

Jan Draisma

Mathematisches Institut, Universität Bern, en
Technische Universiteit Eindhoven
jan.draisma@math.unibe.ch

De oplossing

Tegenvoorbeelden voor het Helton–Nievermoeden

Het Helton–Nievermoeden zegt dat elke convexe, semialgebraïsche verzameling semidefinit representeerbaar is. In december 2016 is dit vermoeden op spectaculaire wijze met tegenvoorbeelden weerlegd door de Duitse wiskundige Claus Scheiderer. In dit artikel beschrijft Jan Draisma de achtergronden van het vermoeden en de tegenvoorbeelden van Scheiderer.

Polyeders

Sinds het begintijdperk van de wiskundige optimalisering is een centrale rol weggelegd voor *polyeders*: deelverzamelingen van $\mathbb{R}^n$ van de vorm

$$P := \{x \mid Ax \geq b\} \quad (1)$$

waarin A een $m \times n$ -matrix is, $b \in \mathbb{R}^m$ en waarin de ongelijkheid betekent dat $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i$ voor alle $i = 1, \dots, m$.

Het maximaliseren van een lineaire functie over zo'n polyeder kan efficiënt met behulp van inwendige-puntmethoden. De klasse van polyeders is gesloten onder doorsnedes — zet de ongelijkheden onder elkaar — en ook onder lineaire projecties; een algoritmisch bewijs voor dat laatste is *Fourier–Motzkineliminatie*.

Convexe semialgebraïsche verzamelingen

Maar lang niet alle optimaliseringsproblemen zijn recht en hoekig. Veel algemener zouden we een polynomiale functie f willen maximaliseren over een *semialgebraïsche* verzameling $U \subseteq \mathbb{R}^n$, dat wil zeggen een verzameling beschreven door een eindige (syntactisch correcte) formule opgebouwd

uit de coördinaten x_i , reële constanten, de operaties $+$ en $\cdot$ en de symbolen $\geq$, AND, OR and NOT. Door een extra variabele x_{n+1} in te voeren en aan de beschrijving van U de conditie $x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n)$ toe te voegen, mogen we aannemen dat f lineair is. Dan is het maximum van f over U , als het bestaat, gelijk aan het maximum van f over het convexe omhulsel van U . Tarski's quantoreneliminatie impliceert dat dat con-

vexe omhulsel weer een semialgebraïsche verzameling is. Dit leidt tot de volgende centrale vraag:

Vraag: Bestaat er een uniforme beschrijving voor convexe, semialgebraïsche verzamelingen?

Spectraëders en hun projecties

Even terug naar polyeders. De polyeder P in (1) is het beeld van de polyeder

$$Q := \{(y, z, s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mid A(y - z) = b + s \text{ en } y, z, s \geq 0\}$$

onder de projectie $(y, z, s) \mapsto y - z$. Met deze truc kan dus elke polyeder P gezien wor-

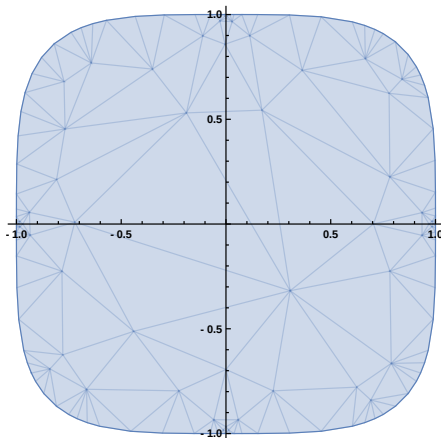


Figuur 1 Twee bekende polyeders.

