

Arjeh Cohen

*Faculteit Wiskunde & Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
a.m.cohen@tue.nl*

Over digitaal wiskundig lesmateriaal

De digitalisering van wiskundig lesmateriaal is zo ver gevorderd dat het klassieke tekstboek overbodig wordt. Al jarenlang zijn online in LaTeX geschreven wiskundedictaten en tekstboeken te vinden, die op hun beurt langzamerhand vervangen worden door interactieve en adaptieve cursussen. In dit artikel laat Arjeh Cohen zien welke vooruitgang deze moderne middelen bieden. Het is geen compleet beeld van alle ontwikkelingen, maar een reeks observaties die gebaseerd zijn op eigen ervaringen.

Eind jaren zeventig werkte ik aan de Universiteit Twente. Ergens onderin het wiskundegebouw bevond zich een zaal die leeg was op een kring computerschermen met toetsenborden en stoelen na. De zaal was bedoeld voor experimentele wiskundepractica in computerondersteund onderwijs. Ik was geboeid door de poging zo wiskunde te instrueren, maar op die stoelen heb ik zelden studenten zien zitten. Het leek me ook erg optimistisch om te denken dat de trillende letters op het zwart/wit-scherm, de monotonie van de multiplechoicevragen, en de onwennigheid van studenten met computers overkoombare obstakels voor studiesucces zouden zijn.

Toch is de belangstelling, in het algemeen en bij mij, voor de mogelijkheden van de computer bij het aanleren van praktische wiskundevakken aan hbo en wo sindsdien gebleven. Nu, bijna vijftig jaar na de optimistische aanpak in de jaren zeventig, is wiskundeonderwijs met behulp van de computer de gewoonste zaak van

de wereld geworden. Veel van het wiskundeonderwijs wordt digitaal en interactief aangeboden, terwijl het persoonlijk contact met docenten zoveel mogelijk gehandhaafd blijft.

Computerondersteund onderwijs kent een groot scala aan verschijningsvormen, te veel om in een kort artikel als dit te beschrijven. De digitale stappen die Noordhoff [14] maakt voor het voortgezet onderwijs (vo), zijn aangestipt in een recent artikel in dit blad [10], tezamen met de ervaringen uit eigen praktijk van de docent Peter Es-huis. Ook ik beperk me grotendeels tot de eigen praktijk. Ik geef aan welke ervaring ik heb met de aanmaak van digitaal wiskundig lesmateriaal, bespreek de voordelen die ik heb gezien van het gebruik ervan en ga in op enkele mogelijke verbeteringen en interessante ontwikkelingen.

Eigen ervaring

Mijn belangstelling voor het onderwerp komt uit de technische hoek. Vanaf het

begin van de jaren negentig heb ik aan veel onderzoeken meegewerkt waarin een goede computeromgeving voor exact wiskundig werk centraal stond. In het begin, nog vóór het internet tot stand kwam, vatten we (onder wie Lambert Meertens en Steven Pemberton) op het CWI het plan op om een echt interactief wiskundeboek over Lie-algebra's te maken. De eerste poging, in het begin van de jaren negentig, is niet veel verder gekomen dan een specificatie van de ideeën [6], al was de algoritmische benadering van de theorie van Lie-algebra's [15] een zeer interessant en nuttig bijproduct.

In tegenstelling tot ons wiskundig onderzoek, werd het werk aan interactieve systemen voor wiskunde sterk bepaald door de opkomst van steeds weer krachtiger software en meer geavanceerde standaarden in de informatica. Een typisch voorbeeld is OpenMath [32], waaraan we in de jaren negentig in Eindhoven werkten. Het behelst een manier om elke wiskundige uitdrukking zodanig op te schrijven dat elk softwarepakket (in principe) begrijpen kan wat ermee bedoeld wordt. Om die uitdrukking semantisch eenduidig vast te leggen, wordt gebruik gemaakt van elementaire bouwstenen, symbolen gehe-ten. De betekenis van die symbolen wordt

in aparte documenten, te vergelijken met woordenboeken, vastgelegd. Zo kan het reële getal π onderscheiden worden van een vlak dat π heet, of een variabele met de naam π . Een belangrijke implementatie van OpenMath is in XML [46] gerealiseerd. Min of meer tegelijkertijd kwam de standaard MathML [27] voor presentatie van wiskunde tot stand. De derde versie van MathML maakte het mogelijk aan deze XML-taal ‘inhoud’ toe te voegen die uit de XML-implementatie van OpenMath bestaat. Zo is OpenMath in zekere zin een onderdeel geworden van de dominante standaard MathML.

Om de doorsnee gebruiker van het web niet op te zadelen met de grote brij punthaken, attributen en andere verwarrende zaken die XML met zich meebrengt, hebben we (onder wie Hans Cuypers, Jan Willem Knopper en Mark Spanbroek) aan de Technische Universiteit Eindhoven een gestructureerde editor geschreven die ‘normale’ wiskundige uitdrukkingen omzet in OpenMath [23]. Door deze editor in te zetten kunnen we studenten met een minimum aan kennis over hoe je de wiskunde moet invoeren, antwoorden op vragen laten geven die volledig semantisch te analyseren zijn.

