Wim Caspers
Lyceum Ypenburg, Den Haag, en
Faculteit EWI en Lerarenopleiding, TU Delft
w.t.m.caspers@tudelft.nl

Onderwijs Bespreking examen vwo wiskunde B 2016

Moeilijk of ongemakkelijk?

Het eindexamen wiskunde B op het vwo is alweer een poos geleden afgenomen. Inmiddels zijn de geslaagde kandidaten getransformeerd tot studenten en bevolken ze de collegezalen. Waar zijn ze destijds aan blootgesteld? De N-term, een getal dat vastlegt hoe uit het aantal scorepunten het cijfer bepaald wordt en bedoeld is voor het compenseren van verschillen in moeilijkheidsgraad van examens door de jaren heen, werd vastgesteld op $2{,}0$. Om de gedachte te bepalen: met N-term $1{,}0$ levert een score van 50 procent een $5{,}5$ op als cijfer en met N-term $2{,}0$ levert het een $6{,}5$ op. Wim Caspers bespreekt een aantal moeilijkheden die wellicht hebben bijgedragen aan deze hoge N-term.

Blijkbaar was het examen 2016 moeilijk. Dat wordt ook bevestigd door het overzicht in de WiskundE-brief waarin scores en cijfers van de examens van de afgelopen zeven jaar op een rij gezet zijn [1]. De score is met 55 procent de laagste van de afgelopen jaren. De hoge N-term levert een gemiddeld cijfer van $6{,}9$ op, wat in lijn is met de afgelopen jaren. De WiskundE-brief meldt ook dat een grote meerderheid van de docenten het examen te lang en moeilijk of te moeilijk vond. Maar eigenlijk is ongemakkelijk meer van toepassing dan moeilijk. Hieronder staat een aantal opgaven om dat te illustreren.

Kettinglijn

De openingsopgave had als onderwerp de kettinglijn, beschreven door

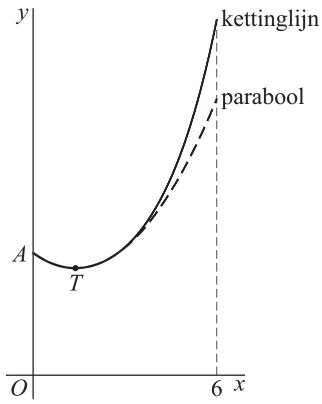
$$f(x)=\tfrac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}+2e^{-\frac{1}{2}x}+1\tfrac{1}{2}$$

op het domein $[0,6]$. Gevraagd werd exact de waarde van de x-coördinaat van het laagste punt van de grafiek te berekenen. Het bepalen van de nulpunten van de afgeleide ging de meeste leerlingen goed af. Bij het tweede onderdeel werd gevraagd om in de situatie dat de kettinglijn de vorm beschrijft van een kabel tussen twee palen te bepalen of een aan een kant losschietende kabel de grond raakt. Duidelijk is dat de lengte van de kabel berekend moet worden. De bijbehorende integraal mag benaderd worden met de grafische rekenmachine, maar dat is een heel gedoe om foutloos in te voeren. In het laatste onderdeel van de opgave komt een benadering met een parabool aan de orde. De vraag is in Figuur 1 weergegeven.

De vraag is niet moeilijk, maar voelt ongemakkelijk aan. Om te beginnen is de vorm van een vergelijking van de parabool gegeven: $y=a(x-b)^2+c$. Dat is beslist handig als je beseft dat het snijpunt met de y-as en de top van de parabool bekend zijn. Maar de vorm $y=ax^2+bx+c$ is populairder, misschien wel vanwege de abc-formule waarin ook de x-coördinaat van de top verstopt zit. In de vraagstelling komt die vergelijking echter niet meer voor, dus welke vorm je gebruikt is vrij gelaten. Dat soort vrijheid zijn leerlingen — moet helaas gezegd worden — niet gewend en velen zullen verwacht hebben als vraag: “Bereken a, b en c.” In plaats daarvan wordt gevraagd naar de plek waar het hoogteverschil gelijk is aan 1 (waarom 1 gekozen is wordt overigens niet duidelijk). Daarbij dient weer een beroep gedaan te worden op de grafische rekenmachine, compleet met tijdrovend invoergedoe.