den als het beeld onder een lineaire projectie van de doorsnede van een geschikte affien-lineaire deelruimte V (hier gegeven door $A(y-z) = b+s$) in een zekere $\mathbb{R}^p$ met het positieve orthant $\mathbb{R}_{\geq 0}^p$. Om ook ronde convexe verzamelingen te kunnen beschrijven, ligt het voor de hand om $\mathbb{R}_{\geq 0}^p$ te vervangen door een goed begrepen andere convexe kegel. Een van de meest bestudeerde kegels is de volgende: vervang $\mathbb{R}^p$ door de vectorruimte van symmetrische $p \times p$ -matrices, en vervang $\mathbb{R}_{\geq 0}^p$ door de kegel C_p van positief semidefiniete matrices, dat wil zeggen symmetrische matrices met alleen maar niet-negatieve eigenwaarden. Een doorsnede van C_p met een affien-lineaire deelruimte heet een *spectraëder*. In tegenstelling tot polyeders blijkt de klasse van spectraëders niet gesloten onder lineaire projecties. Een verzameling in $\mathbb{R}^n$ die het beeld is van een spectraëder onder een lineaire projectie, heet *semidefiniet representeerbaar*. Inwendige-puntmethoden blijken ook te werken voor zulke verzamelingen — al is het voor praktische optimaliseringstoepassingen wel belangrijk dat de semidefiniete representatie niet al te groot is! Door $\mathbb{R}^p$ via diagonaalmatrices in te bedden in $\mathbb{R}^{p \times p}$ vinden we trouwens dat elke polyeder semidefiniet representeerbaar is.

Het Helton–Nievermoeden

Semidefiniet representeerbare verzamelingen zijn semialgebraïsch en convex. In 2006 vroeg Nemirovski in zijn plenaire voordracht op het International Congress of Mathematicians of het omgekeerde ook waar is [4]. Helton en Nie gaven in [1] voldoende voorwaarden voor semidefiniete representeerbaarheid, en vermoedden dat



Figuur 2 Oplossingen van $x^4 + y^4 \leq 1$.

het antwoord op Nemirovski's vraag ja zou moeten zijn:

Het Helton–Nievermoeden. *Elke convexe, semialgebraïsche verzameling is semidefiniet representeerbaar.*

Voorbeeld met Lasserres hiërarchie

Het gebied $U := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 + y^4 \leq 1\}$ is convex en semialgebraïsch. Lezers van mijn leeftijd en ouder zullen er de vorm van een ouderwets televisiescherm in herkennen. Dit gebied blijkt inderdaad de projectie van een spectraëder. In plaats van een zo efficiënt mogelijke presentatie, is hier een presentatie die automatisch uit een constructie van Lasserre komt rollen: als de symmetrische matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & b & c & e \\ a & c & d & h & j \\ b & d & e & i & k \\ c & h & i & l & n \\ e & j & k & n & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 - (l+p) \end{array}$$

positief semidefiniet is, dan hebben al haar hoofddeelmatrices niet-negatieve determinant. En dus geldt achtereenvolgens, door naar geschikte 2×2 -hoofddeelmatrices te kijken, $c \geq a^2$, $l \geq c^2 \geq a^4$, $e \geq b^2$ en $p \geq e^2 \geq b^4$. Ten slotte geeft de component rechtsonder dat $0 \leq 1 - (l+p) \leq 1 - (a^4 + b^4)$. Dus als we bovenstaande geparametriseerde affiene ruimte snijden met C_6 , dan ligt het beeld van die doorsnede onder projectie op het (a, b) -vlak in U . Omgekeerd, als $(x, y) \in U$, dan definiëren we de rijvector $u := [1 \ x \ y \ x^2 \ y^2 \ 0]$ en is de matrix

$$u^T u + \text{diag}(0, 0, 0, 0, 0, 1 - (x^4 + y^4)) = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & y^2 & 0 \\ x & x^2 & xy & x^3 & xy^2 & 0 \\ y & xy & y^2 & x^2y & y^3 & 0 \\ x^2 & x^3 & x^2y & x^4 & x^2y^2 & 0 \\ y^2 & xy^2 & y^3 & x^2y^2 & y^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - (x^4 + y^4) \end{bmatrix}$$

positief semidefiniet en van de vorm hierboven. Dus is U de projectie van een spectraëder. Lasserre introduceerde in [3] een algemene methode om convexe semialgebraïsche verzamelingen U steeds beter te benaderen met projecties van spectraëdra, op een zodanige manier dat — in ieder geval voor compacte U — die projecties convergeren naar U . Maar die methode geeft in het algemeen niet na eindig veel stappen een exacte beschrijving van U .

