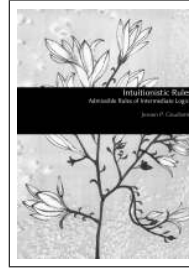


In de verdediging

| In defence



Intuitionistic Rules: Admissible Rules of Intermediate Logics

Jeroen Goudsmit

Jeroen Goudsmit behaalde bachelordiploma's wiskunde, informatica en cognitieve kunstmatige intelligentie en een masterdiploma wiskunde voor hij werd aangenomen in het Vidi-project 'The power of constructive proofs' van dr. Rosalie Iemhoff. Onder begeleiding van haar en van prof.dr. Albert Visser schreef hij het proefschrift *Intuitionistic Rules: Admissible Rules of Intermediate Logics* dat hij op 29 mei 2015 succesvol verdedigde. Hij werkte bij de theoretische filosofiegroep van de faculteit Geesteswetenschappen aan de Universiteit Utrecht, maar benadrukt dat zijn werk meer wiskundig dan filosofisch van aard is.

Tussen klassieke en intuïtionistische logica

Om een beschrijving te geven van de inhoud van zijn proefschrift vertelt Goudsmit eerst over verschillende logische stromingen: "Wiskundigen zien patronen en proberen deze te vangen in stellingen. Een stelling wordt sluitend beargumenteerd, waarmee ze als bewezen wordt beschouwd. Maar niet alle wiskundigen zijn het met elkaar eens over wat een sluitend argument is. Hoewel de meesten gebruikmaken van de klassieke logica, bestaan er verscheidene andere stromingen, elk met een eigen blik op wat een sluitend argument is. Een van die andere stromingen is het *intuitionisme* waarvan Brouwer de grondlegger was."

Een logica wordt gegeven door axioma's en afleidingsregels. Een *axioma* is een beginaanname, een voor bewezen aangenomen uitspraak binnen de logica. Met een *afleidingsregel* bewijst men een uitspraak uit al eerder bewezen uitspraken. De axioma's en afleidingsregels van een logica geven tezamen een tweedeling tussen alle uitspraken: de uitspraken die bewezen kunnen worden, en de uitspraken die niet bewezen kunnen worden. Intuïtionistische logica en klassieke logica zijn aan elkaar verwant: ze delen dezelfde afleidingsregels, alleen kent klassieke logica één extra axioma, de 'wet van de uitgesloten derde'. De wet van de uitgesloten derde is een logische wet die inhoudt dat iedere uitspraak waar of onwaar is; een andere, derde, mogelijkheid is er niet. De 'uitgesloten derde' is dus iedere andere denkbare waarheidswaarde. Een logica die voldoet aan de wet heet klassiek.

Het al dan niet volgen van de wet van de uitgesloten derde heeft aanzienlijke implicaties voor de acceptatie van bepaalde bewijzen, met name bewijzen uit het ongerijmde. Goudsmit: "Een bewijs in intuïtionistische logica zegt niet alleen dat iets bestaat, maar ook hoe het te vinden is. Men zegt ook wel dat een bewijs computationele inhoud heeft: bewijzen zijn algoritmes. In klassieke logica is het veel lastiger om een algoritme te extraheren uit een bewijs."

Vanwege de verwantschap tussen intuïtionistische en klassieke logica vormen de bewezen uitspraken in de intuïtionistische logica een deelverzameling van die in de klassieke logica. Er bestaat een continuüm van logica's waarvan de bewezen uitspraken hier tussenin liggen, maar die ook precies dezelfde afleidingsregels kennen. Het proefschrift van Goudsmit richt zich op deze *intermediaire logica's*.

Pas gepromoveerden brengen hun werk onder de aandacht.
Heeft u tips voor deze rubriek of bent u zelf pas gepromoveerd?
Laat het weten aan onze redacteur.

Redacteur: Geertje Hek
la Voie-du-Coin 7
1218 Grand-Saconnex
Zwitserland
verdediging@nieuwarchief.nl

Toelaatbare regels

Gegeven een bepaalde logica heeft elke uitspraak een label: ofwel de uitspraak kan bewezen worden, ofwel dit kan niet. Als er een axioma toegevoegd zou worden aan de logica, dan kan de labeling veranderen. Immers, als dit axioma niet al een bewezen uitspraak (een stelling) was, is ze dat nu zeker wel. Als er een regel toegevoegd wordt aan de logica, dan kan de labeling eveneens veranderen. De *toelaatbare regels* van een logica zijn regels die aan de logica toegevoegd kunnen worden als afleidingsregel zonder dat dat nieuwe stellingen oplevert, ofwel regels die de labeling niet veranderen.

