

Jaap Korevaar

KdV Instituut voor Wiskunde
Universiteit van Amsterdam
j.korevaar@uva.nl

Evenement Lezingenmiddag 'L.E.J. Brouwer – Haarlems wiskundig wonderkind'

Enkele persoonlijke herinneringen aan L.E.J. Brouwer

Dit jaar is het vijftig jaar geleden dat de bekende Nederlandse wiskundige L.E.J. Brouwer overleed. Ter gelegenheid van dit feit organiseerden het Koninklijk Wiskundig Genootschap samen met de Koninklijke Hollandsche Maatschappij der Wetenschappen op 2 september een lezingenmiddag in het Hodshon Huis in Haarlem, de plaats waar Brouwer een belangrijk deel van zijn jeugd doorbracht. Dit artikel is een weergave van de lezing die Jaap Korevaar op deze middag hield.

L.E.J. Brouwer (Bertus) werd in 1881 geboren te Overschie; zijn ouders (van Friese afkomst) waren onderwijzers. Hij ontwikkelde zich tot een knappe slanke man, die in zijn lange leven veel vrouwen gecharmeerd heeft.

Brouwer ging in 1897 wiskunde studeren in Amsterdam, waar hij in 1907 promoveerde bij D.J. Korteweg, toen de bekendste Nederlandse wiskundige. (Korteweg is later ook internationaal bekend geworden door de Korteweg–de Vries-vergelijking, die een rol speelt in diverse onderdelen van de fysica.)

In 1904 had Brouwer een huisje laten bouwen in Blaricum, het Gooise dorp waar hij (later in een groter huis) zou blijven wonen. Nog in hetzelfde jaar maakte hij kennis met de elf jaar oudere gescheiden vrouw Lize de Holl, met wie hij trouwde. Zij werkte in de apotheek van haar moeder aan de Overtoom (waarboven zij door de week bleef wonen), en zou in 1907 het apothekersdiploma halen. Na een vol leven overleed Brouwer in 1976 als gevolg van een aanrijding dichtbij huis.

Ik zal niet meer zeggen over Brouwers leven, want dan zou ik toch maar anderen napraten, met name de volgende spreker, professor Dirk van Dalen uit Utrecht. Met assistentie van zijn vrouw Dokie heeft hij schitterende biografieën geschreven over Brouwer en zijn werk, zie met name de dikke boeken [7] en [8]. Wie iets korters zoekt kan beginnen met een bijlage van *Vrij Ne-*

derland uit 1981, geschreven door Dirk van Dalen, Hans Freudenthal en Gerrit Krol [6], of met de indringende bespreking van [7] door Tom Koornwinder [15]. Er is natuurlijk heel veel over Brouwer te vinden op internet: diverse artikelen in Wikipedia, en onder meer het biografische artikel door J.J. O'Connor en E.F. Robertson [20] in de St Andrews-reeks.

Brouwer leverde fundamentele bijdragen op twee gebieden van de wiskunde. Hij was een van de grote ontwikkelaars van de *topologie*, populair gezegd, de wiskundige leer van continue vervormingen. Daarbij komt meteen de vraag op of er bij zulke vervormingen iets op zijn plaats kan blijven. Die vraag leidt tot de beroemde dekpuntstellingen van Brouwer. De eenvoudigste zegt het volgende: als je een massieve bol continue naar zichzelf afbeeldt, dan blijft er tenminste één punt op zijn plaats. Algemener geldt dit voor elke begrensde gesloten *convexe* deelverzameling van \mathbb{R}^n . Andere belangrijke topologische resultaten betreffen het begrip dimensie en de graad van een afbeelding.

Brouwer is ook bekend als grondlegger van het *intuitionisme*. Terwijl (onder meer vanwege paradoxen) de grondslagen van de wiskunde internationaal veel aandacht kregen, ontwikkelde hij zijn intuitionistische opzet van de wiskunde. Fundamenteel voor Brouwer is de intuïtie van de *tijd*. We beleven een zekere gebeurtenis, en *later* een andere gebeurtenis. Zo ont-

staat ook het begrip tellen, en ontstaan een voor een de natuurlijke getallen. Alles in Brouwers wiskunde moet in de loop van de tijd geconstrueerd kunnen worden. Deze constructivistische opzet staat geen bewijzen toe uit het ongerijmde: als iets *niet* onwaar is, dan hoeft het nog niet waar te zijn.

Terwijl er ook elders ontwikkelingen waren trok *Brouwers* intuitionistische wiskunde de aandacht binnen en buiten Nederland. Daarbij ontstonden verschillende vormen van intuitionisme, denk aan H. Weyl, A. Fraenkel, M.J. Belinfante, A. Heyting, D. van Dantzig, H. Freudenthal, E.W. Beth, S.C. Kleene, en later Errett Bishop, D. van Dalen, A.S. Troelstra, H.P. Barendregt.