Overigens is het convexe omhulsel van een compacte semialgebraïsche *kromme*, ingebed in $\mathbb{R}^n$ — zoals hier de kromme met vergelijking $x^4 + y^4 = 1$ in $\mathbb{R}^2$ — altijd semidefiniet representeerbaar [6]. In datzelfde artikel wordt daaruit het Helton–Nievermoeden voor $\mathbb{R}^2$ afgeleid.

Orbitopen

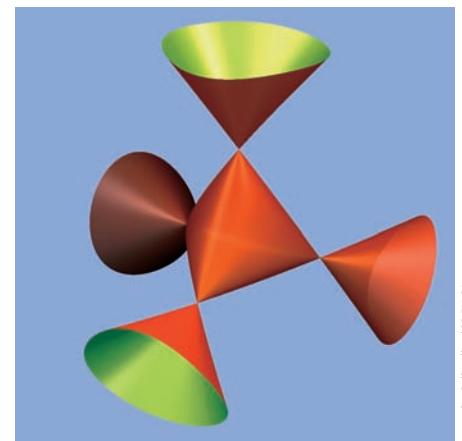
Orbitopen zijn convexe, compacte, semialgebraïsche verzamelingen die als volgt ontstaan. Neem een compacte topologische groep G , een continue representatie van G op een eindig-dimensionale reële vectorruimte V en een element $v \in V$. Dan is het convexe omhulsel U van de baan Gv van v semialgebraïsch, en het heet een orbitopen [5] — een samentrekking van *orbit* (baan) en *polytoop* (begrensde polyeder). De polyedra van Figuur 1 zijn voorbeelden van orbitopen.

Voor een rond voorbeeld nemen we $G = O_n$, de groep van orthogonale matrices die werkt op $V = \mathbb{R}^n$ door middel van matrix-vectorvermenigvuldiging. Dan is het orbitopen van $v \in V$ een bol van straal $\|v\|$. Dit orbitopen is zelf een spectraëder: nemen we voor het gemak $\|v\| = 1$, dan bestaat de bol uit alle vectoren $(x_1, \dots, x_n)$ waarvoor de matrix

$$\begin{bmatrix} 1+x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_2 & 1-x_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ x_n & & & 1-x_1 \end{bmatrix}$$

(met nullen op de lege plekken) positief semidefiniet is.

Een interessanter voorbeeld krijgen we met dezelfde $G = O_n$ en met V de ruimte van symmetrische $n \times n$ -matrices, waarop G werkt via $(g, A) \mapsto gAg^T$. Elke



Figuur 3 Cayley's derdegraads oppervlak.

baan bevat een unieke diagonaalmatrix $D := \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ waarbij $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$. Het convexe omhulsel van de baan van D blijkt te bestaan uit alle symmetrische matrices A met eigenwaarden $\mu_1, \dots, \mu_n$ zo dat voor alle $k = 1, \dots, n-1$ de ongelijkheid $\sum_{i=1}^k \lambda_i \geq \sum_{i \in I} \mu_i$ geldt voor alle $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ van kardinaliteit k en zo dat $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n \mu_i$ — dat volgt uit de klassieke Schur–Hornstelling. Maak nu bij een algemene symmetrische matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ de lineaire afbeelding A_k van het alternerend product $\wedge^k \mathbb{R}^n$ naar zichzelf gedefinieerd door

$$\begin{aligned} A_k(v_1 \wedge \dots \wedge v_k) \\ = \sum_{i=1}^k v_1 \wedge \dots \wedge v_{i-1} \wedge A v_i \wedge v_{i+1} \wedge \dots \wedge v_n. \end{aligned}$$

Dan is de conditie op de eigenwaarden μ_i van A equivalent met de eigenschap dat $(\sum_{i=1}^k \lambda_i)I - A_k$ positief semidefinit is voor elke $k = 1, \dots, n-1$. Dus deze A 's vormen een spectraëder.

In [5] werd de vraag geopperd of elk orbitoep een projectie van een spectraëder is — een speciaal geval dus van het Helton–Nievermoeden. De opgeblazen tetraëder in het midden van Cayley's derdegraads oppervlak (zie Figuur 3) wordt daar aangevoerd als ander voorbeeld van een orbitoep dat zelf al een spectraëder is.

