

Sem Borst

Faculteit Wiskunde en Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
s.c.borst@tue.nl

Johan van Leeuwen

Faculteit Wiskunde en Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
j.s.h.v.leeuwen@tue.nl

Peter van de Ven

Research Group Stochastics
Centrum Wiskunde & Informatica, Amsterdam
ven@cwi.nl

Stochastische modellen voor random-access-netwerken

Draadloze communicatienetwerken spelen een cruciale rol in het verbinden van laptops, smartphones, sensoren en talloze fysieke apparaten, en zijn van vitaal belang voor het uitwisselen van data tussen personen, computerbreinen en andere elementen in onze informatiemaatschappij. Wegens de immense schaalgrootte en fijnmazige infrastructuur, is het onmogelijk centraal de regie te voeren over het dataverkeer in deze netwerken. Doorgaans worden dan ook zogenaamde random-access-algoritmen gebruikt, waar individuele gebruikers de datastromen op autonome wijze aansturen. Sem Borst, Johan van Leeuwen en Peter van de Ven beschrijven in dit artikel stochastische deeltjesmodellen om het macroscopische gedrag van deze netwerken te begrijpen en de prestaties te verbeteren.

Data wordt in toenemende mate draadloos verzonden, wegens de voordelen in het gebruiksgemak, bereik en flexibiliteit vergeleken met bekabelde netwerken. Een kenmerkende eigenschap van draadloze communicatie is dat de signalen in alle richtingen worden verzonden, in plaats van slechts naar de beoogde ontvanger. Zodoende kunnen de talrijke signalen in grootschalige netwerken elkaar verstoren als gevolg van interferentie. Om zulke interferentie te voorkomen of te verminderen, is het dan ook van belang om ervoor te zorgen dat nabije gebruikers van het draadloze netwerk niet gelijktijdig data verzenden. Draadloze netwerken beschikken daartoe over algoritmen die de activiteit van de gebruikers regelen.

Wanneer we een groep draadloze gebruikers beschouwen, bijvoorbeeld apparaten zoals laptops, tablets en smartphones, dan vormen de posities en activiteiten van deze apparaten het netwerk. Ieder apparaat heeft een eigen databuffer en genereert in de loop van de tijd data die de gebruiker naar een bepaalde ontvanger wil verzenden, via draadloze communicatie. Het netwerk is stabiel als alle individuele databuffers

stabiel zijn, en het globale perspectief op het gehele netwerk is zodoende sterk verweven met de lokale blik op de individuele gebruikers.

We nemen aan dat de activiteit van de gebruikers wordt aangestuurd door lokale algoritmen, waarbij elke gebruiker in het netwerk zelf bepaalt wanneer deze data verzendt, slechts gebruikmakend van lokale informatie. Een voorbeeld van een dergelijk lokaal algoritme is geïmplementeerd in het zogeheten IEEE 802.11-protocol, dat het kloppend hart is van wifi-netwerken zoals we die elke dag gebruiken op het werk, in de trein en thuis. Grofweg gaat het algoritme als volgt te werk. De capaciteit wordt verdeeld volgens een loterij tussen apparaten in de directe nabijheid van elkaar. Het kansspel wordt, zeg, iedere milliseconde gespeeld en het apparaat met het winnende lot mag gedurende die milliseconde data versturen.

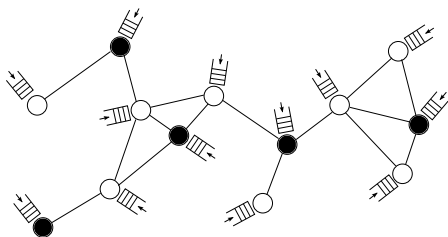
Een interessante verfijning van dit protocol, die we later zullen bespreken, bestaat uit een gewogen loterij. Hoe voller de buffer van het apparaat, hoe meer lotjes het apparaat krijgt om de loterij mee te winnen. Op deze manier stabiliseert het systeem zich effectie-

ver. De minder volle buffers winnen minder vaak en worden wat voller, terwijl de volle buffers de kans krijgen om leeg te lopen.

Wanneer we draadloze netwerken en lokale algoritmen iets abstracter bekijken, dan komen we tot een probabilistisch deeltjesmodel op een graaf. De graaf bestaat uit N nodes (de gebruikers in het netwerk) en twee nodes zijn verbonden door een kant wanneer deze nodes niet gelijktijdig actief kunnen zijn (data kunnen verzenden). Denk hierbij aan gebruikers die zich dicht bij elkaar bevinden en elkaars signalen dus kunnen verstoren. Deze graaf noemen we de interferentiegraaf. Een lokaal algoritme zou, lichtelijk gestileerd, als volgt kunnen opereren op deze graaf:

1. Iedere node krijgt een klok die afgaat na een exponentiële tijd met gemiddelde $1/v$.
2. Zodra zijn klok afgaat, probeert een node actief te worden en dus data te verzenden. De node zal echter eerst moeten nagaan of geen van zijn burens in de graaf reeds actief is.
- 3a. Indien geen enkele buur actief is, zal de node data verzenden voor een exponentiële tijd met gemiddelde 1.
- 3b. Indien tenminste één naburige node actief is, dan blijft de node waarvan de klok is afgegaan inactief en probeert het na een nieuwe exponentiële tijd met gemiddelde $1/v$ nogmaals.

