

Jan van de Craats

Korteweg-de Vries Instituut  
Universiteit van Amsterdam  
j.vandecraats@uva.nl

## Onderzoek

# Feuerbach met complexe getallen

Het is welbekend dat voor elke driehoek de middens van de drie zijden, de voetpunten van de drie hoogtelijnen en de middens van de verbindingslijnstukken van het hoogtepunt met de drie hoekpunten op één cirkel liggen, de zogenaamde negenpunts­cirkel. In 1822 bewees Karl Wilhelm Feuerbach dat deze cirkel raakt aan de ingeschreven en de drie aangescreven cirkels van de driehoek. Een bijzonder elegant bewijs hiervan met behulp van complexe getallen is te vinden in het boek *Inversive Geometry* uit 1933 van Frank Morley en zijn zoon Frank Vigor Morley. In dit artikel geeft Jan van de Craats een bewijs dat op hun ideeën gebaseerd is. Frank Morley senior is overigens vooral bekend geworden doordat hij rond 1900 de naar hem genoemde *trisectricestelling* vond: in een driehoek snijden bepaalde trisectrices elkaar paarsgewijs in de hoekpunten van een gelijkzijdige driehoek.

Eerst laat ik met behulp van complexe getallen zien dat de negen genoemde bijzondere punten van een driehoek inderdaad op één cirkel liggen.

### De negenpunts­cirkel

Laat gegeven zijn een driehoek met hoekpunten  $z_1$ ,  $z_2$  en  $z_3$ , en neem aan dat de omgeschreven cirkel ervan samenvalt met de eenheids­cirkel in het complexe vlak. Het middelpunt van de omgeschreven cirkel is dus het complexe getal 0. Definieer

$$h = z_1 + z_2 + z_3,$$

$$n = \frac{1}{2}(z_1 + z_2 + z_3),$$

$$c = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3).$$

Deze punten liggen met 0 op één lijn, de zogenaamde *rechte van Euler*, en wel zo-

danig dat de punten  $c$  en  $n$  het lijnstuk  $0h$  verdelen in de verhouding 2:1:3. Verder gelden de volgende drie stellingen:

1.  $c$  is het zwaartepunt van de driehoek en  $c$  verdeelt elke zwaartelij­n in de verhouding 2:1.
2.  $h$  is het hoogtepunt van de driehoek.
3.  $n$  is het middelpunt van de negen­punts­cirkel, de cirkel die gaat door de middens van de zijden, de voetpunten van de hoogtelijnen en de middens van de lijnstukken die de hoekpunten verbinden met het hoogtepunt.

*Bewijs:* 1. Zie Figuur 1. Omdat

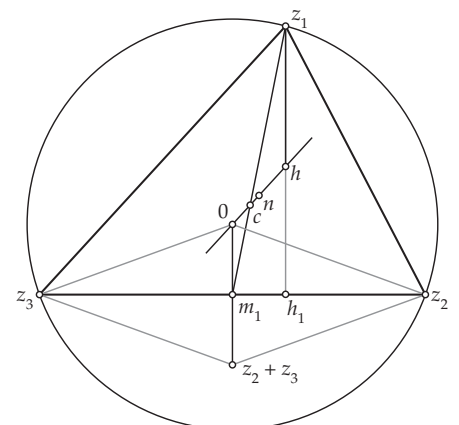
$$c = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3) = \frac{1}{3}z_1 + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}(z_2 + z_3)\right)$$

ligt  $c$  op de zwaartelij­n van  $z_1$  naar het midden  $m_1 = \frac{1}{2}(z_2 + z_3)$  van zijde  $z_2z_3$ , en

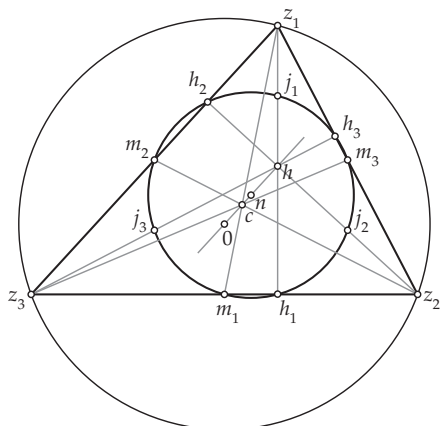
verdeelt  $c$  die zwaartelij­n in de verhouding 2:1. Evenzo voor de andere zwaartelij­nen.

