Wim Caspers
Lyceum Ypenburg, Den Haag, en
Faculteit EWI en Lerarenopleiding, TU Delft
w.t.m.caspers@tudelft.nl

Onderwijs Bespreking examen vwo wiskunde B 2017

Het wiskunde B-examen verandert

Het wiskunde B-examen van 2017 is de laatste reguliere editie van het oude programma op het vwo — vanaf 2018 gelden er andere eindtermen. Op kleine schaal wordt het nieuwe programma al geruime tijd getoetst op zogeheten pilotscholen. De pilotexamens geven een beeld van wat de leerlingen de komende jaren te wachten staat. Wim Caspers, lerarenopleider en ook zelf docent wiskunde, bespreekt de opvallendste verschillen tussen de oude en de nieuwe examens.

Wie het reguliere examen van 2017 graag wil bekijken, kan natuurlijk terecht op www.examenblad.nl. Bovendien heeft K.P. Hart het afgelopen centrale examen wiskunde B inclusief het tweede tijdvak uitgebreid besproken in zijn weblog [1] en Joost Hulshof heeft zijn licht laten schijnen over de analyse-opgaven in het examen [2]. In de *WiskundE-brief* nummer 783 is een kleine analyse opgenomen en er wordt gemeld dat het gemiddelde cijfer 7,2 bedroeg, opvallend hoog [3]. Tijd om het oude examen achter ons te laten en de blik te richten op het nieuwe. Dat bepaalt de horde die leerlingen vanaf komend jaar moeten nemen om toegang te krijgen tot een academische technische studie.

Analyse

De belangrijkste verandering zit hem in de meetkunde, waarover later meer. Op het gebied van de analyse zijn de veranderingen niet zo groot. Nieuwkomers zijn onder andere limieten, inverse functies, scheve asymptoten, meer aandacht voor de absolute-waardefunctie, voor de tangens en voor stelsels vergelijkingen. Daar staat minder aandacht voor onder andere differentiequotiënten, Riemannsommen en cirkelbewegingen tegenover. En in alle nieuwe wiskundeprogramma's (dus ook voor wiskunde A, C en D) spelen wiskundige denkactiviteiten (probleemoplossen, abstraheren, redeneren en bewijzen) een grotere rol.

Van de veranderingen op het gebied van de analyse komt de inverse functie als eerste aan bod in het examen, in de opgave 'Een gebroken functie'. De functie f is gegeven door

$$f(x) = \frac{5}{4x-6}.$$

En de grafiek van f wordt a eenheden naar boven verschoven. Zo ontstaat de grafiek van g. (Dan blijkt dat ook naar beneden verschoven mag worden, omdat een negatieve a toegestaan wordt.) Gesteld wordt dat g een inverse functie heeft en dat de grafiek van die inverse functie één verticale asymptoot heeft, net als de grafiek van g. Gevraagd wordt de waarden van a te bepalen waarvoor de afstand tussen deze twee verticale asymptoten gelijk is aan 4. Voor iemand die niet na wil denken is het nog best een klus om de inverse functie en bijbehorende verticale asymptoten te bepalen. Een onderdeel dus waar nadenken loont.

Dat is minder het geval bij het andere nieuwe analyseonderdeel; het vinden van de waarde van p waarvoor de grafiek van f_p een perforatie heeft, waarbij

$$f_p(x) = \frac{px^2+4px+6}{(x^2+1)(x-2)}.$$

Overigens wordt de hernieuwde aandacht voor de absolute-waardefunctie en limieten duidelijk uit de tweede opgave uit het herexamen. Daar wordt de functie met voorschrift

$$f(x) = 4e^{2-x} + |8-4x|$$

met raaklijnen in $P(2,4)$ aan het 'linkerdeel van de grafiek' en het 'rechterdeel van de grafiek' onderzocht. Ook moet de asymptoot van de grafiek gevonden worden.