In klassieke propositielogica is de notie van een toelaatbare regel niet bijster interessant. Dit komt doordat klassieke logica structureel volledig is: elke toelaatbare regel is equivalent aan een stelling. In intuïtionistische logica ligt de situatie veel subtieler: tal van toelaatbare regels hebben niets van doen met de gegeven stellingen. Dat leidt tot allerlei vragen: is de verzameling van toelaatbare regels beslisbaar, zijn er meerdere logica's die dezelfde toelaatbare regels hebben als intuïtionistische logica, bestaan er basale regels waar alle toelaatbare regels uit volgen? In zijn proefschrift bestudeert Goudsmit de toelaatbare regels van intermediaire logica's in het licht van deze vragen.

Voor het feit dat in de klassieke propositielogica 'elke toelaatbare regel equivalent is aan een stelling' geeft Goudsmit hier een argument, gebruikmakend van waarheidstafels die in de meeste inleidingen tot de logica worden onderwezen: Bekijk een willekeurige regel A/B , waar A en B propositieformules zijn, en stel dat de implicatie $A \rightarrow B$ niet waar is in klassieke propositielogica. Dit betekent dat er een waarheidstafel v bestaat die $A \rightarrow B$ weerlegt. Zo'n waarheidstafel is een erg simpel semantisch object, dat je in de propositielogica kunt encoderen met een substitutie, zeg σ . Preciezer: voor elke formule C geldt dat ' $\sigma(C)$ is bewijsbaar' equivalent is aan de waarheidswaarde van C onder v . Omdat v de implicatie $A \rightarrow B$ weerlegt, moet v de formule A waar maken en B onwaar ('als A dan B ' is niet waar dan en slechts dan als A waar en B niet waar is). Nu volgt dat $\sigma(A)$ bewijsbaar is in klassieke logica, en $\sigma(B)$ dat niet is. Dus is de regel A/B niet toelaatbaar.

Hiermee uit het ongerijmde bewezen: als A/B toelaatbaar is, dan is de overeenkomstige formule $A \rightarrow B$ een stelling. De implicatie de andere kant op is triviaal. Stel $A \rightarrow B$ is een stelling (dus bewijsbaar), en we willen aantonen dat A/B toelaatbaar is. Neem een willekeurige substitutie σ , en stel $\sigma(A)$ is bewijsbaar. Omdat $A \rightarrow B$ bewijsbaar is, is $\sigma(A \rightarrow B) = \sigma(A) \rightarrow \sigma(B)$ dat ook. Omdat $\sigma(A) \rightarrow \sigma(B)$ en $\sigma(A)$ bewijsbaar zijn, is $\sigma(B)$ dat ook. Klaar.

Visser-regels en hun geschiedenis

Waarheidstafels zijn een systematische manier om een uitspraak in klassieke propositielogica (syntaxis) om te zetten naar een waarheidswaarde (semantiek). Zo kan men testen of een uitspraak waar is, simpelweg door de waarheidstafel te controleren. Er bestaat ook een verfijndere notie van semantiek voor intuïtionistische logica, in de vorm van Kripke-modellen. Goudsmit behandelt veralgemeniseringen van dit begrip, teneinde semantiek te geven, niet aan de bewijsbaarheid van een formule, maar *aan de toelaatbaarheid van een regel*. Deze noties komen van pas bij het beantwoorden van alle hierboven genoemde vragen. In grote tegenstelling tot semantiek voor stellingen, volstaat het bij semantiek voor toelaatbare regels niet om slechts eindige modellen te bekijken. Hiervoor geeft hij een elementair argument.

Goudsmit vindt stelling 7.33 van zijn proefschrift het leukst. Deze zegt dat de logica van een ten hoogste n -voudige vertakking de maximale intermediaire logica is waarvoor de eerste n Visser-regels toelaatbaar zijn. Minder technisch: de stelling karakteriseert een aftel-

bare reeks van intermediaire logica's door middel van hun toelaatbare regels.