Rond 2000 publiceerden Hans Cuypers, Hans Sterk en ik het interactieve boek *Algebra Interactive* [5]. Hierin werd de interactiviteit verzorgd door het computeralgebra-systeem GAP [12]. De student kon interactieve opgaven uitvoeren en voorbeelden aanroepen (gapplets) door in invoervelden GAP-uitdrukkingen te typen. De uitgever verkocht het materiaal als een boek, met daarin een cd die de eigenlijke interactieve versie droeg. Zo werd ervoor gezorgd dat het boek eenvoudig universitaire bibliotheken ingeloodst kon worden en werd voorkomen dat de cd in discotheken terecht kwam.

Kort daarna werd het internet met de onderliggende software zo krachtig dat *Algebra Interactive* tot een nieuw soort interactief boek getransformeerd zou kunnen worden dat via de cloud werkt. Deze overweging motiveerde ons om de bovengenoemde OpenMath-editor te bouwen. Hiermee zouden veel meer computeralgebra-systemen dan alleen GAP aangesproken kunnen worden. Dat dit inderdaad mogelijk is, blijkt uit het gebruik van de editor door de firma SOWISO (een spin-off van de Technische Universiteit Eindhoven),

Figuur 1 Voorbeeld van een opgave in SOWISO.

die daarmee een interactief platform voor onderwijs ontwikkeld heeft.

De afgelopen twee jaar heb ik als schrijver meegewerkt aan wiskundig lesmateriaal in het SOWISO-platform. Het resultaat beslaat calculus en lineaire algebra, dat door een onderwijsinstelling aangeboden kan worden als online cursus of als online onderdeel van een meer klassieke cursus (die daarmee, volgens de moderne terminologie, ‘blended’ wordt). De docent stelt een selectie van de beschikbare hoofdstukken samen tot een cursus, bepaalt welke opgaven gemaakt moeten worden en beheert het forum – een plaats waar vragen en antwoorden over de lesstof samenkomen. Studenten en docenten kunnen ook reageren, waardoor een digitaal klaslokaal ontstaat. Er worden logs bijgehouden van de opgaven die de student heeft gemaakt. De docenten krijgen heel veel data over het gebruik van het systeem tot hun beschikking. Er bestaan diagnostische toetsen, op grond waarvan bepaalde onderwerpen voor nadere studie aanbevolen kunnen worden, formatieve toetsen, waarin tussenantwoorden mogelijk zijn en bijsturing plaatsvindt, en summatieve toetsen, die gebruikt kunnen worden voor de vaststelling van een eindcijfer. Ook biedt dit platform een auteursomgeving waarin docenten hun eigen interactieve cursussen kunnen schrijven of bestaande cursussen voor eigen gebruik kunnen redigeren.

Dankzij de OpenMath editor wordt het antwoord van een student op een open vraag in het SOWISO-platform (er zijn ook andere typen opgaven) verwerkt als een

uitdrukking waarvan de semantiek vastligt. Met behulp van speciaal voor het web ontworpen scripttalen kan de structuur geanalyseerd worden. Met gebruikmaking van een computeralgebra-systeem kan onderzocht worden in hoeverre het antwoord voldoet. Bekijk, bij wijze van voorbeeld, de opgave “Los de vergelijking $\frac{2x+3}{x+8} = 3$ op.” Als het gelijkteken niet het topsymbool in het antwoord is of als er andere bewerkingen in het antwoord voorkomen dan nodig om de vergelijking op te lossen, dan zal het systeem dat melden dankzij de analyse met de scripttaal. Het platform is niet alleen in staat om het goede antwoord, $x = -21$, te herkennen, maar ook om de student die een vergelijking intikt als tussenstap (of zelfs start met het invoeren van de gegeven vergelijking door erop te klikken), stapsgewijs met suggesties te begeleiden naar het goede eindantwoord. De auteur van de opgave bepaalt zelf welke regels van toepassing zijn. De opgaven kunnen als oefening maar ook in toetsen worden gebruikt en als voorbeelden aan de theorie worden toegevoegd. Van elk hoofdstuk kan met een druk op de knop een statische versie gecreëerd worden in de vorm van een pdf- of Word-file. Zo kan het platform dus ook klassieke tekstboeken produceren. Wat een systeem als dit meer te bieden heeft dan de tekstboeken, wordt in de volgende paragraaf behandeld.

Voordelen van digitaal lesmateriaal

De laatste jaren werd het optimisme uit de tijd van de Twentse studiejaar met

computers bewaarheid: de eerste toepassingen op grote schaal van digitaal wiskundeonderwijs zijn een feit. In zijn algemeenheid is dit natuurlijk te danken aan de snelle ontwikkelingen in de informatica en elektrotechniek. Maar specifiek voor de wiskunde telt de opkomst van de computeralgebra-systemen ook zwaar mee. De twee meest verbreide pakketten van het eerste uur, Maple en Mathematica, zijn met bijzondere onderwijsproducten gekomen: Maple met MapleTA [22], een manier om open wiskundeopgaven te maken, waarvan de invoer door het pakket Maple getoetst wordt, en Mathematica in eerste instantie met notebooks [25], die hebben laten zien hoezeer cursusmateriaal verlevendigd kan worden door geparametriseerde voorbeelden, animaties, mogelijkheden voor de student om zelf te programmeren, et cetera. Gebruik van zo'n notebook vereist echter een lokale installatie van het Mathematica-pakket [24] op de eigen computer, en enige vertrouwde met het systeem. Dit is niet langer nodig voor gebruik van de in 2009 gelanceerde website Wolfram Alpha [45], waartoe een versie van de notebooks geëvolueerd is.