Op deze manier verkrijgen we een stochastisch netwerk bestaande uit nodes die door de tijd afwisselend actief en inactief zijn. Het bovenstaande lokale en tevens random algoritme zorgt ervoor dat alle nodes regelmatig



Figuur 1 Een interferentiegraaf met draadloze gebruikers en hun buffers.

kans krijgen iets te verzenden, en belet dat naburige nodes tegelijk actief zijn. De parameter $\nu > 0$ geeft de agressiviteit van het algoritme weer: wanneer ν klein is, zullen nodes lang wachten tussen opeenvolgende activeringspogingen en zullen dus maar relatief weinig nodes tegelijk actief zijn.

Wegens de randomness van het hierboven beschreven algoritme worden deze netwerken in de literatuur aangeduid als *random-access-netwerken*. Dankzij de exponentiële aannamen zijn random-access-netwerken te beschrijven in termen van stochastische modellen die bekend staan als *deeltjesmodellen met interactie*. Deze deeltjesmodellen hebben veel toepassingen in onder andere de wiskunde, natuurkunde en scheikunde (zie ook [7] in dit nummer). Zo wordt in de statistische mechanica magnetische werking beschreven in termen van het Ising-model, een deeltjesmodel waarbij de deeltjes magnetische dipolen zijn waarvan de spin ofwel opwaarts ofwel neerwaarts gericht is, dus toestand +1 of -1. De deeltjes in random-access-netwerken zijn in de toestand 0 (inactief) of 1 (actief). In beide deeltjesmodellen vertonen de deeltjes een bepaalde interactie. Waar magnetische werking aanleiding geeft tot ferromagnetische interactie (deeltjes in de nabijheid van elkaar hebben een voorkeur voor dezelfde richting), is de interactie in random-access-netwerken anti-ferromagnetisch: de burens van een deeltje in toestand 1 moeten wel in toestand 0 zitten. Deze zeer strikte vorm van interactie wordt ook wel *hardcore* interactie genoemd en vindt naast random-access-netwerken ook toepassingen in moleculaire gassen waarin de moleculen elkaar niet in de nabijheid dulden [10].

Laat $X_i(t) \in \{0, 1\}$ de toestand weergeven van node i op tijdstip t van het deeltjesmodel met deze hardcore interactie. We introduceren $X(t) = (X_1(t), \dots, X_N(t))$ en merken op dat $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ een Markov-proces is. Het langetermijngedrag van dit proces is uitvoerig bestudeerd in de literatuur, in het bijzonder de limietverdeling $\pi(\omega)$. Deze verdeling beschrijft voor elke mogelijke netwerk-

toestand ω de frequentie waarmee deze toestand op de lange termijn optreedt. Een toestand ω is een combinatie van actieve en inactieve nodes, zodat $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_N) \in \{0, 1\}^N$. De limietverdeling kan op elegante wijze worden uitgedrukt in de parameters van het netwerk:

$$\pi(\omega) = Z^{-1} \prod_{i=1}^N \nu^{\omega_i} = Z^{-1} \nu^{|\omega|}, \quad (1)$$

waarbij Z de normalisatieconstante is die ervoor zorgt dat de kansen $\pi(\omega)$ sommeren tot 1. We zien dat $\pi(\omega)$ exponentieel groeit in het aantal actieve nodes in de betreffende toestand (de kardinaliteit $|\omega|$ van ω).

De verzameling van mogelijke toestanden die het netwerk kan aannemen bestaat uit alle onafhankelijke verzamelingen van de interferentiegraaf. Een onafhankelijke verzameling is een deelverzameling van de knopen van die graaf die geen van alle verbonden zijn door een kant. Voor het gemak nemen we aan dat slechts één frequentiekanaal beschikbaar is in het draadloze netwerk. Wanneer het netwerk over meerdere frequentiekanaalen beschikt, dan wordt de rol van de onafhankelijke verzamelingen overgenomen door kleuringen van de interferentiegraaf, zie bijvoorbeeld [1] elders in dit nummer.

Het vinden van de onafhankelijke verzamelingen van grafen, en in het bijzonder de grootste onafhankelijke verzameling, is een van de meest klassieke problemen in de grafentheorie en NP-volledig. Ondanks de elegante en ogenschijnlijk eenvoudige structuur, kan de limietverdeling in (1) dus zeer lastig te berekenen zijn, omdat in grote netwerken met grote interferentiegrafen voor het bepalen van Z in principe alle onafhankelijke verzamelingen in kaart moeten worden gebracht. Het random-access-netwerk kan weliswaar lokaal worden aangestuurd, maar het gedrag en de prestatie van het netwerk worden beschreven in termen van globale eigenschappen zoals de onafhankelijke verzamelingen. In dit artikel bespreken we een tweetal cruciale prestatieparameters voor random-access-netwerken: doorzet en vertragingen. De wiskundige analyse van het deeltjesmodel verschaft inzicht in deze prestatieparameters en berust op technieken uit de kansrekening voor de klasse van Markov-processen waartoe de deeltjesmodellen behoren.

Doorzet van draadloze netwerken

De doorzet meet de hoeveelheid data die gemiddeld kan worden verzonden per tijdseen-

heid, uitgedrukt in bijvoorbeeld bits of aantallen pakketten per seconde. Uiteraard geldt hierbij dat gebruikers vaak gebaat zijn bij een hoge doorzet. We nemen vooralsnog aan dat alle nodes in een ‘verzadigde’ toestand verkeren. Dat betekent dat de nodes per definitie datapakketten hebben om te verzenden en altijd activeren wanneer zij, gedictieerd door de kloktijden en de activiteit van hun burens, de gelegenheid krijgen. Later zullen we deze aanname loslaten.