In figuur 3 zijn de grafiek van de functie f en de parabool door A met top T getekend.
In deze figuur is te zien dat de parabool de kettinglijn aanvankelijk goed benadert, maar dat voor grotere waarden van x de benadering minder goed wordt.
Van de parabool door A met top T kan een vergelijking van de vorm $y = a(x-b)^2 + c$ worden opgesteld.

figuur 3



6p **3** Bereken de waarde van x waarvoor het (verticale) hoogteverschil tussen de kettinglijn en deze parabool gelijk is aan 1. Rond je antwoord af op één decimaal.

Figuur 1 Het laatste onderdeel van de eerste opgave van het examen.

Afleiding bij het differentiëren

En dat was dan de eerste opgave. Als je kijkt naar de oplossing, dan is die niet moeilijk te noemen, maar voor een openingsopgave kent hij wel veel ongemakkelijke elementen. Menig leerling zal op de klok hebben gekeken en geconstateerd hebben dat er al veel tijd verstreken was. De tweede opgave zal niet veel minder tijd gekost hebben. Die had als onderwerp de automotor en in het bijzonder de beweging van de zuiger. Een van de bijbehorende illustraties is in Figuur 2 weergegeven. De afstand van D tot B wordt s genoemd. Het eerste onderdeel blijkt achteraf het best gemaakte onderdeel van het examen; laten zien dat in de linker situatie geldt:

$$s = 5 - \cos(\alpha) - \sqrt{16 - \sin^2(\alpha)}$$

met $0 \leq \alpha \leq 2\pi$. Vervolgens wordt s benaderd met de formule

$$z = 1 - \cos(\alpha) + \tfrac{1}{8}\sin^2(\alpha)$$

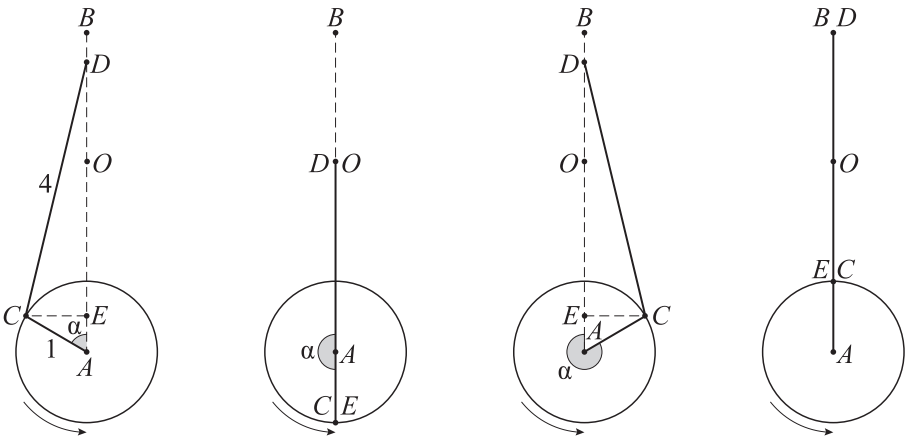
en er wordt gevraagd naar het maximale verschil. Weer een opgave met gepriegel in de grafische rekenmachine om het antwoord $0{,}002$ te vinden.

In het correctievoorschrift worden doorgaans punten toegekend voor het aangeven hoe het antwoord gevonden is met de grafische rekenmachine. In dit geval is dat nog wel zinvol, omdat een kandidaat dan geacht wordt te praten over $|s-z|$. Bij het benaderen van de integraal is het toekennen van een punt voor het vertellen dat er een formule ingevoerd is en op de knop integreren of iets dergelijks is gedrukt misschien wat minder op zijn plaats.