Mathematica [24] is een commercieel product dat uitstekend geschikt is om online cursussen van wiskundige interactiviteit te voorzien. Een oud en veel beperkter systeem als het opensource-pakket Maxima [28] voldoet vaak ook goed voor grote basiscursussen en kan gratis en vrij ingezet worden. Zowel het SOWISO-platform als de Engelse STACK-omgeving [40] werken hiermee. Maar er is zicht op goede toegang tot nog meer universele computeralgebra-systemen. Zo is het pakket Magma dankzij financiële steun van de Simons Foundation [21] gratis beschikbaar voor elke openbare onderwijsinstelling in de Verenigde Staten (idee voor Nederland?) en wordt het gratis beschikbare opensource-systeem SageMath [38] steeds verder geïntegreerd in een grote omgeving van waaruit allerlei geavanceerde systemen zijn aan te roepen; zie bijvoorbeeld het OpenDreamKit-project [32], waarin sprake is van een ecosysteem voor computationele wiskunde.

De techniek achter het web, inclusief de wiskundig georiënteerde programmatuur (zoals MathJax [26] en de eerder genoemde MathML [27]), zorgt ervoor dat de presentatie van wiskunde op het scherm niet meer hoeft afwijken van wat de student gewend is van LaTeX. Dit is van belang als de in-

houd dynamisch gepresenteerd wordt, met parameters die random, of afhankelijk van de context, gekozen kunnen worden. Zo zijn heel wat obstakels weggenomen om wiskunde op een boeiende manier online te brengen.

Naar aanleiding van deze verworvenheden hoor je vaak de vraag wat de digitalisering nou echt bijdraagt aan verbetering van het onderwijs. Daarom ga ik in op vijf in het oog springende aspecten: toegankelijkheid, interactiviteit, adaptiviteit, het grote arsenaal aan oefeningen en het gemak voor de docent.

Toegankelijkheid

Het grootste voordeel dat digitaal lesmateriaal (al of niet wiskundig) biedt ten opzichte van klassiek lesmateriaal is mijns inziens de toegankelijkheid. De loftrumpet hierover is goed gestoken in de TED-voordracht [18] van de mede-oprichter van Coursera, Daphne Koller. Veel mensen die vroeger door geografische of andere omstandigheden niet in staat waren onderwijs te volgen, komen via het internet vol aan de bak. Het feit dat allerlei cursusmateriaal en gegevens over wiskunde overal ter wereld bereikbaar zijn geworden, maakt het web tot een wiskundige leerschool die meer informatie toegankelijk maakt, betere uitleg geeft, en meer contact met topdocenten en toponderzoekers mogelijk maakt dan ik me ooit had kunnen voorstellen. Eén concreet voorbeeld is de website van Terence Tao [41], waarop niet alleen advies staat aan studenten hoe wiskunde te studeren en vele interessante doorverwijzingen te vinden zijn, maar ook zijn recente opzienbarende stellingen worden toelicht. Universitaire bibliotheken maken een overgang door van fysieke verzamelplaats van boeken en andere informatiedragers naar doorgeefluik (portal) voor digitale varianten op het web. Docenten geven al vaak de beste plaatsen op het web aan om iets over hun onderwerp te leren, maar ook zonder die hulp vinden veel studenten hun eigen weg.

Door de wiskundige formule te googelen waar je meer van zou willen weten, kom je al gauw terecht op websites waar nuttige informatie over de ingetypte uitdrukking staat. Gebruik van WebMathematica [42] maakt het mogelijk bijna alle antwoorden op vragen uit een doorsnee calculustentamen te voorschijn te toveren door simpelweg de vraag of formule

