

Wim Caspers

Lyceum Ypenburg, Den Haag, en
Faculteit EWI en Lerarenopleiding, TU Delft
w.t.m.caspers@tudelft.nl

Mark Timmer

Carmel College Salland, Raalte, en
ELAN, Vakgroep Docentontwikkeling, Universiteit Twente
m.timmer@utwente.nl

Boekbespreking Ronald Meester en Joost Hulshof: Wiskunde in je vingers

Hogere wiskunde omlaaghalen

“Een oppepcursus voor liefhebbers en andere freaks”, zo omschrijven Ronald Meester en Joost Hulshof hun boek $W=\{kunde\} \frac{in}{je}$ vingers. Wim Caspers en Mark Timmer, allebei docent aan een middelbare school en lerarenopleider, bekeken het boek ieder vanuit beide rollen en gingen op bezoek bij de auteurs. Directe aanleiding is het gratis online beschikbaar stellen van het boek door de uitgever.

De eerste zin van het voorwoord vat het boek goed samen: “In dit boek zetten we een aantal basisbegrippen uit de wiskunde in een wat ander daglicht dan gebruikelijk”. Het betreft een breed scala aan onderwerpen: algebra, differentiaalrekening, integraalrekening, e , π , oneindigheid, combinatoriek, kansrekening, maattheorie en de normale verdeling; het komt allemaal aan de orde.

Het boek is gebaseerd op twee readers die de auteurs maakten voor een nascholing voor wiskundedocenten, maar de uiteindelijke keuze van onderwerpen is ingegeven door vragen die bij de eerste cursus gesteld werden door de deelnemers. Hulshof geeft een voorbeeld: “Het stuk over toevalsgetallen in de eerste cursus leidde tot allerlei vragen over de wet van grote aantallen en de centrale limietstelling. Dus voor de tweede reader ging Ronald formulertjes uitschrijven, om het uit te rekenen voor een voorbeeldje. Hij had de formule van Stirling nodig en vroeg zich af hoe dat nou precies zat. Ik had net een college gegeven over asymptotische methoden voor integralen en daar was ik juist met die formule begonnen. Dus dat kwam ook in het boek terecht. Dan doe je die berekening, je hebt een integraal voor $n!$ en dan schaal je zijn maximum en je schuift het op en dan zie je dat de functie die je dan krijgt, in feite de e -macht gedeeld is door de rente-op-rentebenadering die was behandeld in de eerste reader. Je ziet dan de overeenkomsten met de rekenpartijen van Ronald voor zijn centrale limietstelling. Zo ontstaat een samenhangend beeld van

die onderwerpen dat je niet ziet als je ze apart behandelt.”

Informatiedichtheid

De auteurs hebben de moeite genomen om veel materie keurig vanaf de basis op te bouwen. In het eerste hoofdstuk vinden we bijvoorbeeld eerst rationale getallen en hun operaties, dan een mooi verhaal over het wel en wee van decimale getallen (inclusief irrationaliteit, repeterende breuken en het feit dat $1 = 0,999\dots$), afgesloten met de vraag hoe oneindig \mathbb{Q} en \mathbb{R} nu eigenlijk zijn. De een-op-eenkoppeling met de natuurlijke getallen voor aftelbaarheid en een diagonaalargument voor de overaftelbaarheid van de reële getallen; het is allemaal onderdeel van het verhaal. Een feest van herkenning voor de lezer die dit inderdaad als ‘oppepcursus’ leest, maar wellicht wel een wat hoge informatiedichtheid voor een nog wat minder gevorderde, nietsvermoedende lezer.

Aanvankelijk bestond de doelgroep van de nascholing waar het boek op is gebaseerd niet alleen uit eerstegraadsdocenten wiskunde, zo vertellen Hulshof en Meester. “We hebben ook geprobeerd om tweedegraadsdocenten naar die eerste nascholing toe te krijgen, maar die vonden het wel aan de moeilijke kant. De bedoeling was echt om het toegankelijk te krijgen voor iedereen die de weggezakte wiskunde, niet alleen B maar ook A, wil ophalen. Het begint dus gewoon met breuken. Natuurlijk hebben we teruggehoord dat er bepaalde passages zijn die mensen gewoon moeilijk vinden. Heel veel positieve reacties vooral: ‘vermakelijk, interessant, leerzaam.’”