Zie voor het intuitionisme, naast de boeken door van Dalen, ook het boek door W.P. van Stigt [21]. De constructieve



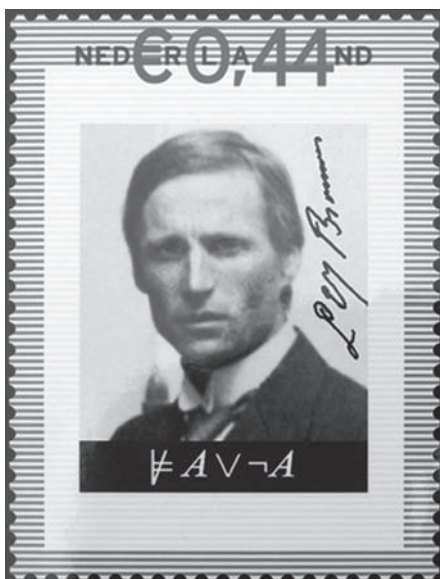
Foto van Brouwer met zijn vrouw Lize op het omslag van de door Dirk van Dalen geschreven biografie [7].



wiskundes van Brouwer en anderen zijn tegenwoordig van groot belang voor type theorie en programmeren in de informatica. In het algemeen zijn zogenaamde *theorem provers* gebaseerd op beslisbare subsets van de logica. Zie Martin-Löf [19] en de Coq Proof Assistant [5] (verwijzingen met dank aan Paul Klint).

Als geen ander heeft Brouwer de Nederlandse wiskunde internationaal op de kaart gezet. Hij hield veel voordrachten in het buitenland, en genoot groot aanzien in Göttingen, tot de Nazi-tijd het Mekka van de wiskunde. Brouwer werd een belangrijke redacteur van de *Mathematische Annalen*, toen een toptijdschrift. Hij stimuleerde veel jonge wiskundigen. Door hem kwam Freudenthal naar Amsterdam, en anderen kwamen voor een kort of lang bezoek: P. Alexandrov en P. Urysohn, K. Menger, W. Hurewicz.

In 2007 werd Brouwer in Nederland geëerd met een postzegel van TNT Post. Let op de formule $\nexists A \vee \neg A$ in de foto!



Postzegel van Brouwer uit 2007

Herinneringen

Ik beschouw mezelf als alumnus van de Universiteit Leiden: doctoraal 1947, promotie 1949. Maar door de oorlog en zijn gevolgen ben ik alleen in 1940 enkele maanden in Leiden geweest, en later af en toe voor tentamens. Zo herinner ik mij een waarschuwing van professor Droste: "Als je iets wil bereiken in de wiskunde, verlies je dan niet in grondslagenonderzoek." Van 1947 tot 1949 was ik medewerker aan het pas opgerichte Mathematisch Centrum in Amsterdam. Daar zag ik het conflict tussen Brouwer en professor van der Corput (mijn chef) over de leiding bij de Amsterdamse universitaire wiskunde. Opvallend in die tijd was ook dat Brouwer een keer in één week zijn jaarlijks verplichte aantal uren college afwerkte; andere wiskundecollegent legden toen hun colleges stil.

Ik maakte Brouwer voor het eerst persoonlijk mee op een vergadering van het Wiskundig Genootschap. Dat was in hotel Krasnapolsky in Amsterdam, op 25 oktober 1947 (datum achterhaald door Herman te Riele). Op die dag sprak G. F. C. Griss (wiskundeleraar in Gouda) over wat hij zijn *negatieloze wiskunde* noemde. Die was nog strenger dan het intuïtionisme van Brouwer. Zie Griss' artikelen [10, 11], en vergelijk Beth [1], van Dantzig [9], Heyting [12]. Na afloop was er een uitgebreide discussie voor het bord. Eerst tussen Griss en onder meer van Dantzig, die sprak over zijn affirmatieve wiskunde. Ik denk dat Freudenthal er ook bij was. Vervolgens kwam Heyting aan het woord; die probeerde uit te leggen wat Brouwer bedoeld had. Op het laatst verscheen Brouwer zelf, onverwachts, van achter uit de zaal; niemand had gemerkt dat hij binnengekomen was. Brouwer rende met wapperende jaspanden naar voren. En hij riep: jullie hebben het *allemaal* verkeerd begrepen!