We nemen aan dat nodes per activering één pakketje verzenden. De doorzetwaarden van de verschillende nodes in het netwerk vertonen sterke afhankelijkheden, vanwege het feit dat naburige nodes in de graaf niet tegelijk actief kunnen zijn. Namelijk, wanneer een node een hoge doorzet heeft en veel pakketjes verzendt, zullen diens directe burens minder gelegenheid hebben om actief te worden en als gevolg zullen deze een lage doorzet ervaren.

Deze concurrentie tussen de nodes staat centraal bij het analyseren en ontwerpen van draadloze netwerken. De nodes moeten immers samen de capaciteit van het draadloze netwerk delen en het is van belang dat dit op een eerlijke of acceptabele manier gebeurt. Zo is het natuurlijk om de vraag te stellen: “Hoe moeten we een draadloos netwerk ontwerpen zodanig dat alle nodes dezelfde doorzet hebben?”

Om deze en soortgelijke vragen te beantwoorden, kunnen we gebruikmaken van de limietverdeling (1). De doorzet van node i kan als volgt worden uitgedrukt in termen van de limietkansen:

$$\theta_i := \sum_{\omega: \omega_i=1} \pi(\omega) = Z^{-1} \sum_{\omega: \omega_i=1} \nu^{|\omega|}, \quad (2)$$

met $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_N)$ de vector met de doorzetwaarden van alle nodes. De sommatie in (2) is dus over alle toestanden waarin node i actief is.

In [9] wordt met behulp van gedetailleerde simulaties aangetoond dat de doorzet (2) van het deeltjesmodel een verrassend goede benadering vormt voor de doorzet van dit soort draadloze netwerken in de praktijk. Dit ondanks het feit dat signaalsterkte, botsingen en fluctuaties van het draadloze signaal niet worden meegenomen in het deeltjesmodel op de graaf. In de wetenschap dat het deeltjesmodel de werkelijkheid goed beschrijft, kan het worden ingezet om de verschillen tussen de doorzetwaarden van de nodes te vermindern.

Ongelijke of oneerlijke doorzetten zien we in vrijwel alle interferentiegrafen. Beschouw bijvoorbeeld een netwerk van $N = 9$ nodes op een lijn, waarbij elke node zijn directe burens blokkeert wanneer hij actief wordt. Figuur 2 toont de doorzet van elke node berekend met (2), voor verschillende waarden van ν . De buitenste nodes van het netwerk hebben de hoogste doorzet, aangezien zij slechts één naburige node hebben, en dus vaker kunnen activeren dan de overige nodes. De verschillende lijnen komen overeen met bepaalde waarden van ν , waarbij de oscillatie groter wordt voor grotere waarden van ν . Het valt eenvoudig in te zien met behulp van (2) dat $\theta_i \uparrow 1$ wanneer $\nu \rightarrow \infty$ voor alle oneven nodes, en $\theta_i \downarrow 0$ voor alle even nodes.

Een manier om deze ongelijkheid op te heffen is door nodes verschillende activeringsintensiteiten toe te wijzen. Indien node i een activeringsintensiteit ν_i heeft, en $\mathcal{V} = (\nu_1, \dots, \nu_N)$, dan kan (2) worden herschreven als

$$\theta(\mathcal{V}) := \left(Z(\mathcal{V})^{-1} \sum_{\omega: \omega_i=1} \prod_{j=1}^N \nu_j^{\omega_j} \right)_{i=1, \dots, N}. \quad (3)$$

We beschouwen wederom een lineair netwerk met N nodes, waarin actieve nodes hun directe burens blokkeren. Noteer met $\gamma(i)$ het aantal burens van node i . Het is eenvoudig aan te tonen (zie [15]) dat wanneer we node i activeringsintensiteit

$$\nu_i = \alpha(1 + \alpha)^{\gamma(i) - \gamma(1)}, \quad i = 1, \dots, N,$$

toewijzen, met α een willekeurige positieve

constante, elke node een doorzet zal krijgen van

$$\theta_i = \frac{\alpha}{1 + 2\alpha}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Omdat $\gamma(1) = \gamma(N) = 1$, en $\gamma(i) = 2$ voor $i = 2, \dots, N - 1$, zien we dat de buitenste nodes een lagere activeringsintensiteit wordt toegewezen dan de overige nodes. Dit is intuïtief duidelijk, aangezien dit compenseert voor de hoge doorzet van de buitenste nodes in het geval dat de activeringsintensiteiten gelijk zijn.

Het kiezen van activeringsintensiteiten om te zorgen dat alle nodes in een lineair netwerk dezelfde doorzet zullen krijgen, is slechts één instantie van een veel bredere klasse problemen: gegeven een algemene interferentiegraaf, hoe moeten we de activeringsintensiteiten kiezen om een gewenste vector van doorzetwaarden te verkrijgen? Om deze vraag te kunnen beantwoorden, introduceren we de verzameling Γ , die alle mogelijke combinaties van doorzetwaarden bevat die kunnen worden bereikt door het selecteren van verschillende activeringsintensiteiten. Deze verzameling hangt uiteraard af van de structuur van de interferentiegraaf, en kan worden geïnterpreteerd als het bereik van de functie θ geïntroduceerd in (3). Dit bereik kan worden gekarakteriseerd als het inwendige van het convex omhulsel van alle mogelijke onafhankelijke verzamelingen van de interferentiegraaf.