De Visser-regels vormen een basis voor de toelaatbare regels van de intuïtionistische propositielogica. De n -de Visser-regel is:

$$\left(\bigvee_{i=1}^n x_i \rightarrow z \right) \rightarrow \bigvee_{j=1}^n x_j \Big/ \bigvee_{j=1}^n \left(\left(\bigvee_{i=1}^n x_i \rightarrow z \right) \rightarrow x_j \right).$$

De regels zijn genoemd naar Goudsmit's promotor Albert Visser, maar zijn door meerdere mensen ontdekt, in verschillende contexten. De eerste ontdekker die Goudsmit kon vinden was Alex Citkin, die de regels in 1979 in een abstract voor een Russische conferentie omschreef. Albert Visser en Dick de Jongh dachten in de jaren tachtig over toelaatbare regels in de context van Heyting's rekenkunde, en in deze setting zijn de Visser-regels ontstaan. Omdat ze geen specifiek resultaat over deze regels hadden, waren ze toen niet gepubliceerd. Ook Skura en Rozière gebruikten varianten van de regels, voordat Rosalie Iemhoff ze in 2001 voor het eerst 'Visser-regels' noemde. Er waren tot kort geleden nauwelijks artikelen die het werk van Citkin en Skura noemden, omdat het eerste simpelweg onbekend was, en omdat het verband tussen Skura's werk en toelaatbaarheid nog niet bekend was.

Goudsmit kreeg het idee om genoemde stelling te bewijzen toen hij op Skura's artikel uit 1989 stuitte waarin intuïtionistische propositielogica op een zeer elementaire manier gekarakteriseerd wordt door middel van een zogeheten refutatiesysteem. Dit resultaat is best onbekend, en refutatiesystemen worden niet veel meer gebruikt. Wat het voor Goudsmit zo bijzonder maakte is dat het refutatiesysteem (in zekere zin een bewijsstelsel voor onbewijsbaarheid) gebruikmaakte van regels die leken op de Visser-regels die hij kende, maar dan op hun kop. En dat terwijl Skura de Visser-regels nooit gezien had, of überhaupt gewerkt had aan toelaatbare regels. Goudsmit wilde begrijpen wat het verband was tussen refutatiesystemen en toelaatbare regels, en hieruit is zijn stelling voortgekomen.

Gesprekken en ontmoetingen rondom logica

Goudsmit genoot van de extreme autonomie die hij als promovendus had. Het ongebonden zoeken was erg leuk, maar soms ook eenzaam. Vooral in de eerste maanden, toen hij nog niet echt *zijn* probleem had gevonden, vond hij dat lastig. Toen hij eenmaal een pakkend probleem door Iemhoff aangedragen kreeg, kwam hij goed op gang. Dit probleem werd zijn eerste artikel en vormde het begin van zijn tocht door toelaatbaarheid. De begeleiding was hecht en de logici werkten binnen de theoretische-filosofiegroep, waarbinnen een prettige sfeer hing. Ze lunchten bijvoorbeeld ongeveer dagelijks met de hele groep. Ook buiten het onderzoek zocht en vond Goudsmit diversiteit. Hij sloot zich al snel aan bij het Promovendi-overleg Utrecht (Prout), en werd in september 2013 de eerste promovendus in de Utrechtse Universiteitsraad sinds een goed decennium. Goudsmit: "Het was bijzonder interessant om vanuit deze hoek de universiteit mee te maken, en hier ook wat bij te kunnen dragen."

Het mooiste aan zijn onderzoekstijd vond hij echter de gesprekken en ontmoetingen rondom logica. Bijvoorbeeld toen Tom Skura op bezoek kwam en voor het eerst sprak met de Nederlandse logici die werkten aan toelaatbaarheid. Of tijdens zijn eigen bezoek aan Vladimir Rybakov, om met hem te spreken over de gedachten achter zijn oorspronkelijke bewijs voor de beslisbaarheid van de toelaatbare regels van intuïtionistische logica. Ook de vele inspirerende gesprekken met Dick de Jongh, die telkens weer tot nieuwe ideeën leidden, waren erg motiverend. En al met al heeft dit alles geleid tot een mooi proefschrift.