De tweede keer dat ik Brouwer meemaakte was aan de Universiteit van Wisconsin in Madison, waar ik (via Purdue University, 1949–51 en de Technische Hogeschool Delft) begin 1953 aankwam als assistant professor. Wisconsin had een goed Math Department. De staf was breed georiënteerd en actief in onderzoek; daarnaast werd goed onderwijs belangrijk gevonden. In de jaren dertig had Madison het eerste universitaire rekencentrum in Amerika. Er waren ongeveer twaalf vaste stafleden, de meeste full professor. De bekendste waren R. H. Bing (topologie) en Stephen C. Kleene (logica, recursietheorie),

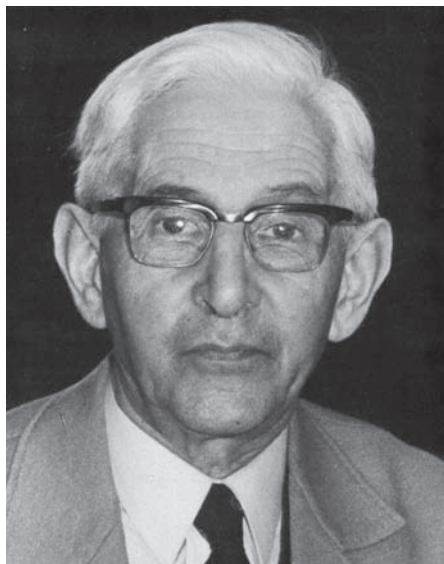


David van Dantzig

zie [13] en vergelijk [14]. Verder onder meer Rudolph E. Langer (differentiaalvergelijkingen, asymptotiek), editor van *Duke Journal* en later directeur van het Army Mathematics Research Center. (Walter en Mary Ellen Rudin waren er toen nog niet.)

Terug naar Brouwer. Hij was in 1951 met emeritaat gegaan, en als wiskundige wereldberoemd. In het najaar van 1953 maakte hij een grote rondreis door Canada en de Verenigde Staten, waarbij hij heel veel voordrachten hield. Het programma was georganiseerd in overleg met H. S. M. Coxeter in Toronto en onder meer Steve Kleene. De laatste was bekend met de Amsterdamse intuïtionisten en had na de oorlog enige maanden bij hen doorgebracht; vergelijk Beth [1], Mac Lane [18]. Kleene had Brouwer uitgenodigd voor een bezoek aan Madison, waar Brouwer twee voordrachten hield. (Ik heb de data niet kunnen achterhalen.) De eerste voordracht ging over zijn topologische werk. Hij begon de tweede, over intuïtionisme, met de mededeling dat zijn resultaten van de vorige dag natuurlijk niet deugden. Aan het slot vroeg ik brutaal aan Brouwer: "Meende u nu dat uw topologische werk niet deugt?" Zijn antwoord was: "What do you think?" "Wat denk je?"

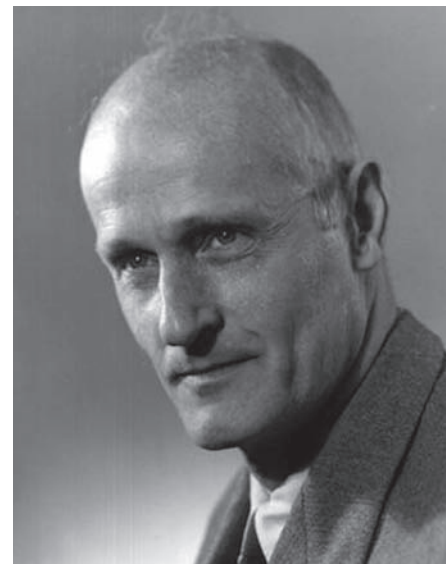
Het is misschien leuk om te vermelden dat mijn vrouw Jopie en ik Brouwer de tweede dag bij ons thuis hadden uitgenodigd voor het avondeten. Na aankomst vertelde Brouwer geanimeerd over zijn recente safari in Zuid-Afrika. (Hij was daar op bezoek geweest bij zijn vroegere leerling Barend de Loor.) Jopie had haar best gedaan met een kipschotel in de oven. Toen we aan tafel



Arend Heyting



R. H. Bing



Stephen C. Kleene

gingen zei Brouwer opeens: “Iedereen weet natuurlijk dat ik vegetariër ben...”. Gelukkig had Jopie een goede soep gemaakt, waarmee ze Brouwer tevreden kon stellen!

Toen ik van 1964 tot 1974 aan UC San Diego werkte kreeg ik daar al snel als collega de bekende analyticus Errett Bishop, die kort daarvoor tot Brouwers constructivisme bekeerd was. Zie [2] en vergelijk Warschawski [22].