Laat nu $\mathcal{Y} \in \Gamma$ een vector van doorzetwaarden zijn die we willen bereiken. We zijn dan op zoek naar de oplossing $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\mathcal{Y})$ van het

stelsel vergelijkingen

$$\theta(\mathcal{V}) = \mathcal{Y}. \quad (4)$$

Dit is in het algemeen geen eenvoudig probleem, wegens de complexe vorm van de functie θ .

De eerste stap in het oplossen van (4) is om aan te tonen dat θ globaal inverteerbaar is, zodat we weten dat voor elke vector $\mathcal{Y} \in \Gamma$ er precies één oplossing $\mathcal{V}(\mathcal{Y})$ bestaat van (4), zie [14]. In tegenstelling tot het voorbeeld van een lineair netwerk, zal het in het algemeen niet mogelijk zijn om een uitdrukking voor $\mathcal{V}(\mathcal{Y})$ in gesloten vorm te vinden. In plaats daarvan kunnen we bijvoorbeeld numerieke methoden toepassen om dit stelsel op te lossen.

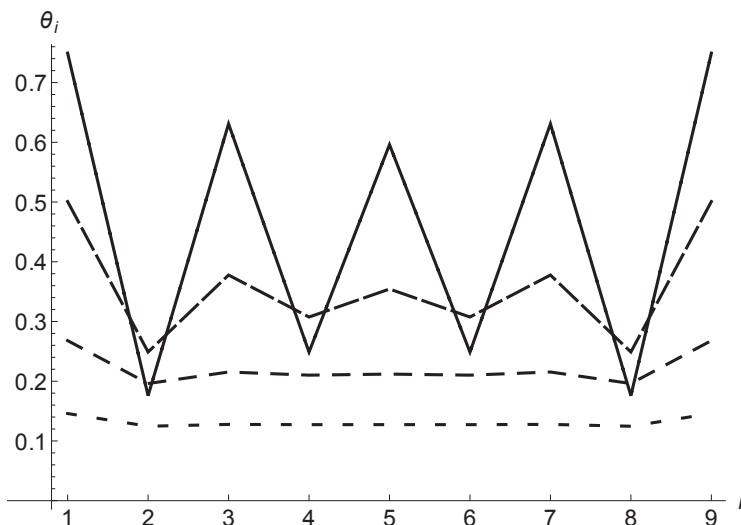
Er is echter nog een manier om $\mathcal{V}(\mathcal{Y})$ te bepalen, waarbij de nodes hun eigen activeringsintensiteit aanpassen aan de hand van het verschil tussen hun gerealiseerde doorzet en de gewenste doorzet. Hiertoe wordt de tijd opgedeeld in intervallen van lengte $\beta(j)$ $j = 1, 2, \dots$, waarbij aan het eind van elk interval de activeringsintensiteiten $\nu_i(j)$ kunnen worden aangepast. Laat $r_i(j) = \log \nu_i(j)$, en pas deze als volgt recursief aan:

$$r_i(j+1) = \left(r_i(j) + \beta(j) (\gamma_i - \hat{\theta}_i(j)) \right)^+, \quad (5)$$

met $\hat{\theta}_i(j)$ de empirische doorzet in het j de interval en $x^+ = \max\{x, 0\}$. Het kan vervolgens worden aangetoond dat voor de juiste keuze van $\beta(j)$, de recursieve reeks (5) inderdaad convergeert naar een oplossing $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_N)$ zodanig dat $\theta_i(\exp(\mathbf{r})) \geq \gamma_i$, $i = 1, \dots, N$ [8]. Dit is een opmerkelijk resultaat, aangezien de aanpassing (5) door elke gebruiker afzonderlijk kan worden berekend, en de nodes dus ondanks de complexe interacties in het netwerk op volledig gedistribueerde wijze op de juiste doorzetwaarden kunnen uitkomen. Net als het eenvoudige algoritme beschreven in de vorige paragraaf is dus ook (5) een lokaal algoritme.

Congestie en vertragingen

Het basismodel zoals besproken in de voorgaande paragrafen berust op de aanname dat in de buffers van de diverse nodes altijd datapakketten beschikbaar zijn voor verzending. In werkelijkheid zullen de buffers geen 'verzadigde' conditie vertonen, maar een variërend aantal pakketten bevatten als gevolg van de natuurlijke fluctuaties in de generatie en transmissie van datapakketten in de loop van de



Figuur 2 Doorzet van een lineair netwerk van 9 nodes voor verschillende waarden van ν .

tijd. In het bijzonder zullen de buffers van tijd tot tijd geheel leeg raken. Het is belangrijk om het stochastische gedrag van de bufferinhoud te analyseren, alsmede de tijdsduur die een datapakket in de buffer doorbrengt tussen generatie en transmissie. Deze verblijftijd, of vertraging, biedt een cruciale maatstaf voor de prestatie van draadloze netwerken zoals ervaren door gebruikers.