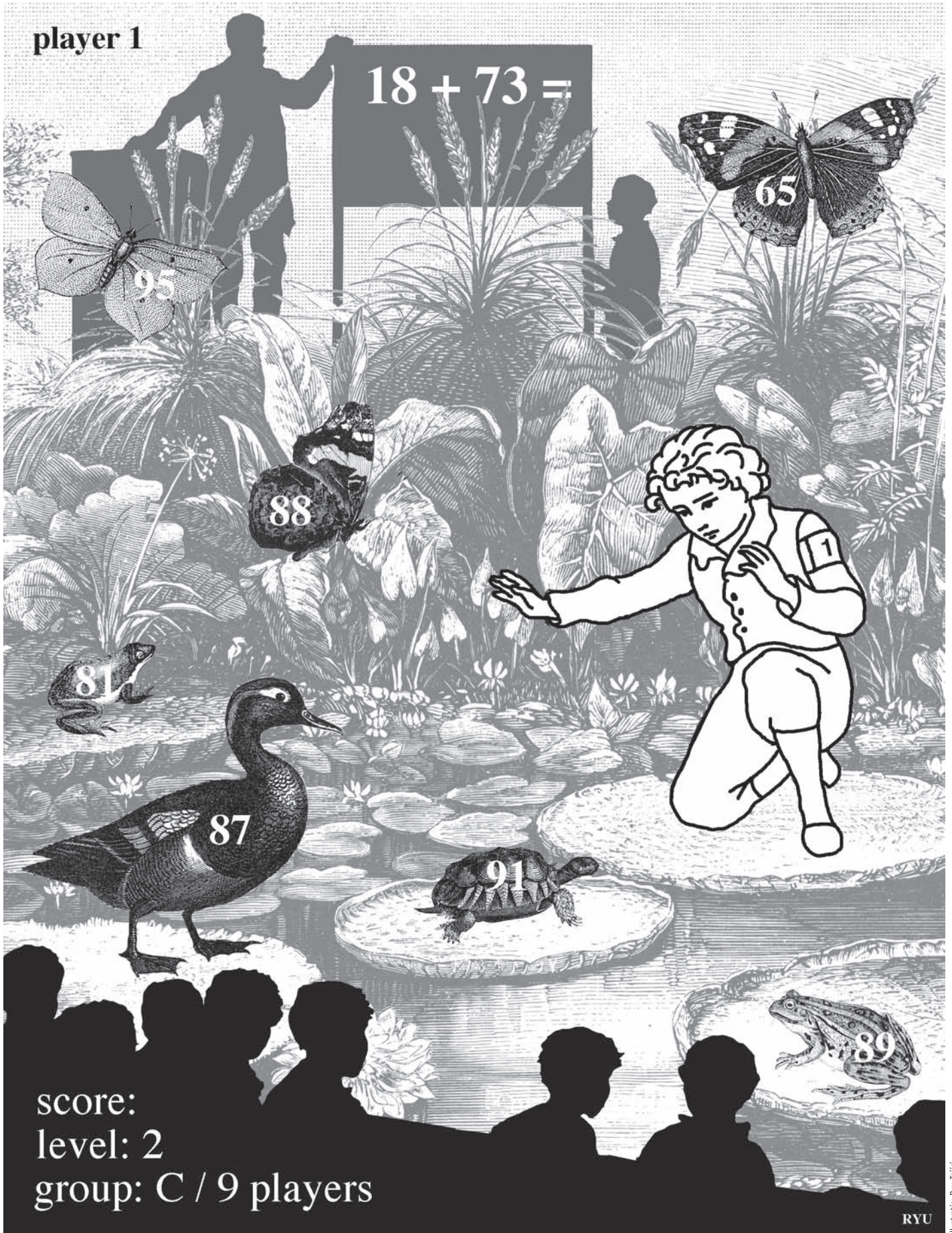
op een webpagina in te voeren. Massive Open Online Courses (MOOCs) van bijvoorbeeld Coursera [8] en EdX [9] voorzien in goede videocolleges voor de basisvakken wiskunde, compleet met studiegroepen en begeleiders. Via deze MOOCs, of individuele videopresentaties van docenten elders op het internet (de Khan Academy [17] is hier een bekend voorbeeld van), kunnen studenten uitleg krijgen over punten in het dictaat die ze niet begrepen hebben, of zelfs een hele cursus doorlopen. Ik heb studiegroepjes gekend die door dit soort methoden samen te gebruiken een veel beter dan gemiddeld cijfer op hun tentamen scoorden. Ik laat in het midden wat dit zegt over het college, maar het illustreert wel de goede toegankelijkheid van online lesmateriaal.

Interactiviteit

Ook in interactiviteit gaat digitaal materiaal veel verder dan klassiek lesmateriaal. De term interactief duidt op computersystemen die op een gebruiker reageren om gegevens of opdrachten te verkrijgen en om directe resultaten of bijgewerkte informatie te geven, vaak als substituuut voor een menselijk antwoord. De feedback die een student kan krijgen bij het maken van oefenopgaven, valt hier onder. Bij een open opgave als "Bereken het functievoorschrift van de raaklijn in het punt $[1, 4]$ aan de grafiek van de functie $f(x) = \sqrt{3x^2 + 13}$ " in het SOWISO-platform, wordt de door de student ingevoerde uitdrukking achtereenvolgens getest op de volgende kenmerken, en voorzien van bijpassende reactie naar de student:

- er komt een andere variabele voor dan x of een ander symbool dan een wortel of een standaard rekenkundige operatie;
- het antwoord is fout volgens een verwacht patroon, bijvoorbeeld $\frac{1}{4}x + \frac{15}{4}$ omdat bij het differentiëren de kettingregel niet naar behoren is toegepast;
- het antwoord is niet van de vorm $a \cdot x + b$;
- de coëfficiënt van x is ongelijk aan $\frac{3}{4}$;
- het punt $[1, 4]$ ligt niet op de door de student ingevoerde raaklijn.