2. Zie Figuur 1. Uit  $h - z_1 = z_2 + z_3$  volgt dat de vector van  $z_1$  naar  $h$  loodrecht staat op de zijde  $z_2z_3$ . Het punt  $h$  ligt dus op de hoogtelij­n uit  $z_1$ , en evenzo op de hoogtelij­nen uit  $z_2$  en  $z_3$ .

3. Zie Figuur 2. De puntvermenig­vulding vanuit  $c$  met een factor  $-\frac{1}{2}$  voert de hoekpunten van de driehoek over in de middens  $m_1$ ,  $m_2$  en  $m_3$  van de zijden, en de eenheids­cirkel in de cirkel met middelpunt  $n$  en straal  $\frac{1}{2}$ .



Figuur 1 De rechte van Euler.



**Figuur 2** De negenpunts­cirkel en de rechte van Euler.

De puntvermenigvuldiging vanuit  $h$  met een factor  $\frac{1}{2}$  voert de hoekpunten van de driehoek over in de aangegeven punten  $j_1, j_2$  en  $j_3$  en de eenheids­cirkel weer in de cirkel met middelpunt  $n$  en straal  $\frac{1}{2}$ .

De opeenvolging van de puntvermenigvuldiging vanuit  $h$  met een factor 2 en de puntvermenigvuldiging met factor  $-\frac{1}{2}$  vanuit  $c$  is een puntspiegeling. Het punt  $n$  gaat daarbij via 0 in zichzelf over, dus  $n$  is het centrum van die puntspiegeling. Verder gaat elk punt  $j_i$  via  $z_i$  over in  $m_i$ . De punten  $j_i$  en  $m_i$  zijn dus diametra­le punten op de negenpunts­cirkel, en bijgevolg liggen ook de voetpunten  $h_i$  op die cirkel (stelling van Thales).

**De stelling van Feuerbach**

Voor het bewijs van de stelling van Feuerbach neem ik niet de omschreven cirkel van de driehoek als eenheids­cirkel in het complexe vlak, maar een van de in- en aangeschreven cirkels. De (eventueel verlengde) zijden van de driehoek zijn nu dus raaklijnen aan de eenheids­cirkel.

In het bewijs reserveer ik de letter  $d$  (van ‘draaiing’) voor complexe getallen op de eenheids­cirkel. Er geldt dus altijd  $d\bar{d} = 1$  oftewel  $\bar{d} = 1/d$ . Laat  $z_1 z_2 z_3$  een driehoek zijn die de eenheids­cirkel als ingeschreven of aangeschreven cirkel heeft. De raakpunten op de eenheids­cirkel noem ik  $d_1, d_2$  en  $d_3$ , met  $d_1$  op  $z_2 z_3$ , enzovoorts. Verdere notaties:

$$\begin{aligned} s_1 &= d_1 + d_2 + d_3 s_2, \\ s_2 &= d_1 d_2 + d_2 d_3 + d_3 d_1 s_3, \\ s_3 &= d_1 d_2 d_3. \end{aligned}$$

Merk op dat  $\bar{s}_1 = s_2/s_3$  en  $s_3 \bar{s}_3 = 1$ . Het getal  $s_3$  ligt dus ook op de eenheids­cirkel. Zonder beperking van de algemeenheid stel ik

$$s_3 = 1$$

(deel anders alle  $d_i$  door eenzelfde derde­machtswortel uit  $s_3$ ). Dan geldt dus  $\bar{s}_1 = s_2$  en  $\bar{s}_2 = s_1$ .

Als  $z$  een punt is op een raaklijn aan de eenheids­cirkel met raakpunt  $d$ , dan zijn de driehoeken  $z0d$  en  $z(2d)d$  elkaars spiegelbeeld in de raaklijn (zie Figuur 3), dus dan is

$$\frac{z-0}{d-0} = \overline{\left(\frac{z-2d}{d-2d}\right)} = \frac{\bar{z}-2\bar{d}}{-\bar{d}},$$

oftewel

$$z + d^2 \bar{z} = 2d.$$

Het hoekpunt  $z_1$  van de driehoek ligt op de zijden met raakpunten  $d_2$  en  $d_3$  (zie Figuur 4), dus

$$z_1 + d_2^2 \bar{z}_1 = 2d_2 \quad \text{en} \quad z_1 + d_3^2 \bar{z}_1 = 2d_3.$$