In het vervolg van deze paragraaf veronderstellen we dat datapakketten worden gegenereerd bij node i volgens een Poisson-proces met intensiteit λ_i . Om het stochastische gedrag van de bufferinhoud te modelleren, introduceren we $Y(t) = (Y_1(t), \dots, Y_N(t))$, waar $Y_i(t)$ het aantal pakketten voorstelt dat wacht op transmissie of in transmissie is bij node i op tijdstip t . Ondanks het feit dat buffers nu soms geen pakketten bevatten, houden we in eerste instantie vast aan de aanname dat nodes zich voortdurend in de concurrentie om het medium mengen, en altijd activeren wanneer zij daarvoor de gelegenheid krijgen. Deze aanname impliceert dat het activiteitsproces $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ van de diverse nodes niet wordt beïnvloed door de toestand van de buffers, en derhalve de evenwichtsverdeling in (1) behoudt. Het kan dan worden aangetoond dat het Markov-proces $\{(X(t), Y(t))\}_{t \geq 0}$ positief-recurrent is wanneer $\lambda_i < \theta_i$ voor alle nodes $i = 1, \dots, N$. Het proces $\{(X(t), Y_i(t))\}_{t \geq 0}$ is eveneens Markov, en gedraagt zich als een zogenaamd quasi-geboorte-sterfteproces, waarvoor de evenwichtsverdeling langs numerieke weg is te bepalen met behulp van zogeheten matrix-geometrische methoden.

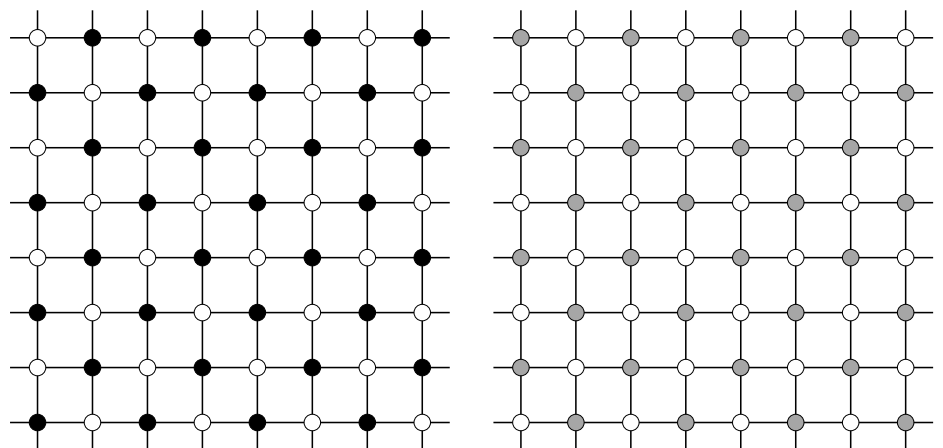
Om enig kwalitatief inzicht te verkrijgen, beschouwen we nu een regime waar de aankomstintensiteiten $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ relatief hoog zijn. Wil stabiliteit gegarandeerd zijn voor dergelijke aankomstintensiteiten, dan moeten ook de doorzetwaarden $\theta_1, \dots, \theta_N$ relatief hoog zijn, wat op zijn beurt weer vereist dat de activeringsintensiteiten ν_1, \dots, ν_N relatief hoog zijn. Een dergelijk regime is niet alleen in theoretisch opzicht interessant, maar ook relevant vanuit praktisch oogpunt. Een relatief zware belasting kan namelijk resulteren in lange vertragingen en mindere kwaliteit van de draadloze dienstverlening, terwijl vertragingen voor lagere aankomstintensiteiten geen essentieel punt van zorg zullen zijn.

Om het globale beeld te belichten, bekijken we een symmetrisch scenario waar alle nodes dezelfde aankomstintensiteiten $\lambda_i \equiv \lambda$ en activeringsintensiteiten $\nu_i \equiv \nu$ hebben. Bovendien richten we de aandacht specifiek op een interferentiegraaf die uit een vierkant

rooster bestaat van dimensie $N = 2L \times 2L$, zoals geïllustreerd in Figuur 3.

In het geval van 'periodieke' randen, waar bij het rooster een torus wordt, ondervinden de nodes aan de periferie van het rooster niet alleen interferentie van directe burens, maar ook van de corresponderende node aan de tegenovergestelde kant van het rooster. Voor zowel 'open' als periodieke randen, is eenvoudig in te zien dat er twee maximumconfiguraties zijn van grootte $N/2 = 2L^2$, die corresponderen met de witte en zwarte velden van een schaakbord, zie Figuur 3. Gemakshalve zullen we beide maximumconfiguraties en corresponderende nodes respectievelijk als 'even' of 'oneven' aanduiden.

Het systeem zal zich in geval van hoge activeringsintensiteiten vrijwel voortdurend in één van beide maximumconfiguraties bevinden. Transitie tussen beide maximumconfiguraties treden slechts zelden op, namelijk op een tijdschaal van de orde $O(\nu^{\kappa(L)})$ voor grote waarden van ν , waar de exponent $\kappa(L)$ respectievelijk gelijk is aan L of $2L$ in het geval van een open dan wel periodieke rand. Dientengevolge zullen individuele nodes die niet tot de huidige actieve configuratie behoren, gedurende lange tijd geen enkele gelegenheid krijgen om pakketten te verzenden. Wanneer bijvoorbeeld de even configuratie actief is, zullen de aankomende pakketten bij de oneven nodes zich opeenhopen, totdat op zeker moment een transitie optreedt naar de oneven configuratie, en de oneven nodes op hun beurt de gelegenheid krijgen om een fors aantal pakketten achtereenvolgens te verzenden. De opeenvolging van langdurige periodes van accumulatie en transmissie betekent dat het aantal pakketten bij een individuele node zich ontwikkelt volgens een soort van zaagtandpatroon zoals geïllustreerd in Figuur 4.