Uit de wiskundewereld zelf komt ook wel kritiek. “De filosofie van het boek was: niet meteen zorgen maken over de details, maar wel nauwkeurig te werk gaan. Er zijn vakgenoten die vinden dat je dat anders moet doen. Eerst netjes alles axiomatisch introduceren en dan pas ermee aan het werk gaan. Maar je kunt ook zeggen: we weten uit ervaring hoe we rekenen met die getallen, we weten wat breuken zijn en we weten wat reële getallen zijn. Het roept controverses op als je het woord breuk in plaats van het woord rationaal getal gebruikt of wanneer je die dingen als hetzelfde ziet. Mag je zeggen dat van een derde de noemer drie is? Daar doen we in dit boek niet moeilijk over. Het is wel onze bedoeling om grondig te zijn, maar sommige zaken worden naar achter geschoven.”

Iets dergelijks signaleert Meester in de leerboeken over kansrekening. “Als je nu



Ronald Meester en Joost Hulshof met $W=\{kunde\} \frac{in}{je}$ vingers, VU University Press, 2015, 184 p., ISBN 9789086597154, prijs € 19,95. Gratis pdf, zonder afbeeldingen, is te vinden op www.vuuniversitypress.com/wiskunde-in-je-vingers.

een standaardboek over kansrekening ziet, dan begint dat met definities, uitkomstenruimte, kansmaat, de axioma's van Kolmogorov en dan ga je rekenen en op een gegeven moment komen de stochastische grootheden. Is dat allemaal meteen al nodig? Ik erger me daar al langere tijd aan. Het gaat er namelijk niet om alleen het proces te beschrijven waarmee je kansen uit kan rekenen, maar meer wat het nou betekent om een kans uit te rekenen. Hoe moet ik het interpreteren en hoe en wanneer kan ik het gebruiken?"

Limieten?

Meester en Hulshof proberen zo ver mogelijk bij limieten weg te blijven, en bepalen zo bijvoorbeeld de helling van een polynomiale functie niet door middel van differentiequotienten maar door slimme algebraïsche herschrijvingen. Zo wordt de raaklijn aan de grafiek van $f(x) = x^5$ in het punt (a, a^5) bepaald door te stellen dat

$$f(x) = x^5 = a^5 + (x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4)(x - a),$$

waarin de grote voorfactor voor $x = a$ reduceert tot vijf keer dezelfde term. Natuurlijk moet de formule die je dan krijgt wel iets met wat je de raaklijn in $x = a$ zou willen noemen te maken hebben. Die raaklijn is de grafiek van een functie. Met een schatting voor de fout maak je precies wat je daar mee wilt bedoelen, aldus Meester en Hulshof. Evenzo worden oppervlaktes exact bepaald zonder te primitiveren, door het insluiten met onder- en bovensommen. Fraai en vermakelijk, hoewel niet altijd de meest eenvoudige wijze om tot antwoorden te komen (maar dat hoeft ook niet altijd).

Ook het getal e komt uitgebreid aan de orde (in wat de auteurs het 'centrale hoofdstuk' noemen), waarbij via een rustige opbouw op basis van rente wordt gekozen voor de definitie

$$e^a := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n.$$

Hier wel een limiet overigens dus, van een stijgende begrensde rij, maar dat zulke limieten bestaan is niet heel anders dan 1 als limiet van 0,999... Heel netjes worden vervolgens enige rekenregels bewezen evenals de overeenkomstigheid van de karakterisatie als oneindige som, maar ook wordt zeer uitgebreid stilgestaan bij de vraag of deze definitie wel in de haak is,

door te bewijzen dat e^a eindig is voor iedere $a > 0$. Ook het geval $a < 0$ wordt apart en uitgebreid onder de loep genomen. Een heel zuiver en mooi verhaal.