Aftrekken en delen door  $d_2 - d_3$  geeft  $(d_2 + d_3) \bar{z}_1 = 2$  dus

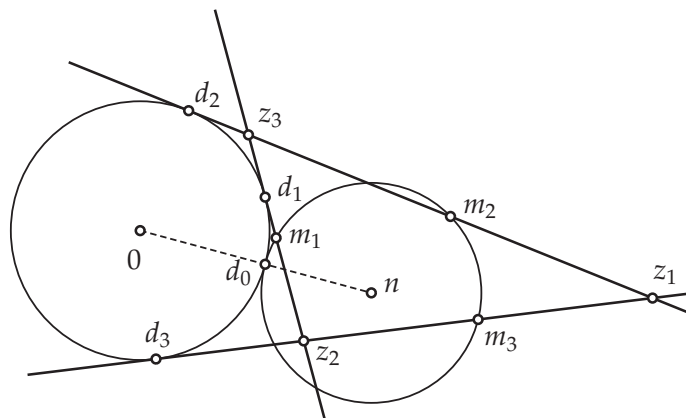
$$\bar{z}_1 = \frac{2}{d_2 + d_3} \quad \text{zodat} \quad z_1 = \frac{2d_2 d_3}{d_2 + d_3},$$

en analoog voor  $z_2$  en  $z_3$ . Het midden  $m_1 = \frac{1}{2}(z_2 + z_3)$  van zijde  $z_2 z_3$  voldoet dus aan

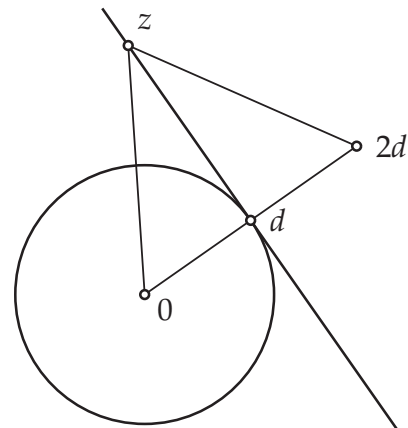
$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{d_1 d_3}{d_1 + d_3} + \frac{d_2 d_1}{d_2 + d_1} = \frac{d_1 (s_2 + d_2 d_3)}{(d_1 + d_3)(d_1 + d_2)} \\ &= \frac{(s_2 + d_2 d_3)(d_1 d_2 + d_1 d_3)}{(d_1 + d_3)(d_1 + d_2)(d_2 + d_3)} \\ &= \frac{(s_2 + d_2 d_3)(s_2 - d_2 d_3)}{(s_1 - d_2)(s_1 - d_3)(s_1 - d_1)} \\ &= \frac{s_2^2 - (d_2 d_3)^2}{s_1 s_2 - s_3} = \frac{\bar{s}_1^2 - \bar{d}_1^2}{s_1 s_1 - 1} \end{aligned}$$

(hierbij is in de laatste stap gebruikt dat  $s_3 = 1$  en  $\bar{s}_1 = s_2$ ). Evenzo geldt

$$m_2 = \frac{\bar{s}_1^2 - \bar{d}_2^2}{s_1 s_1 - 1} \quad \text{en} \quad m_3 = \frac{\bar{s}_1^2 - \bar{d}_3^2}{s_1 s_1 - 1}.$$



**Figuur 4** De negenpunts­cirkel raakt de eenheids­cirkel.



**Figuur 3** De raaklijn aan de eenheids­cirkel in  $d$ .

Als  $d$  de eenheids­cirkel doorloopt, dan doorloopt

$$z = \frac{1}{s_1 \bar{s}_1 - 1} (\bar{s}_1^2 - d)$$

een cirkel met middelpunt

$$n = \frac{\bar{s}_1^2}{s_1 \bar{s}_1 - 1}.$$

Voor  $d = \bar{d}_1^2, d = \bar{d}_3^2$  geeft dit respectie­ve­lijk  $m_1, m_2$  en  $m_3$ . Het is dus de negen­punts­cirkel van driehoek  $z_1 z_2 z_3$ . Kies nu  $d = d_0 = \bar{s}_1/s_1$  (dit is een punt op de eenheids­cirkel), dan blijkt dit punt ook op de negen­punts­cirkel te liggen want

$$\frac{1}{s_1 \bar{s}_1 - 1} (\bar{s}_1^2 - \frac{\bar{s}_1}{s_1}) = \frac{\bar{s}_1 (s_1 \bar{s}_1 - 1)}{(s_1 \bar{s}_1 - 1) s_1} = \frac{\bar{s}_1}{s_1} = d_0.$$