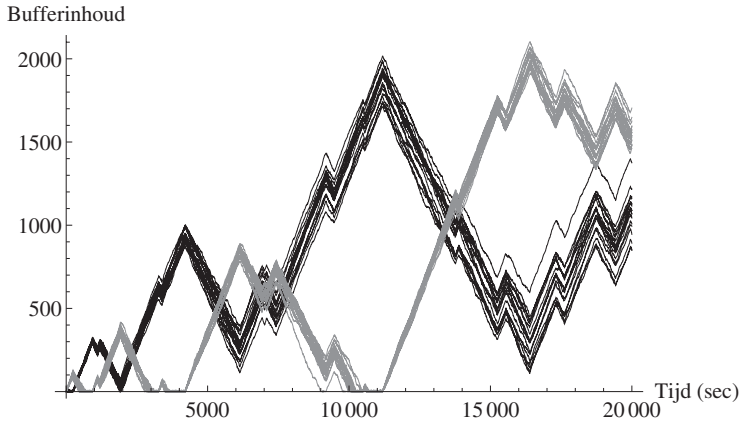
Figuur 3 Even en oneven configuraties voor een netwerk met een roosterstructuur.

De amplitude van het zaagtandpatroon is evenredig met de geassocieerde tijdschaal, en derhalve ruwweg van de orde $O(\nu^{\kappa(L)})$ voor grote waarden van ν .

Het is eenvoudig te verifiëren dat zowel voor open als periodieke randen $\lambda < \frac{1}{2}$ en $\nu > \lambda/(1 - 2\lambda)$ een noodzakelijke voorwaarde is voor stabiliteit van het systeem. We concluderen derhalve dat het gemiddelde aantal pakketten dat zich in de buffer van een individuele node bevindt minstens van de orde $O((\lambda/(1 - 2\lambda))^{\kappa(L)})$ is wanneer de aankomstintensiteit λ de kritieke waarde $\frac{1}{2}$ nadert [16]. Wegens de zogenaamde wet van Little, heeft de gemiddelde vertraging van een pakket dezelfde orde van grootte. Het is belangrijk deze schaling te vergelijken met de gebruikelijke situatie in conventionele wachtrijssystemen waar de gemiddelde vertraging van de orde van grootte $O(\lambda/(1 - 2\lambda))$ zou zijn. Zie bijvoorbeeld [5] voor een inleiding tot wachtrijtheorie elders in deze uitgave. Met andere woorden, de langzame transitie tussen de rigide maximumconfiguraties hebben een sterk negatief effect op de schaling van het aantal pakketten en de vertraging, waar dat negatieve effect bovendien verergert met de dimensie van het netwerk zoals bepaald door de exponent $\kappa(L)$.

Meer geavanceerde algoritmen

De bovenstaande beschrijving berust op de vereenvoudigende aanname dat nodes altijd activeren wanneer zij daarvoor de gelegenheid krijgen, zelfs wanneer de buffer geen pakketten bevat. Vanuit praktisch oogpunt ligt het vanzelfsprekend eerder voor de hand dat nodes zich in dat geval tijdelijk niet mengen in de concurrentie om het medium, totdat een volgend pakket is gegenereerd dat moet worden verzonden.



Figuur 4 Het verloop van de bufferinhoud in de tijd, voor een roosternetwerk.

De consequentie is dat de toestand van de buffers zoals gerepresenteerd door het proces $\{Y(t)\}_{t \geq 0}$, niet alleen wordt bepaald door het activiteitsproces $\{X(t)\}_{t \geq 0}$, maar omgekeerd ook $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ beïnvloedt, dat daardoor de evenwichtsverdeling in (1) verliest. Hoewel het proces $\{(X(t), Y(t))\}_{t \geq 0}$ de Markoveigenschap behoudt, geeft de interactie tussen beide componenten aanleiding tot ernstige complicaties in de wiskundige analyse.

Zelfs noodzakelijke en voldoende voorwaarden voor positief-recurrent gedrag zijn in het algemeen niet eenvoudig te karakteriseren. Aangezien het terugtrekken van nodes met lege buffers uit de concurrentie om het medium zinnig lijkt, zou het voor de hand liggende te veronderstellen dat de eerdere voorwaarde $\lambda_i < \theta_i$ voor alle nodes $i = 1, \dots, N$ voldoende zou blijven om stabiliteit te garanderen. Verrassend genoeg blijkt dat echter niet het geval te zijn. Om dat te illustreren, beschouwen we een netwerk met $N = 4$ nodes en interferentie tussen nodes 1 en 2, 2 en 3, 3 en 4, en 4 en 1. Als bijvoorbeeld node 4 een zeer lage aankomstintensiteit heeft, dan zal deze zich hoogst zelden mengen in de concurrentie om het medium. Node 2 staat er daardoor nagenoeg alleen voor in de concurrentie met nodes 1 en 3, en bevindt zich in een nadelige positie. Dat betekent dat zelfs wanneer node 2 altijd pakketten te verzenden heeft, en nodes 1 en 3 vrij hoge aankomstintensiteiten hebben, de ontvangen doorzet voor node 2 substantieel lager kan zijn dan de waarde θ_2 in geval de buffers van alle vier de nodes in een verzadigde toestand zouden verkeren. Dientengevolge kan instabiliteit optreden bij node 2 wanneer de aankomstintensiteit λ_2 slechts iets lager is dan de waarde θ_2 [13].