Een goede docent heeft ongetwijfeld meer te bieden, maar is lang niet altijd beschikbaar. Het systeem heeft heel veel geduld: ook bij de 123ste poging van de student om de vraag te beantwoorden blijft de



feedback onvermoeid terugkomen. Ten slotte kan de auteur de verzameling feedback-regels bij elk nieuw geconstateerd obstakel uitbreiden.

Een ander voorbeeld van interactiviteit is te vinden in de effectieve (constructieve of algoritmische) benadering van wiskunde. In het vo-curriculum zie ik weinig aandacht voor deze aanpak. Gezien de rol van de computer in de samenleving en de behoefte aan meer informatica-onderwijs in het vo, lijkt me een algoritmische benadering op zijn plaats. Neem bijvoorbeeld de reële getallen. De vo-leerlingen wordt een reëel getal voorgeschoteld als een vanzelfsprekendheid, een punt op de rechte lijn tussen bepaalde rationale getallen in. Natuurlijk komt de decimale ontwikkeling hier en daar ter sprake, maar nergens wordt het begrip reëel getal duidelijk gemaakt. Dit is tot op zekere hoogte te begrijpen als je ziet hoeveel moeite de docent analyse zich hiervoor in het eerste universitaire wiskundejaar getroost. Maar er is een concreet beeld te geven van een reëel getal als een orakel [20]: het orakel weet precies welk getal bedoeld wordt (denk aan de oneindige decimale ontwikkeling); als mens kun je slechts een eindig beginstuk daarvan verwerken, een benadering door middel van een rationaal getal met een macht van 10 in de noemer. Als je meer geduld hebt, kan het orakel je een betere benadering (een decimaal getal met een hogere macht van 10) geven. Dit beeld sluit perfect aan bij de meetkundige opvatting van een reëel getal dat ingekneld ligt tussen gegeven rationale getallen. Om een voorbeeld te noemen: als vervolg op de behandeling van $\sqrt{2}$ als het positieve getal a met de eigenschap dat $a^2 = 2$, kan het programmaatje besproken worden dat bij invoer door de student van het aantal decimalen n , het grootste natuurlijke getal x zoekt dat voldoet aan $x^2 \leq 2 \cdot 10^{2n}$, om de gevraagde decimale ontwikkeling van $\sqrt{2}$ af te leveren als $x \cdot 10^{-n}$. De interactiviteit kan verwezenlijkt worden door zo'n programmaatje daadwerkelijk te draaien en de werking ervan te visualiseren. De bonus van deze behandeling is het inzicht hoe rekenmachines tot benadering van een getal als $\sqrt{2}$ zouden kunnen komen. Hierbij ligt wel het gevaar op de loer dat het orakel in alle voorbeelden een algoritme is, waardoor de verkeerde indruk kan ontstaan dat dit altijd zo is (cf. [44]).

Als laatste voorbeeld noem ik de interacties die recent gerealiseerd zijn in GeoGebra [13] met driedimensionale technologie. Hierdoor is het mogelijk een op het scherm gevisualiseerd driedimensionaal object, laten we zeggen een hyperboloïde, nader te bekijken. Een student die voor het scherm zit, kan door handbewegingen in de fysieke ruimte een vlak op het scherm oppakken en het daar laten bewegen, terwijl de doorsnede van het vlak met de gegeven hyperboloïde dynamisch gepresenteerd wordt. Zo wordt letterlijk interactief inzicht verschaft.

Adaptiviteit

Hoewel interactiviteit al tot gevolg heeft dat invoer van studenten een passende reactie krijgt, is het vermogen van digitale onderwijssystemen om het lesmateriaal aan te passen aan de individuele gebruiker, de zogeheten adaptiviteit, nog niet sterk ontwikkeld. Technisch zijn er weinig belemmeringen en het nut is groot. Daarom verwacht ik dat adaptiviteit snel meer zal opleveren. Uit de logs van individuele studenten in een interactieve cursus valt af te leiden waar ze sterk en waar ze zwak in zijn, wat ze al beheersen en wat nog niet. De beginnende student kan onderworpen worden aan een diagnostische toets, waardoor hij/zij geleid wordt naar de onderwerpen die het eerst in een bepaalde cursus aan de orde zouden moeten komen. Het niveau kan aangepast worden aan de hand van al bekende gegevens, en de uitleg op een theoriepagina kan zich beperken tot onderwerpen die nog niet bekend verondersteld worden. Ook kan de aanpassing afhangen van individueel aansprekende voorbeelden, cognitieve eigenschappen en leerstijl van de student.

De principes om de studenten aan te spreken op hun individuele kwaliteiten kunnen ook gebruikt worden om degenen die daartoe in staat zijn, een beter beeld te geven van wat wiskunde inhoudt. In het vo voorziet het vak wiskunde D al enigszins in die behoefte; maar is het niet veel effectiever als de verdieping direct geboden wordt waar de student er aan toe blijkt te zijn? Om een voorbeeld te noemen: van de kwadratische vergelijkingen in twee variabelen worden de oplossingsverzamelingen in specifieke gevallen benoemd als parabool, hyperbool of ellips. De classificatie van deze objecten als alle objecten (op

ontaardingen na) die je zo kunt krijgen, is geen onderdeel van het vo-curriculum. In een adaptieve omgeving kan de goede en geïnteresseerde student de achterliggende stelling leren kennen en zo de kracht van de wiskunde leren waarderen.