Bovendien geldt

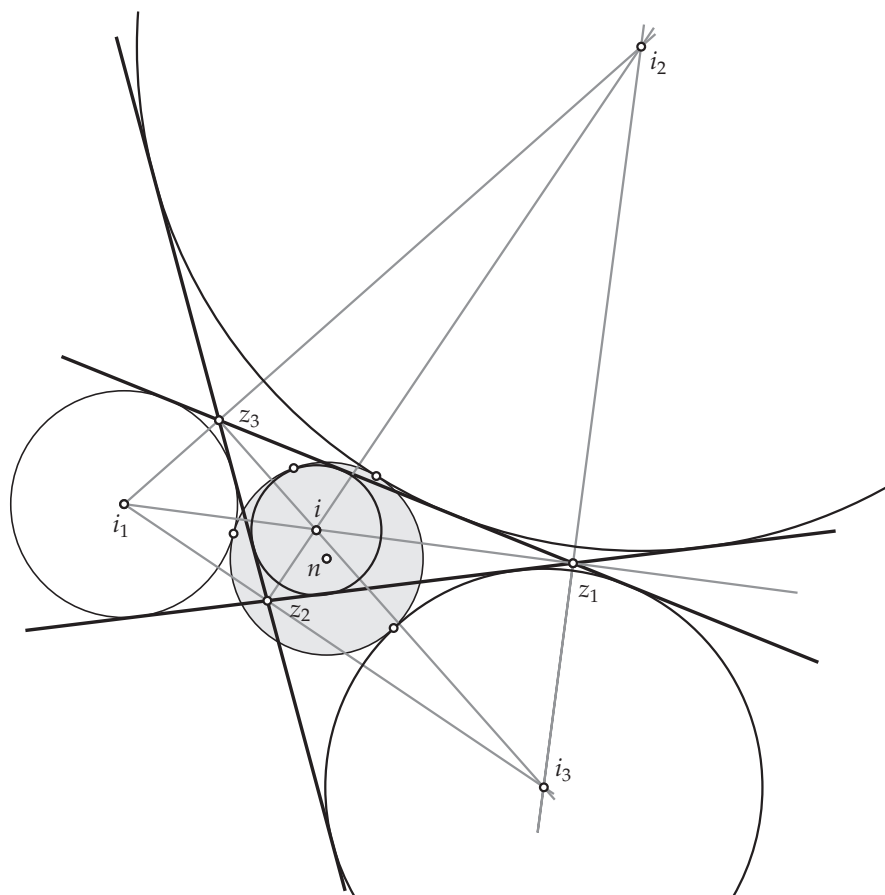
$$d_0 = \frac{\bar{s}_1}{s_1} = \frac{\bar{s}_1^2}{s_1 s_1} = \frac{\bar{s}_1 s_1 - 1}{s_1 s_1} n.$$

$d_0$  is dus een reëel veelvoud van  $n$ , met andere woorden,  $n, d_0$  en 0 liggen op één lijn. Dat betekent dat de negen­punts­cirkel en de eenheids­cirkel elkaar in  $d_0$  raken (zie Figuur 4). Hiermee is bewezen:

**Stelling** (K.W. Feuerbach). *De negenpuntscirkel van een driehoek raakt de ingeschreven cirkel en de drie aangeschreven cirkels.*

In Figuur 5 zijn de middelpunten van de in- en aangeschreven cirkels aangegeven met  $i$ ,  $i_1$ ,  $i_2$  en  $i_3$ . Ze liggen op de binnen- en buitenbissectrices van driehoek  $z_1z_2z_3$ . Omdat de binnenbissectrice en de buitenbissectrice van een hoek elkaar loodrecht snijden, vormen  $i$ ,  $i_1$ ,  $i_2$  en  $i_3$  een *orthogonaal viertal*, dat wil zeggen dat elk punt het hoogtepunt is van de driehoek van de andere drie. De verbindingslijnen van het middelpunt  $n$  van de negenpuntscirkel met die vier punten gaan door de raakpunten van de negenpuntscirkel met de ingeschreven en aangeschreven cirkels (zie ook Figuur 4). Daarmee is, dankzij Feuerbach, het aantal bijzondere punten op de negenpuntscirkel van een driehoek toegenomen van negen naar dertien!

*Opmerking:* Het bewijs van vader en zoon Morley staat op bladzijde 191 van hun boek *Inversive Geometry* uit 1933, dat onlangs opnieuw uitgebracht is in de serie Dover Books on Mathematics. Morley's stelling over trisectrices wordt daarin behandeld op bladzijde 244.



Figuur 5 De stelling van Feuerbach.