Meetkunde

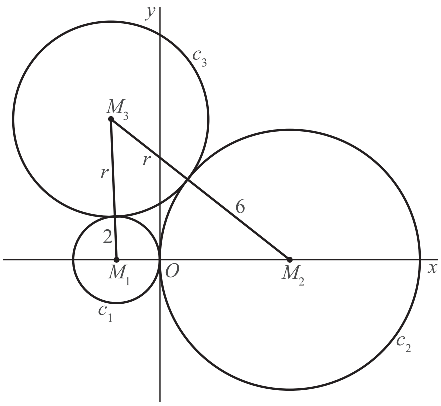
Het aandeel meetkunde is aanzienlijk in het pilotexamen. Zoals gezegd is de verandering in dat domein ook het grootst. Nieuw is de analytische meetkunde (tweedimensionaal). Vectoren, inproduct en cirkelvergelijkingen hebben de plaats ingenomen van de koordenvierhoekstelling en de constante hoek, middelpuntshoek en omtrekshoek. De stelling van Thales, gelijkvormigheid en dergelijke zaken maken nog wel onderdeel uit van het programma.

De meest interessante opgave gaat over twee cirkels c_1 en c_2 in een assenstelsel, met een derde cirkel c_3 die de twee andere raakt (zie Figuur 1). De grootte van $\angle M_1M_2M_3$ is afhankelijk van de straal r van de derde cirkel. Gezocht wordt de limiet waar de grootte van $\angle M_1M_2M_3$ tot nadert als 'r onbegrensd toeneemt'. Het is begrijpelijk dat er in het examen een tussenstap wordt ingelast waarin (bijvoorbeeld met de cosinusregel) moet worden aangetoond dat

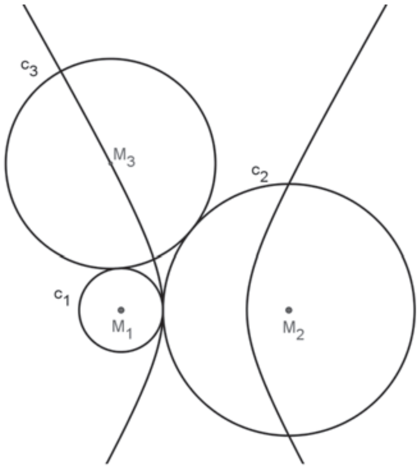
$$\cos(\angle M_1M_2M_3) = \frac{r+12}{2r+12}$$

en dan ligt de limiet voor het grijpen. Een leerling die wiskunde D heeft gevolgd en dus iets van kegelsneden afweet, bedenkt misschien wel dat middelpunt M_3 op een hyperbool met brandpunten M_1 en M_2 ligt, want het verschil van de afstanden M_1M_3 en M_2M_3 is 4 (zie Figuur 2). Een vergelijking van die hyperbool in het gegeven assenstelsel is

$$\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1.$$



Figuur 1



Figuur 2

De gevraagde limiet is de grootte van de hoek die een asymptoot van de hyperbool met de lijn M_1M_2 maakt.

De laatste vraag over deze situatie gaat over het geval dat de derde cirkel de x-as raakt (zie Figuur 3). Het is misschien wel het onderdeel waarin het grootste beroep wordt gedaan op het probleemoplossend vermogen van de leerling. Voornoemde wiskunde D-leerling zou zijn toevlucht kunnen nemen tot het bepalen van het snijpunt van de hyperbool met de parabool met brandpunt M_1 en richtlijn $y=-2$ (zie Figuur 4), want de afstand van M_3 tot die richtlijn is $r+2$, precies de afstand van M_3 tot M_1. En M_3 ligt ook op de parabool met brandpunt M_2 en richtlijn $y=-6$ (zie Figuur 5). Dus oplossen van de vergelijking

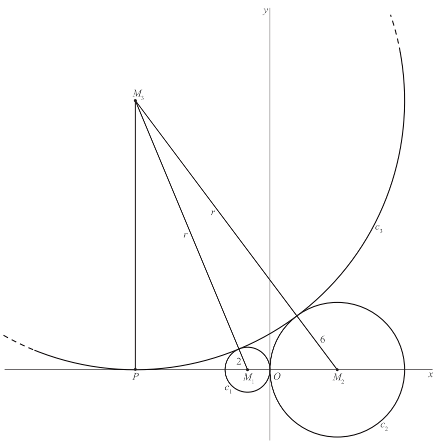
$$\frac{1}{4}(x+2)^2 - 1 = \frac{1}{12}(x-6)^2 - 3$$

is voldoende. Een leerling met alleen wiskunde B in zijn pakket neemt waarschijnlijk zijn toevlucht tot gelijkvormigheid.