De subtiele burenerelaties in het bovenstaande eenvoudige voorbeeld zijn illustratief voor de complexe interactie tussen de diverse

nodes. Als consequentie is het karakteriseren van noodzakelijke en voldoende voorwaarden voor positief-recurrent gedrag in zekere zin vrijwel even lastig als het volledig bepalen van de evenwichtsverdeling van het proces $\{(X(t), Y(t))\}_{t \geq 0}$. Voor Markov-processen zonder specifieke (product-vorm-)structuur en met een toestandsruimte die oneindig is in meerdere dimensies, zijn weinig algemene resultaten beschikbaar. Het blijkt dat voor volledige interferentiegrafen wel expliciete voorwaarden voor zogenaamde ‘rate’ stabiliteit zijn te formuleren [13]. Voor alle overige interferentiegrafen is het lastig hanteerbare voorwaarden voor algehele stabiliteit af te leiden. Wel impliceren de resultaten voor volledige interferentiegrafen partiële voorwaarden voor stabiliteit van bepaalde subsets van nodes [6].

De bovenstaande beschrijving veronderstelt dat de activeringsintensiteit van node i nul is wanneer de buffer leeg is en gelijk aan een constante waarde v_i wanneer de buffer niet leeg is. Zogenaamde ‘queue-based’ algoritmen bieden een interessante generalisatie waar de activeringsintensiteit van node i op tijdstip t een algemene (typisch stijgende) functie $f_i(\cdot)$ is van het aantal pakketten $Y_i(t)$ dat zich op tijdstip t in de buffer bevindt. Een gerelateerde variatie op het basialgoritme behelst dat node i niet slechts één pakket verstuurt maar wanneer een transmissie eindigt op tijdstip t direct een volgend pakket verstuurt met kans $1 - g_i(Y_i(t^+))$, waar $g_i(\cdot)$ een typisch dalende functie is en $g_i(0) = 1$. Ook voor deze modelvarianten blijft de Markoveigenschap van het proces $\{(X(t), Y(t))\}_{t \geq 0}$ behouden.

In het speciale geval van $N = 1$ node blijkt het mogelijk de evenwichtsverdeling van het aantal pakketten te bepalen voor enkele speciale keuzes voor de functies $f(\cdot)$ en $g(\cdot)$ [2].

De ratio van de functies $f(\cdot)$ en $g(\cdot)$ is sterk bepalend voor het kwalitatieve gedrag in een regime waar de aankomstintensiteit λ de kritieke waarde 1 nadert. Hoewel het aantal pakketten in een dergelijk regime onvermijdelijk groeit, blijkt zich een scherpe driedeling in het asymptotische groeigedrag voor te doen, afhankelijk van de vraag of de ratio $f(q)/g(q)$ super-lineair, lineair of sub-lineair stijgt in q . Wegens de wet van Little, treedt dezelfde driedeling in het groeigedrag op voor de orde van grootte van de vertraging van een pakket.

Het behoeft geen betoog dat in het geval van $N > 1$ nodes de evenwichtsverdeling van $\{(X(t), Y(t))\}_{t \geq 0}$ nog minder analytisch toegankelijk is dan in het eerder besproken scenario $f_i(q_i) = v_i \mathbf{1}_{\{q_i > 0\}}$ en $g_i(q_i) = 0$. In het licht van deze observatie is het des te opmerkelijker dat er wel zeer expliciete voorwaarden voor stabiliteit zijn geïdentificeerd, ook al zijn de ontwikkelde bewijsargumenten hiervoor uitermate geavanceerd. Voor een brede klasse van $f_i(\cdot)$ - en $g_i(\cdot)$ -functies is aangetoond dat de (praktisch) noodzakelijke voorwaarde dat de vector van aankomstintensiteiten tot het inwendige van het convex omhulsel Γ behoort, voldoende is voor stabiliteit [11]. Dit baanbrekende resultaat demonstreert dat gedistribueerde algoritmen, mits zorgvuldig geconstrueerd, de potentie hebben om de optimale doorzet en maximale stabiliteit van complexe gecentraliseerde mechanismen te evenaren.

Dit belangrijke gegeven roept de vraag op of deze queue-based algoritmen ook in staat zijn de eerdergenoemde zorgelijke schalingen van vertragingen te overwinnen. Helaas blijkt juist voor de klasse van functies waarvoor optimale doorzet en maximale stabiliteit is aangetoond, de schaling niet aanzienlijk te verbeteren [3]. Tot op enige hoogte is deze keerzijde ook een onvermijdelijk feit, aangezien het beperken van vertragingen impliciet vereist dat een maximumconfiguratie snel is te vinden. Aangezien dat laatste probleem NP-lastig is, moet het weinig plausibel worden geacht dat de ongunstige schaling van vertragingen significant is te verbeteren via queue-based algoritmen.