Groter arsenaal aan oefeningen

Niet alleen kan een student er 123 keer over doen voor hij/zij het goede antwoord op een oefenopgave vindt, ook kan de student in een interactieve leeromgeving vaak heel veel verschillende opgaven van hetzelfde type maken. Het is bijvoorbeeld geen probleem om opgaven met random parameters a en b te genereren, zodat $\sqrt{a^2 + b^2}$ een geheel getal is, met als oogmerk dat het antwoord op een vraag over de stelling van Pythagoras zonder worteltekens geschreven kan worden. Een tekstboek bevat slechts enkele combinaties van die waarden. Het grote aantal komt niet alleen goed van pas bij studenten die meer oefening behoeven, maar ook bij de productie van meerdere versies van een tentamen bij één zitting.

Gemak voor de docent

Het gemak voor de docent wordt goed gediend door nieuw digitaal lesmateriaal. Het delen van opgaven onder docenten is bijvoorbeeld eenvoudiger geworden als ze over een gemeenschappelijke databank beschikken; dit idee is uitgewerkt in het SURF-project ONBETWIST [30] en wordt ook toegepast door SOWISO. Via de toegangspoorten tot dergelijke databanken word je al gauw lid van een gemeenschap van collega's met overeenkomstige interesses, met alle voordelen van dien.

Aan meerdere universiteiten in Nederland worden inmiddels met succes volledig digitale tentamens wiskunde met open vragen afgenomen. De docent selecteert de vraagstukken uit een databank van geïntegreerde vragen. Het nakijkwerk is geautomatiseerd, zodat de uitslag van het tentamen binnen enkele tellen na afloop van het tentamen bekend is. Aan de Technische Universiteit Eindhoven worden relevante gegevens over de vorderingen van studenten bij online vraagstukken aan de tutores doorgegeven, zodat de besprekingen met studenten specifiek en intensiever kunnen zijn dan voorheen.

Met behulp van digitaal materiaal kunnen docenten zich dus meer richten op het creatieve deel van het lesgeven.

Mogelijke verbeteringen

Bij vergelijking van de studierendementen doen online cursussen het in het algemeen (nog?) iets minder goed dan de klassieke (face-to-face) cursussen; zie bijvoorbeeld [47]. Gezien de jonge leeftijd van het digitale materiaal is dat geen verrassing. Er zal ongetwijfeld nog veel geëxperimenteerd worden om tot een beter product te komen en het beter in te kunnen zetten.

Hoewel ik me niet op statistisch verantwoord onderzoek kan beroepen, zie ik in het algemeen twee trends bij de aanbidding van online onderwijs. De ene trend is gekoppeld aan succes: de individuele doorzetter lijkt ver te komen. Studenten met een voldoende aantal opgaven achter de kiezen in de interactieve omgeving behalen vrijwel altijd een goed eindresultaat. Dit is op zich al een bemoedigende ontwikkeling.

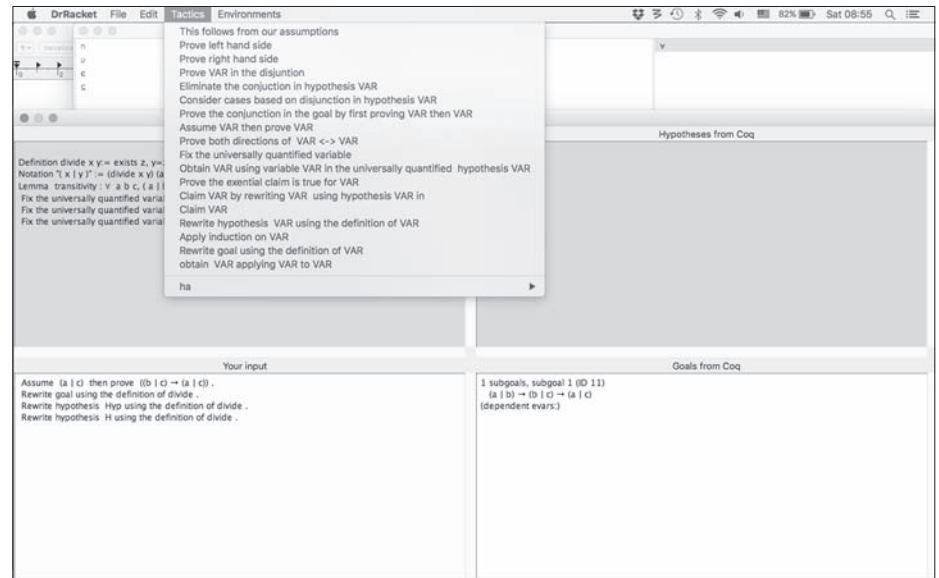
De andere trend is dat er steeds een aanzienlijke groep studenten blijkt te zijn die vrijwel meteen vastloopt. Dit kan aan de steile leercurve in het lesmateriaal liggen; de digitale versies moeten nog uitrijpen. Maar er zijn ook aanwijzingen (zie bijvoorbeeld [3]) dat hier gebrek aan contact met docenten, motivatie, beschikbare tijd en planning van de deelnemende student een grote rol spelen. Op de eerste twee oorzaken ga ik nader in. Daarna bespreek ik nog twee punten waaraan nog veel te doen is: beveiliging en het leren bewijzen.

