure op om orthogonale wavelets met een beperkte voetafdruk op te stellen. Hoewel dit al een hele stap vooruit is, laat dit nog de opening voor doordachte keuzes wat betreft de schalingsgetallen α_i .

Een van de doelstellingen zou immers kunnen zijn om bij de ontbinding van niveau V_{i-1} in $V_i \oplus W_i$, die we gemakkelijksheidshalve even voorstellen als:

$$f_{V_{i-1}} = f_{V_i} + f_{W_i}$$

zoveel mogelijk signaalenergie naar het schalingsdeel te leiden ($\|f_{V_i}\|^2 \gg \|f_{W_i}\|^2$). Dit schalingsdeel noemt men gewoonlijk de trend van het signaal en het waveletdeel de fluctuatie. Indien we even een sprongetje maken naar de discrete wavelettransformatie, dan wil dit zeggen dat de fluctuatiecoëfficiënten kleiner zullen zijn dan de waveletcoëfficiënten en we ze dus met minder bits kunnen coderen dan het schalingsdeel. Dit laat effectief toe om signalen (of beelden) te comprimeren zonder noemenswaardig verlies aan detail. We kunnen de signaalenergie in het waveletdeel beperken door de wavelets (c.q. de waveletgetallen) zo te kiezen dat ze zoveel mogelijk waveletmomenten

$$M_{p,\psi} = \int_{-\infty}^{+\infty} t^p \psi(t) dt$$

nul maken. De toelaatbaarheidsvoorwaarde leerde ons eerder al dat $M_{0,\psi} = 0$. We illustreren dit verband tussen deze momenten en de signaalenergie in het waveletdeel voor zachtglooiende signalen. Beschouw als voorbeeld een signaal f met N continue afgeleiden in de buurt van t_0 . We kunnen f in dit continue deel rond t_0 schrijven als een afgebroken Taylorreeks rond t_0 (waarbij $t_c \in [t_0, t]$):

$$f(t) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{i!} f^{(i)}(t_0) (t - t_0)^i + \frac{1}{N!} f^{(N)}(t_c) (t - t_0)^N$$

Voor het gemak van de notatie veronderstellen we dat de wavelets reëel zijn en dat $t_0 = 0$ en $t_c = c$. Indien we dit deel van het signaal projecteren op een wavelet die zich concentreert in de buurt van $t_0 = 0$, dan krijgen we (wegens de lineariteit van het scalair product en dus ook de wavelettransformatie):

$$\begin{aligned}
F(0,s) &= \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t}{s}\right) \right\rangle \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} \left\langle t^i, \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t}{s}\right) \right\rangle \\
&\quad + \frac{f^{(N)}(c)}{N!} \left\langle t^N, \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t}{s}\right) \right\rangle \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} \int_{-\infty}^{+\infty} t^i \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t}{s}\right) dt \\
&\quad + \frac{f^{(N)}(c)}{N!} \int_{-\infty}^{+\infty} t^N \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t}{s}\right) dt \\
&\downarrow \text{substitueer } w = t/s \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} s^{i+\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} w^i \psi(w) dw \\
&\quad + \frac{f^{(N)}(c)}{N!} s^{N+\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} w^N \psi(w) dw \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} s^{i+\frac{1}{2}} M_{i,\psi} \\
&\quad + \frac{f^{(N)}(c)}{N!} s^{N+\frac{1}{2}} M_{N,\psi}.
\end{aligned}$$

Indien we er in slagen om de wavelet-momenten $M_{0,\psi}$ tot en met $M_{N-1,\psi}$ nul te

maken (door een gerichte keuze van de a_i), dan is $\langle f, \psi(\frac{t}{s}) \rangle = O(s^{N+\frac{1}{2}})$ en vermoedelijk klein. Dit idee vormt het fundament van de Daubechieswavelets (waarvan de Haar-wavelets een bijzonder geval vormen).

Later

Door het lezen van een artikel waarin gepostuleerd wordt dat de Navier–Stokes-vergelijkingen kunnen opgelost worden met behulp van wavelets, belandt Meyer in wat hij zelf noemt zijn Navier–Stokes-periode. Hij werkt later onder andere ook nog op compressed sensing [3], een techniek om uit een beperkt aantal samples van een signaal (te klein om te voldoen aan het bemonsteringstheorema van Shannon) toch het oorspronkelijke signaal te reconstrueren.