Tot slot een opmerking die Brouwer zelf wel aangesproken zou hebben. Rond 1990 hielden mijn leerling J.L.H. Meyers en ik ons in Amsterdam bezig met Chebyshevkwadratuur op diverse meerdimensionale gebieden. Voor het speciale geval van een

boloppervlak (met oppervlakte 1) was het probleem om N punten zo te kiezen, dat de integraal van een functie over de sfeer optimaal benaderd wordt door het arithmetische gemiddelde van de functiewaarden in die punten. Preciezer: wat is het minimale aantal punten $N(d)$ dat je nodig hebt om met arithmetische gemiddelden, een exact resultaat te krijgen voor alle polynomen in x_1, x_2, x_3 van de graad d ? We construeerden stelsels punten op het oppervlak waarvoor $N(d) = O(d^3)$, en spraken het vermoeden uit dat het beste resultaat zou zijn $N(d) = O(d^2)$ (minder kan niet); analoog voor hoger-dimensionale sferen. Zie [16, 17]. Ons vermoeden is enkele ja-

ren geleden bewezen door Bondarenko en Viazovska in Kiev, zie [4]. Hierin speelt een dekpuntstelling van Brouwer een belangrijke rol. Kort daarna gaven Bondarenko, Radchenko en Viazovska een tweede bewijs. Dat gebruikt Brouwers werk over de graad van een afbeelding, en is verschenen in de *Annals of Mathematics* [3]. Brouwer had de resultaten zeker mooi gevonden, maar zou natuurlijk net als ik ook nog vragen om een constructief bewijs! ☘

Dankbetuiging

De auteur betuigt zijn hartelijke dank aan Tom Koornwinder voor de illustraties.

Referenties

- 1 E.W. Beth, Semantical considerations on intuitionistic mathematics, *Indag. Math.* 9 (1947), 512–517.
- 2 Errett Bishop, *Foundations of Constructive Analysis*, McGraw-Hill, 1967.
- 3 A. Bondarenko, D. Radchenko en M. Viazovska, Optimal asymptotic bounds for spherical designs, *Ann. of Math.* (2) 178 (2013), 443–452.
- 4 A. Bondarenko en M. Viazovska, Spherical designs via Brouwer fixed point theorem, *SIAM J. Discrete Math.* 24 (2010), 207–217.
- 5 *The Coq Proof Assistant*, <https://coq.inria.fr>.
- 6 Dirk van Dalen, Hans Freudenthal en Gerrit Krol, L.E.J. Brouwer en de eenzaamheid van het gelijk, bijvoegsel *Vrij Nederland*, nr. 8, 21 februari 1961.
- 7 Dirk van Dalen, L.E.J. Brouwer 1881–1966, een biografie, Bert Bakker, 2001.
- 8 Dirk van Dalen, L.E.J. Brouwer – Topologist, Intuitionist, Philosopher. *How Mathematics is Rooted in Life*, Springer, 2013.
- 9 D. van Dantzig, On the principles of intuitionistic and affirmative mathematics, I, II, *Indag. Math.* 9 (1947), 429–440, 506–517.
- 10 G.F.C. Griss, Negatielozе intuitionistische wiskunde, *Nederl. Akad. Wetensch. Verslagen, Afd. Natuurkunde* 53 (1944), 261–268.
- 11 G.F.C. Griss, La mathématique intuitioniste sans négation, *Nieuw Arch. Wisk.* 3/3 (1955), 134–142 (postuum gepubliceerd verslag van een colloquiumvoordracht in Brussel).
- 12 A. Heyting, G.F.C. Griss and his negationless mathematics, *Synthese* 9(1) (1955), 91–96.
- 13 S.C. Kleene, On the interpretation of intuitionistic number theory, *J. Symbolic Logic* 10 (1945), 109–124.
- 14 S.C. Kleene, *Introduction to Metamathematics*, Van Nostrand, 1952.
- 15 T.H. Koornwinder, De Amsterdamse wiskundige L.E.J. Brouwer, n.a.v. een recente biografie door Dirk van Dalen, *Scoop* (Studievereniging NSA, UvA), mei 2002, 20–29.
- 16 J. Korevaar and J.L.H. Meyers, Spherical Faraday cage for the case of equal point charges and Chebyshev-type quadrature on the sphere, *Integral Transform. Spec. Funct.* 1 (1993), 105–117.
- 17 J. Korevaar and J.L.H. Meyers, Chebyshev-type quadrature on multidimensional domains, *J. Approx. Theory* 79 (1994), 144–164.
- 18 Saunders Mac Lane, Stephen Cole Kleene, in *Biographical Memoirs*, Vol. 75, The National Academies Press, 1998.
- 19 Per Martin-Löf, Intuitionistic type theory, https://en.wikipedia.org/wiki/Per_Martin-Löf.
- 20 J.J. O’Connor and E.F. Robertson, Luitzen Egbertus Jan Brouwer, www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Brouwer.html.
- 21 W.P. van Stigt, *Brouwer’s Intuitionism*, Studies in the History and Philosophy of Mathematics, Vol. 2. North-Holland, 1990.
- 22 S.E. Warschawski, Errett Bishop—in memoriam, in *Errett Bishop: Reflections on Him and His Research*, San Diego, CA, 1983, *Contemp. Math.* No. 39, Amer. Math. Soc., 1985, pp. 33–39.