Scheiderers tegenvoorbeelden

Veel convexe semialgebraïsche verzamelingen zijn dus inderdaad semidefinit representeerbaar. Maar in december 2016 weerlegde de Duitse wiskundige Claus Scheiderer uit Konstanz op spectaculaire

wijze het Helton–Nievermoeden, door te laten zien dat heel veel convexe semialgebraïsche verzamelingen in $\mathbb{R}^n$ *geen* projectie van enige spectraëder zijn [7]:

Stelling. *Voor elke semialgebraïsche verzameling $U \subseteq \mathbb{R}^n$ van dimensie tenminste twee bestaat er een polynomiale afbeelding $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ zo dat de afsluiting van het convexe omhulsel van $\phi(U)$ niet semidefinit representeerbaar is.*

Nu zou men kunnen denken, dat op deze manier slechts heel exotische niet semidefinit representeerbare convexe semialgebraïsche verzamelingen geconstrueerd kunnen worden. Maar niets is minder waar. Een concreet voorbeeld aan het einde van Scheiderers artikel is zelfs een orbitoep: laat O_n werken op de d -de symmetrische macht $S^d \mathbb{R}^n$ van $\mathbb{R}^n$ door $(g, v_1 \dots v_d) \mapsto (gv_1) \dots (gv_d)$. Deze vectorruimte heeft dimensie $\binom{n+d-1}{d}$, het aantal monomen in n variabelen van graad precies d .

Stelling. *Als $n, d \geq 4$ met d even, dan is het Veronese orbitoep, het convexe omhulsel van de baan $O_n v^d$ voor een willekeurige $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, niet semidefinit representeerbaar.*

Dit orbitoep hangt nauw samen met vragen die teruggaan tot werk van Hilbert. Elementen van $S^d \mathbb{R}^n$ kunnen worden opgevat als homogene polynomen van graad d in n variabelen. Neem aan dat d even is. De polynomen in $S^d \mathbb{R}^n$ die geschreven kunnen worden als som van



Claus Scheiderer

kwadraten van polynomen van graad $d/2$ vormen een convexe, gesloten kegel $\Sigma_{n,d}$. Deze kegel is bevat in de convexe kegel $P_{n,d} \subseteq S^d \mathbb{R}^n$ van polynomen die overal op $\mathbb{R}^n$ niet-negatieve waarden aannemen. Hilbert liet al zien dat $\Sigma_{n,d} \subsetneq P_{n,d}$ behalve voor $d = 2$ of $n \leq 2$ of $(n, d) = (3, 4)$ [2]. Scheiderer bewijst dat $P_{n,d}$ *geen* semidefinit representatie heeft, behalve in deze uitzonderingsgevallen.

Met Scheiderers werk komt er een abrupt einde aan de hoop dat alle convexe semialgebraïsche verzamelingen semidefinit representeerbaar zouden kunnen zijn. Maar er blijven nog allerlei spannende vragen open, zoals: wat is de laagste dimensie van zo'n tegenvoorbeeld? Misschien drie? ☺

Referenties

- 1 J. William Helton en Jiawang Nie, Sufficient and necessary conditions for semidefinite representability of convex hulls and sets, *SIAM J. Optim.* 20(2) (2009), 759–791.
- 2 D. Hilbert, Über die Darstellung definiter Formen als Summe von Formenquadraten, *Math. Ann.* 32 (1888), 342–350.
- 3 Jean B. Lasserre, Convex sets with semidefinite representation, *Math. Program.* 120(2(A)) (2009), 457–477.
- 4 Arkadi Nemirovski, Advances in convex optimization: conic programming, in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (ICM)*, Madrid, Spain, August 22–30, 2006, Plenary Lectures and Ceremonies, Volume I, European Mathematical Society, 2007, pages 413–444.
- 5 Raman Sanyal, Frank Sottile en Bernd Sturmfels, Orbitopes, *Mathematika* 57(2) (2011), 275–314.
- 6 Claus Scheiderer, Semidefinite representation for convex hulls of real algebraic curves, Preprint, 2012, arXiv:1208.3865.
- 7 Claus Scheiderer, Semidefinitely representable convex sets, Preprint, 2016, arXiv:1612.07048.