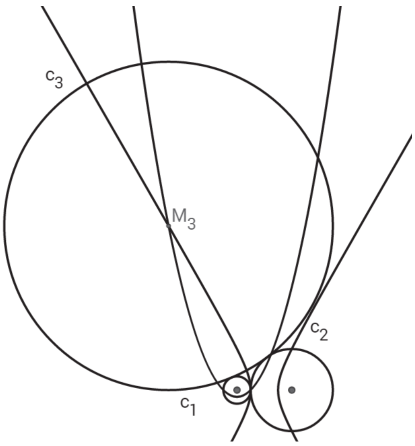
In het oude programma stonden parametervoorstellingen van 'figuren van Lissajous' in het domein goniometrische functies. In het nieuwe examenprogramma maakt de 'baan van een bewegend punt' deel uit van het meetkundedomein. Zodoende worden in het examen vragen gesteld over een punt met bewegingsvergelijkingen

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t) + \sin(2t), \\ y(t) = 2\cos(t), \end{cases}$$

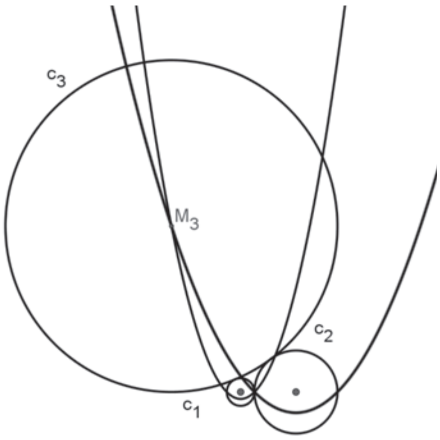
met t in seconden en x en y in meters. Dit levert niet een opgave op met het hoogste gehalte aan benodigde wiskundige denkactiviteiten. Plichtmatig toepassen van gonioformuletjes leidt naar de oplossing.