Uitbreidingen en kanttekeningen

Deeltjesmodellen worden al sinds de jaren tachtig gebruikt om random-access-netwerken te analyseren [4] en hebben diverse waardevolle inzichten verschaft in het gedrag van deze netwerken. De adaptieve algoritmen zoals eerder beschreven bieden interessante mogelijkheden om de huidige generatie random-

access-netwerken flexibeler en robuuster te maken. Hoewel de beschreven modellen de meest relevante karakteristieken van draadloze netwerken weten te vatten, zijn verscheidene praktische factoren en verschijnselen niet expliciet gemodelleerd. We besluiten dit artikel met het bespreken van twee van deze verschijnselen die, zodra ze in een wiskundig hanteerbare vorm zouden worden gebracht, zowel de praktijk van de draadloze netwerken als de stand van de theorievorming verder zouden brengen.

Mobiliteit en gebruikersdynamiek. De interferentiegraaf vormt de basis van de wiskundige studie van random-access-netwerken, en deze wordt altijd als statisch verondersteld. In de praktijk zien we echter dat het netwerk beweegt. Althans, de gebruikers van de

apparaten bewegen, en daarmee is de structuur van het netwerk dynamisch. Daarnaast zullen gebruikers ook tot het netwerk toetreden en na een tijdje het netwerk weer verlaten. Een vaste interferentiegraaf is dan ook niet meer dan een momentopname van de toestand van het netwerk. Dit vormt een extra uitdaging voor de adaptieve algoritmen. Immers, in plaats van langzaam te convergeren naar een gewenste vector van doorzetwaarden, zal deze vector veranderen met de tijd. De vraag is dan niet of we algoritmen kunnen vinden die naar bepaalde doorzetwaarden convergeren, maar hoe goed we de steeds veranderende gewenste doorzetwaarden kunnen volgen, en dus hoe snel de algoritmen kunnen inspelen op veranderende omstandigheden.

Doorsturen van pakketjes. De eerder beschreven wachtrijmodellen betreffen zogenaamde *single-hop*-scenario's, waarbij iedere node zijn eigen aankomstproces van pakketjes heeft, en een pakket het netwerk verlaat zodra het verzonden is. In werkelijkheid zullen verzonden pakketjes vaak naar andere nodes worden doorgestuurd, om zo bijvoorbeeld het netwerk te kunnen doorkruisen. Dit versterkt de afhankelijkheid tussen de nodes, aangezien de aankomstprocessen van nieuwe pakketjes bij een node nu ook afhankelijk zijn van het activeringsproces van zijn burens. Het lijkt nauwelijks haalbaar om dit soort *multi-hop*-scenario's exact te analyseren, en men zal zich moeten richten op benaderingen en schalingslimieten om wiskundige hanteerbare resultaten te verkrijgen. ◀

Referenties

- M. de Berg, Conflictvrije kleurings voor frequentietoekenning in draadloze netwerken, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/16(3) (2015), 179–182, dit nummer.
- N. Bouman, S.C. Borst, O.J. Boxma en J.S.H. van Leeuwen, Queues with random back-offs, *Queueing Systems* 77(1) (2014), 33–74.
- N. Bouman, S.C. Borst en J.S.H. van Leeuwen, Delay performance in random-access networks, *Queueing Systems* 77(2) (2014), 211–242.
- R.R. Boorstyn, A. Kershbaum, B. Maglaris en V. Sahin, Throughput analysis in multihop CSMA packet radio networks, *IEEE Trans. Commun.* 35(3) (1987), 267–274.
- O. Boxma, S. Kapodistria en M. Mandjes, Performance analysis of stochastic networks, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/16(3) (2015), 193–200, dit nummer.
- F. Cecchi, S.C. Borst en J.S.H. van Leeuwen, Throughput of CSMA networks with buffer dynamics, *Perf. Eval.* 79 (2014), 216–234.
- D. Garlaschelli, F. den Hollander en A. Roccaforte, Complexe netwerken vanuit fysisch perspectief, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/16(3) (2015), 207–209, dit nummer.
- L. Jiang en J. Walrand, A distributed CSMA algorithm for throughput and utility maximization in wireless networks, *IEEE/ACM Trans. Netw.* 18(3) (2010), 960–972.
- S.C. Liew, C.H. Kai, H.C.J. Leung en P.B. Wong, Back-of-the-envelope computation of throughput distributions in CSMA wireless networks, *IEEE Trans. Mobile Comput.* 9(9) (2010), 1319–1331.
- J. Sanders, Atomaire gassen en draadloze netwerken, *STATOR* 15(1) (2014), 9–12.
- D. Shah, J. Shin en P. Tetali, Medium access using queues, in: *Proc. FOCS 2011*.
- D. Shah, D. Tse en J. Tsitsiklis, Hardness of low delay network scheduling, *IEEE Trans. Inf. Theory* 57(12) (2011), 7810–7818.
- P.M. van de Ven, S.C. Borst, J.S.H. van Leeuwen en A. Proutière, Insensitivity and stability of random-access networks, *Perf. Eval.* 67(11) (2010), 1230–1242.
- P.M. van de Ven, A.J.E.M. Janssen, J.S.H. van Leeuwen en S.C. Borst, Achieving target throughputs in random-access networks, *Perf. Eval.* 68(11) (2011), 1103–1117.
- P.M. van de Ven, J.S.H. van Leeuwen, D. Denteneer en A.J.E.M. Janssen, Spatial fairness in linear random-access networks, *Perf. Eval.* 69(3) (2012), 121–134.
- A. Zocca, S.C. Borst, J.S.H. van Leeuwen en F.R. Nardi, Delay performance in random-access grid networks, *Perf. Eval.* 70(10) (2013), 900–915.