Contact met docenten

Het verschil in rendement wordt vaak verklaard door het geringe contact met docenten. Bij een cursus op een specifieke locatie kan gekozen worden voor een vorm van normaal contact tussen student en docent via colleges of practica, ondersteund door digitaal aangeboden oefeningen (al dan niet voorafgaand aan ontmoetingen met een docent). Voor studenten op afstand is het vanzelfsprekend al winst dat zij de cursus überhaupt kunnen volgen. De afwezigheid van het natuurlijke contact met docenten kan ten dele gecompenseerd worden door forum posts, e-mails en chats met medestudenten en/of docenten.

Motivatie

Het hooghouden van de motivatie wordt ook als probleem genoemd bij online cursussen. De vaak eenzame positie van de online student vereist een sterke persoonlijke instelling om door te kunnen



Figuur 2 Voorbeeld van een opgave in Spatchcoq.

zetten. Zo'n motivatie is vaak al aanwezig bij studenten die zich bij een voorbereidende digitale cursus aanmelden voor een opleiding waar ze zich eerder voor hebben ingeschreven. Bij de Masteropleidingen aan de Technische Universiteit Eindhoven en aan een economiefaculteit elders in Nederland kregen in de zomer van 2015 alle van buiten instromende studenten de kans de wiskunde tot op het verwachte niveau te brengen vóór hun fysieke komst in september. Voor de een bleek de cursus een nuttige opfrisser, voor de ander een moeilijke horde, maar in de meeste gevallen is de aansluiting met het bestaande onderwijs verbeterd.

MOOC-organisaties als Coursera proberen ook de motivatie hoog te houden door aantrekkelijke mogelijkheden na het met succes volgen van de cursus aan te bieden. Ze zijn druk in de weer om toelating op grond van dat succes als student tot bestaande universiteiten of als medewerker tot grote firma's te vergemakkelijken.

Als remedie voor gebrek aan motivatie worden wel spelelementen ingebouwd: *gamification*. Deze kunnen stimulerend werken, maar kunnen ook indruisen tegen de opvattingen hoe je studenten zou moeten benaderen. Zo is het in Singapore meer gebruikelijk dan in Nederland om te laten zien hoe goed een student het ten opzichte van andere studenten gedaan heeft. Twee mooie milde vormen van gamification zijn te vinden in de Reken tuin [36] (voor elementaire rekenoefeningen), dat de prestaties van de studenten on-

der andere gebruikt om de opgaven naar moeilijkheidsgraad in te delen en MemRise [29], dat door gebruikers samengestelde geheugen oefeningen aanbiedt, vooral voor vreemde talen maar ook een klein beetje voor wiskunde.

Beveiliging

Bij summatieve toetsen voor een examen, toelating of certificaat zijn veel voorzieningen op het gebied van beveiliging en privacy nodig. Drie voorbeelden van de zorgen die daarbij naar voren komen zijn: het op afstand vaststellen van de identiteit van de maker van de toets, de hulp van anderen bij de toets en het gebruik van software om de toets te maken die niet toegestaan is. Er zijn al heel wat firma's (zie bijvoorbeeld [19, 34, 35, 37, 39]) die examens zo veilig mogelijk afnemen bij studenten met een internet-aansluiting en een webcam.

Leren bewijzen

Voor het digitaal aanleren van wiskundige bewijzen is nog geen goede methode voorhanden. Een van de meest vergaande pogingen in deze richting is een inleiding in de logica voor studenten filosofie aan de Carnegie Mellon University [1]. Daarin wordt een automatische bewijsassistent gebruikt in een venster naast het dictaat om de student zelf met de aangeboden bewijzen te laten werken. Net als bij *Algebra Interactive* [5] wordt de student dus gevraagd de taal van het achterliggende programma, hier een vorm van formele wiskunde, te gebruiken bij de invoer. De

Bruijn [4], een van de grote pioniers van de formele wiskunde, suggereerde een ‘vernacular’, een taaltje dat weliswaar dicht bij de gebruikelijke taal staat die je in bewijzen tegenkomt, maar dat precies genoeg is om omgezet te kunnen te worden in formele wiskunde. Deze taal is nog niet ontwikkeld en de wiskundige gemeenschap loopt er nog niet warm voor. Toch verwacht ik dat het er binnen afzienbare tijd van gaat komen. Een aantal wiskundigen gaat er serieus mee aan de slag, zoals Ganesalingam en Gowers [11] voor wat betreft het vernacular, en Blok en Hoffman [3], die een interface bouwen om studenten bewijsvoering aan te leren volgens bekende wiskundige

gewoonten met gebruik op de achtergrond van de automatische bewijsverificator en ondersteuningssoftware Coq [7].