Figuur 3



Figuur 4

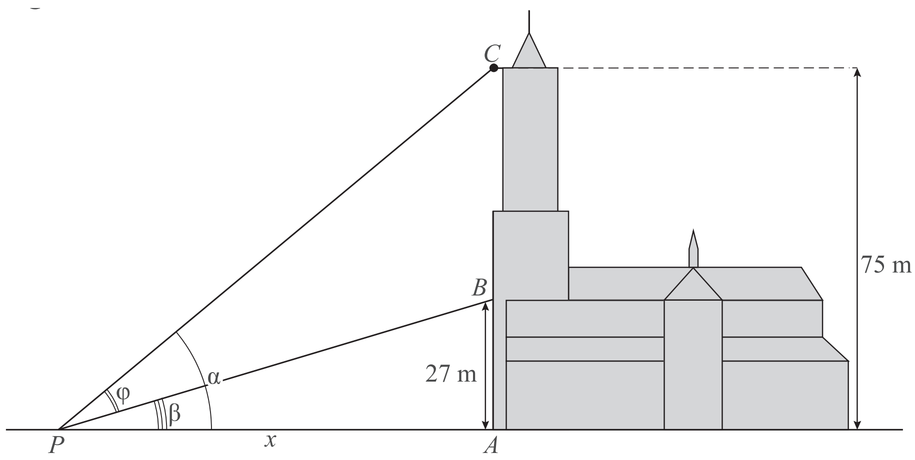


Figuur 5

Denkactiviteiten

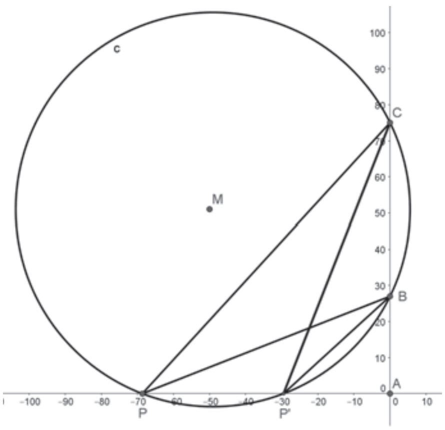
Tot slot een opgave uit het herexamen waar het beroep op wiskundige denkactiviteiten (probleemoplossen, abstraheren, redeneren en bewijzen) ook niet volledig tot zijn recht komt, hoewel denkactiviteiten expliciet vermeld worden in het examenprogramma. In de laatste meetkundeopgave wordt de Eusebiuskerk in Arnhem opgevoerd. Gezocht wordt naar de optimale afstand x waarvoor hoek φ zo groot mogelijk is. De opgave leidt de leerling in onderdelen, via een verschilformule voor de tangens, naar de uitdrukking

$$\tan(\varphi) = \frac{48x}{x^2 + 2025}$$

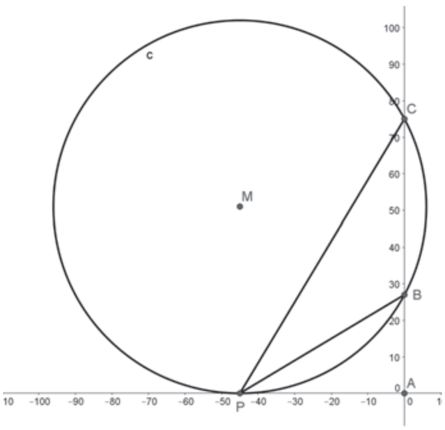


Figuur 6 Eusebiuskerk in Arnhem.

en dan wordt er een maximum gezocht. In de nascholing ‘Wiskundige denkactiviteiten’ van het vaksteunpunt Delft/Leiden [4] werd een dergelijke kwestie zonder al die tussenstappen voorgelegd aan de deelnemende vo-docenten. Gebruik van een programma als GeoGebra helpt dan om grip te krijgen op de situatie. In Figuur 7 is te zien dat de bedoelde hoek bij P net zo groot is als de hoek bij P'. Ertussenin is de hoek groter, hetgeen doet vermoeden dat Figuur 8 de optimale situatie weergeeft. De x-coordinaat van M is met wat rekenwerk en Pythagoras terug te voeren op $-\sqrt{y_B \cdot y_C}$. En daarmee komt in het geval van de opgave de optimale x heel mooi uit op 45. Te mooi om waar te zijn. Het is ook niet waar.



Figuur 7



Figuur 8

De toren van de Eusebiuskerk is 93 meter hoog [5], dus C bevindt zich hoogstwaarschijnlijk niet op een hoogte van 75 meter.

Leerlingen zijn niet bij voorbaat verzot op examenopgaven die een beroep doen op hun wiskundige denkactiviteiten. Misschien moeten we dat ook maar in minder dwingende omstandigheden dan een centraal examen aan de orde laten komen. Het is dus niet zo erg dat het in dit pilotexamen geen grote rol speelt. Het pilotexamen is met name door de analytische meetkunde wel een verademing na een jaar of acht dezelfde examenstof (en eigenlijk verschilde het de jaren ervoor ook niet veel). Inmiddels zit de eerste generatie leerlingen die in groten getale onderworpen gaan worden aan het examen nieuwe stijl in de zesde klas. Het is nog even afwachten of zij zich ook enthousiast door de analytische meetkunde, limieten en dergelijke heen werken om vervolgens net zo hoog te scoren als de voorgaande generaties. Het zou nog wel eens wennen kunnen zijn.

Referenties

1 hartkp.weblog.tudelft.nl/2017/05/16/eindexamen-wiskunde-b-2017.
2 www.beteronderwijsnederland.nl/wp-content/uploads/2015/07/wiskundeonderspanning.pdf.
3 www.wiskundebrief.nl.
4 Dank aan Jeroen Spandaw.
5 nl.wikipedia.org/wiki/Sint-Eusebiuskerk.