Humor

Het boek is naast interessant ook gewoon leuk om te lezen. Meester en Hulshof hebben weinig mogelijkheden onbenut gelaten tot een grappige toevoeging of een persoonlijke noot. Deze zijn met name te vinden in de grote hoeveelheid voetnoten die het boek rijk is. De hoofdtekst bevat slechts zo'n twintig pagina's zónder voetnoot, en op de meeste pagina's staan er twee of drie. Soms met nuttige wiskundige toevoegingen of verwijzingen voor de 'liefhebbers' uit de ondertitel, soms met nerdy grapjes voor de 'freaks' ("een goede definitie is per definitie een definitie"), soms met fijne flauwe humor (als je ervan houdt) zoals "de opmerking die je wist dat zou komen" of "meditatie hielp de verleiding van kettingbreuken voor dit boekje te weerstaan".

Ook de index achterin het boek is ongebruikelijk. Die bevat degelijke items als 'e-macht' en 'Banach-Tarski-paradox', maar ook minder voor de hand liggende zaken als 'bits', 'Engeland' en 'strafwerk'. De auteurs lichten toe: "Dan Henry schreef daarover dat je ants en grasshoppers kan onderscheiden onder je lezers:

"We may distinguish between the ants, who read page n before reading page $(n + 1)$, and the grasshoppers who skim and skip until something of interest appears and only then attempt to trace its logical ancestry."

[citaat Daniël Henry, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, Springer, 1981]

Het voorwoord is een soort statement over hoe we tegen de dingen aankijken en daarin wordt beschreven wat er in het boek staat, voor de ants. De index is voor de grasshoppers en we wilden de index ook een beetje grappig maken. Je ziet bijvoorbeeld staan 'zo simpel mogelijk' bij de z en vraagt je af waar dat over gaat. Het nodigt uit om te kijken of het interessant is."

Doelgroep

Naast uitleg is er ook een grote hoeveelheid aan opgaven door het boek heen gegeven. Erg leuk en grotendeels goed te

doen, maar toch jammer dat er geen oplossingen achterin te vinden zijn. Hulshof lachend: "Geen uitwerkingen achterin is misschien ook een beetje een statement in deze tijd. Er zitten wel veel hints in de opgaven zelf trouwens." De auteurs roepen de lezer in het nawoord bovendien nadrukkelijk op om contact te zoeken als ze vragen of suggesties hebben. Het wiskundig niveau van de theorie en de opgaven wisselt van eenvoudig tot behoorlijk pittig, wat het lastig maakt om heel precies een doelgroep van het boek te karakteriseren. Wie wiskunde of de eerstegraads lerarenopleiding wiskunde heeft gestudeerd, zal zeker met het boek uit de voeten moeten kunnen. De combinatie van herkenning, een nieuwe blik op bekende concepten en zo nu en dan ook nog wel eens wat nieuws, maakt het tot een vermakelijke verhandeling. De voorzitter van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren prijst het boek op de achterkant aan als een "mooie bijdrage aan de permanente scholing van docenten", en daar kan het zeker voor gebruikt worden.

De auteurs zouden dat ook toejuichen. "Als een alternatieve kijk op hoe de wiskunde in elkaar zit, zou dit voor lerarenopleidingen een ideaal boekje zijn om te gebruiken. Het geeft hopelijk inzicht in de stof die onderwezen moet worden en helpt ook om te zien hoe die samenhangt met andere zaken. En dat komt de didactiek ten goede. Het is niet uit de hoogte bedoeld om leraren opnieuw op te voeden. Het is echt de bedoeling om hogere wiskunde omlaag te halen. Laten ervaren dat iets wat je eerst heel moeilijk vond door een andere presentatie veel duidelijker wordt."

"Natuurlijk zit er ook een boodschap in dit boekje, daarvoor zijn wij provocerend en eigenwijs genoeg." Meester: "Een filosofie over de didactiek van de wiskunde en een filosofie over de wiskunde zelf. Dat we het niet over alles eens zijn, wordt ook wel duidelijk in het boek. Dat is belangrijk omdat het ingaat tegen de overtuiging dat wiskunde een objectief bouwwerk is waar je eigen mening geen rol meer speelt." Hulshof: "Dat niet iedereen het erover eens is dat 0,9999... gelijk is aan 1, om maar wat te noemen. En dan hebben we het nog niet eens over het keuzeaxioma."

Ondanks hun verschillen van inzicht zien de auteurs mogelijkheden genoeg voor een vervolg. En misschien hoeven we daar niet zo heel lang op te wachten. ☺