Tot slot

Van alle mogelijke vormen van digitaal wiskundig lesmateriaal heb ik maar een klein deel aangestipt. Er valt bijvoorbeeld nog veel te zeggen over de mooie software die opgesomd staat op websites als [33] en [16]; daar zit veel goed materiaal bij om online onderwijs te verlevendigen. De learning management systems (LMS), bedoeld voor het beheer van cursussen aan onderwijsinstellingen, zijn helemaal niet genoemd. Maar ik heb duidelijk willen ma-

ken dat digitaal ondersteund onderwijs al zeer nuttig is in het geval van basisvakken wiskunde (voor de individueel opererende student, voor de klassen die een blended cursus volgen en voor hun docenten), en dat we uit kunnen zien naar veel meer en beter digitaal lesmateriaal, zelfs als het gaat om bewijsvoering voor wiskundestudenten. ☛

Dankwoord

Hierbij bedank ik Max Cohen, Hans Cuyper, Marc Habbema, Wim Honselaar, Bas Spitters en Hans Sterk voor hun goede suggesties bij het schrijven van dit artikel.

Referenties

- J. Avigad, Logic and Proof, avigad.github.io/logic_and_proof.
- R. Blok en C. Hoffman, Spatchcoq, <https://spatchcockedblog.wordpress.com>.
- Sean B. Eom, H. Joseph Wen en Nicholas Ashill, The determinants of students' perceived learning outcomes and satisfaction in university online education: an empirical investigation, *Decision Sciences Journal of Innovative Education* 4 (2006), 215–235.
- N.G. de Bruijn, The mathematical vernacular, a language for mathematics with typed sets, in P. Dybjer e.a., eds., *Proceedings of the Workshop on Programming Languages, Marstrand, Sweden, 1987*.
- A.M. Cohen, H. Cuyper en H. Sterk, *Algebra Interactive*, Springer, 1999.
- A.M. Cohen en L. Meertens, The ACELA project: aims and plans, in: N. Kajler, ed., *Computer-Human Interaction in Symbolic Computation, Texts and Monographs in Symbolic Computation*, Springer, 1998 pp. 7–23.
- Coq, bewijsassistent, coq.inria.fr.
- Coursera, MOOC, www.coursera.org.
- EdX, MOOC, www.edx.org.
- P. Eshuis, R. Houtenbos en J. Boertjens, Digitalisering van wiskunde in het voortgezet onderwijs, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/17 (2016), 10–14.
- M. Ganesalingam en W.T. Gowers, A fully automatic problem solver with human-style output, arxiv.org/abs/1309.4501.
- GAP, www.gap-system.org.
- GeoGebra, Graphing calculator for functions, geometry, algebra, calculus, statistics and 3D mathematics, www.geogebra.org.
- Getal & Ruimte en Moderne Wiskunde*, Noordhoff, Groningen.
- Willem de Graaf, *Lie Algebras: Theory and Algorithms*, deel 56 van North-Holland Mathematical Library, 2000.
- Imaginary, platform for open and interactive mathematics, imaginary.org.
- Khan Academy, www.khanacademy.org/math.
- D. Koller, What we're learning from online education, TED-voordracht, 2012, https://www.ted.com/talks/daphne_koller_what_we_re_learning_from_online_education.
- Kryterion, www.kryterion.com.
- L. Lovász, *An Algorithmic Theory of Numbers, Graphs and Convexity*, SIAM, Philadelphia, 1986.
- Magma Simons Agreement, magma.maths.usyd.edu.au/magma/simons_details.
- MapleTA, www.maplesoft.com/mapleta.
- MathDox formula editor, mathdox.org/formulaeditor.
- Mathematica, www.wolfram.com/mathematica.
- Mathematica Notebooks, www.wolfram.com/mathematica.
- Mathjax, www.mathjax.org.
- MathML, www.mathml.org.
- Maxima, maxima.sourceforge.net.
- MemRise, Ed Cooke en Greg Detre, online cursusmateriaal gecreëerd door gebruikers, memrise.com.
- ONBETWIST: ONderwijs verBETeren met WISKunde Toetsen, SURF-project, www.onbetwist.org.
- OpenDreamKit project, opendreamkit.org.
- OpenMath, www.openmath.org.
- ORMS: Oberwolfach References on Mathematical Software, orms.mfo.de.
- Proctorexam, proctorexam.com.
- ProctorU, www.proctoru.com.
- Rekentuin, online rekenoefenprogramma voor po en vo, www.rekentuin.nl.
- Respondus, www.respondus.com.
- SageMath, www.sagemath.org.
- Software Secure, www.softwaresecure.com.
- STACK, www.stack.bham.ac.uk.
- Terence Tao, blog, terrytao.wordpress.com.
- WebMathematica, <http://www.wolfram.com/products/webmathematica>.
- WebMathematica, <http://www.wolfram.com/mathematica/online>.
- Wikipedia entry on Computable number, en.wikipedia.org/wiki/Computable_number.
- Wolframalpha, www.wolframalpha.com.
- XML, www.xml.org.
- Di Xu en Shanna Smith Jaggars, The impact of online learning on students' course outcomes: Evidence from a large community and technical college system, *Economics of Education Review* 37 (2013) 46–57.