In het laatste onderdeel van deze opgave werd het volgende gevraagd: “Stel een formule voor de afgeleide van z op en bereken hiermee de maximale zuigersnelheid. Rond je antwoord af op twee decimalen.” Het is voor minder oplettende leerlingen verleidelijk om nulpunten van de gevonden afgeleide te zoeken in plaats van extremen van die afgeleide. Maar afgezien daarvan dringt zich een ongemakkelijk gevoel op gezien de context, die afleidend kan werken. Ik ben geen expert in automotoren en raadpleeg dus graag vakmensen, in dit geval mijn broer die immers gepromoveerd is aan de TU Eindhoven, faculteit Werktuigbouwkunde. Zijn reactie is weergegeven in het kader op de volgende bladzijde. Elegant laat hij de conclusie over wat er wel en niet in een wiskunde-examen hoort over aan wiskundigen. Duidelijk is wel de bedoeling van de opgave: bepaal het maximum van de afgeleide naar α van z. Als z geïntroduceerd zou zijn als een functie $z(\alpha)$ was dit al iets duidelijker geweest. Door te spreken over de maximale zuigersnelheid wordt de context onverbiddelijk de opgave ingetrokken, lijkt de variabele tijd een rol te gaan spelen ($\alpha(t)$, α als functie van de tijd) en zouden er vereenvoudigende veronderstellingen gedaan moeten worden. Geen prettige opgave en toch gemiddeld gemaakt, blijkt achteraf.

Bijzondere formuleringen

Na deze eerste twee opgaven waren de grootste problemen wel achter de rug, maar het zal een doorsnee leerling veel tijd hebben gekost. De meetkundeopgaven waren overzichtelijk, tenminste wanneer je de zin “Z is het snijpunt van de lijn door C en het snijpunt E van MD en AB met de cirkel” kunt verteren. Het lukte wonderwel. Het onderdeel waarvan de illustratie in Figuur 3 is weergegeven, leverde veel meer problemen op. Het is het op twee na slechtste onderdeel van het examen, misschien omdat veel leerlingen er niet aan toegekomen zijn? Het is ook een opgave waar meer informatie in zit dan er gevraagd wordt. Lijn l is evenwijdig aan AC, maar α, β en nog een paar hoeken zijn gelijk aan γ. Wie weet heeft dat verwarrend gewerkt.



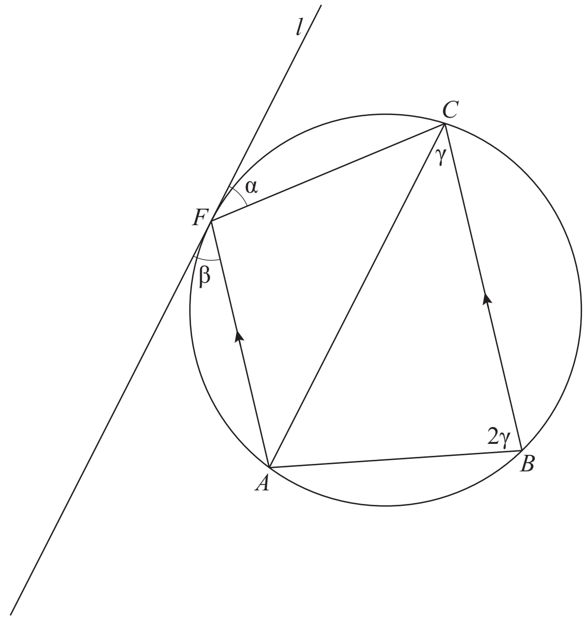
Figuur 2 Illustratie bij de tweede opgave van het examen.

Zuigersnelheid

Het bepalen van een afgeleide van z is per definitie onduidelijk, omdat niet verteld wordt wat voor afgeleide bedoeld wordt: naar de tijd, naar hoek α, of naar… De te gebruiken term zou mijns inziens tijdsafgeleide moeten zijn, of afgeleide naar α, wat dan ook bedoeld wordt. Omdat expliciet over zuigersnelheid wordt gesproken, zal wel de tijdsafgeleide bedoeld zijn. Voor de bepaling van de tijdsafgeleide moet er een verband bekend zijn of verondersteld kunnen worden tussen α en de tijd die in de formule voor z als functie van α kan worden ingevuld. Omdat de opgave een verbrandingsmotor betreft, kan niet zonder meer gesteld worden dat de rotatiesnelheid $(\frac{d\alpha}{dt})$ constant is. De rotatieas (krukas in termen van een verbrandingsmotor) is doorgaans voorzien van een vliegwiel, dat mede zorgdraagt voor een rustige loop van de motor. Ondanks dit vliegwiel zal de rotatiesnelheid afnemen tijdens de zogenaamde compressieslag (als het brandstofmengsel boven de zuiger in de cilinder wordt gecomprimeerd), om, na ontsteking van het brandstofmengsel boven de zuiger weer toe te nemen. Dit geldt voor brandstofmotoren van zowel het tweetakt- als het viertaktprincipe. Vrijwel altijd beschikt een brandstofmotor van een auto over méér dan één cilinder, in het algemeen tussen de 2 en de 8. De betreffende zuigers zijn verbonden aan dezelfde krukas, waarmee de snelheid van de rotatie-as weliswaar gelijkmatiger, maar nog altijd niet constant is. Ook zijn er invloeden van de verdere aandrijfketen te verwachten op het snelheidsverloop als gevolg van bijvoorbeeld elastische en dempingseigenschappen, maar deze worden evenmin duidelijk in de opgave.