In 2010 wint hij de Gaussprijs, een prijs die toegekend wordt aan een persoon die belangrijk wiskundig werk geleverd heeft dat ook toepassingen kent buiten de wiskunde. De JPEG2000-standaard voor compressie van digitale beelden is bijvoor-

beeld een gevolg van het werk van Meyer op gebied van wavelets. Recent nog, in 2015, werden de eerste gravitatiegolven waargenomen (bij de botsing van twee zwarte gaten), met een techniek die gebruikmaakt van wavelets.

Voor de volledigheid vermelden we nog even dat Meyer van 1985 tot 1996 aan de Université Paris-Dauphine werkte, van 1995 tot 1999 onderzoeksdirecteur was aan het Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS), om dan aan de  cole Normale Supérieure de Cachan te gaan werken, waar hij in 2003 emeritus werd. Maar zoals zovele gepassioneerde wetenschappers lijkt het woord emeritaat niet aan Meyer besteed.

Het bredere kader

Onze wandeling door de wereld van de wavelets werd sterk gekleurd door onze gids, Yves Meyer. Voor een iets ruimer kader verwijzen we graag naar de geciteerde literatuur en naar het fijne artikel van collega Ooninckx [16].

Noten

- 1 Dennis Gabor (1918–2006), Hongaars-Britse ingenieur en fysicus, heeft twee belangrijke bijdragen aan de wetenschap geleverd: de holografie (waarvoor hij ook de Nobelprijs ontving) en de short-time Fouriertransformatie of Gabortransformatie.
- 2 Een Zweeds wiskundige, Jan-Olov Strömberg, deed reeds enkele jaren voordien een eerste voorstel tot orthogonale wavelet en ook Alfr d Haar deed het hem vele jaren eerder voor (omstreeks 1910). Meyer heeft overigens achteraf Jan-Olov gefeliciteerd als ‘de echte vader van de wavelets’.
- 3 De schalingsfuncties worden ook wel eens vaderwavelets genoemd.

Referenties

- 1 A. Cohen, I. Daubechies en J.C. Feauveau, Biorthogonal bases of compactly supported wavelets, *Communications in Pure & Applied Mathematics* 45 (1992), 485–560.
- 2 R. Coifman, A. McIntosh en Y. Meyer, The Hilbert transform on Lipschitz curves, *Mini-conference on Partial Differential Equations*, Centre for Mathematical Analysis, The Australian National University, Canberra, 1982, pp. 26–69.
- 3 I. Daubechies, Yves Meyer–Gauss Prize 2010, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Hyderabad, India, 2010.
- 4 I. Daubechies, A. Grossmann en Y. Meyer, Painless nonorthogonal expansions, *Journal on Mathematical Physics* 27(5) (1986), 1271–1283.
- 5 B.I. Dundas, Interview with Abel Laureate Yves Meyer, *Newsletter of the EMS* (September 2017), 14–22.
- 6 J. Fourier, *Th orie analytique de la chaleur*, Firmin Didot P re et Fils, Paris, 1822.
- 7 D. Gabor, Theory of Communication, *Journal of the Institution of Electrical Engineers, part III, Radio and Communication* 93 (1946), 429–457.
- 8 O. Heaviside, *Electromagnetic Theory*, Vol. II, ‘The Electrician’ Printing and Publishing Company Ltd., London, 1899.
- 9 B. Hubbard, *The World According to Wavelets*, A.K. Peters, 1996, pp. 38–51.
- 10 P.J. Lu en P.J. Steinhardt, Decagonal and Quasi-Crystalline Tilings in Medieval Islamic Architecture, *Science* 315(5815) (2007), 1106–1110.
- 11 S. Mallat, *A Wavelet Tour of Signal Processing (The Sparse Way)*, 3rd Edition, Academic Press, 2008.
- 12 S. Mallat, A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 11(7), (2007), 674–693.
- 13 Y. Meyer, *Nombres de Pisot, Nombres de Salem et Analyse Harmonique*, Lecture Notes in Mathematics, Springer, 1970.
- 14 Y. Meyer, *Ondelettes et opérateurs*, Vol. I–III, Actualités Mathématiques, Hermann, 1990.
- 15 Y. Meyer en B. Weiss, Les produits de Riesz sont des Bernoulli shifts, *Séminaire de probabilités de Rennes*, 1974.
- 16 P. Ooninckx, Wavelets: een hype of toch meer? *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/2(2) (juni 2001), 120–126.
- 17 U. Persson, An EMS interview with Yves Meyer, part I and II, *IAMP News Bulletin* (July 2011), 4–11; (October 2011), 6–14.
- 18 A. Zygmund, *Trigonometric Series*, Vol. 1 en 2, Cambridge University Press, 2002.