Al deze en overige invloeden zijn niet in de opgave beschreven. Verdiscontering hiervan zou ver uitgaan boven de beoogde moeilijkheidsgraad van de opgave. Maar ook is geen veronderstelling gedaan in de opgave over de afwezigheid van variatie in de rotatiesnelheid. Dit wordt aan de leerling overgelaten.

Wiskundigen mogen beoordelen of een dergelijke veronderstelling van een leerling verwacht mag worden tijdens een wiskunde-examen.



5p **14** Bewijs dat l evenwijdig is aan AC.

Figuur 3 Het op twee na slechtst scorende onderdeel van het examen.

Iets soortgelijks geldt misschien voor de slechtst scorende opgave, die over raaklijnen aan de twee parabolen $y=x^2+3$ en $y=-x^2-1$. Er is veel minder informatie nodig om de opgave tot een goed einde te brengen dan op het eerste gezicht lijkt. Het helpt wel als je weet dat het gemiddelde van -1 en 3 gelijk is aan 1 en niet 2, maar dan is het een kwestie van het bepalen van een raaklijn aan een parabool door het punt $(0,1)$. Het is een standaardopgave waarbij veel leerlingen een recept kunnen toepassen, ware het niet dat er nu opeens twee grafieken en twee raaklijnen in het spel zijn. Het op een na slechtst scorende onderdeel heeft u nog tegoed, dat was het laatste onderdeel. Tegen de tijd dat men daar aanbeland was bleek vermenigvuldigen ten opzichte van de x-as niet meer onderscheiden te kunnen worden van vermenigvuldigen ten opzichte van de y-as, want dat werd gevraagd. Overigens met de wonderlijke toevoeging; “Schrijf je antwoord als één breuk.”

Mag je een breuk opschrijven met in de noemer een breuk, mag je $\frac{1}{\sqrt{2}}$ in je antwoord laten staan en wat te doen als iemand $\ln(1)$ niet ontmaskert als 0? Discussies daaromtrent zijn er nog wel in examentijd maar gelukkig is die laatste toevoeging, schrijf als één breuk, niet typerend voor dit examen of het bijbehorende correctievoorschrift. Je mag immers verwachten dat docenten die bijna dagelijks correctiewerk verrichten goed in staat zijn om zelf beslissingen te nemen als het gaat om dergelijke details.

Wiskundige denkactiviteiten

Veel belangrijker is het dat het examen leerlingen de mogelijkheid biedt om te laten zien wat ze met wiskunde voor elkaar kunnen krijgen. Dat kan doordat ze opgaven herkennen (de opgaven die hier niet besproken zijn), maar ook door ongemakkelijkere opgaven die meer een beroep doen op inzicht en begrip van de stof aan te pakken. Het examen 2016 bood die mogelijkheid dus zonder meer, maar met beide categorieën in verrassende volgorde. Het gaat waarachtig richting wiskundige denkactiviteiten. In het nieuwe examenprogramma staan die voor het eerst expliciet benoemd, wiskundige vaardigheden waaronder modelleren, ordenen en structureren, analytisch denken en probleemoplossen. Het zou een verschuiving in de soort examenopdrachten teweeg moeten brengen, dus misschien heeft het examen 2018 nog veel meer verrassingen in petto. Eerst 2017 nog.

Referentie

1 WiskundE-brief 746, 3 juli 2016. Zie http://www.wiskundebrief.nl/746.htm.