

Mark de Berg

Faculteit Wiskunde en Informatica  
Technische Universiteit Eindhoven  
mdberg@win.tue.nl

# Conflictvrije kleuringen voor frequentietoekenning in draadloze netwerken

Een kleuring van een verzameling van  $n$  schijven in het platte vlak wordt *conflictvrij* genoemd als het volgende geldt voor elk punt  $q$  dat in een of meer schijven ligt: ten minste één van de schijven die  $q$  bevatten heeft een kleur die niet voorkomt onder de andere schijven die  $q$  bevatten. Conflictvrije kleuringen zijn gerelateerd aan graafkleuringen, en modelleren toekenningen van frequenties aan zendmasten waarbij interferentieproblemen voorkomen worden. In dit artikel zal Mark de Berg onder andere laten zien dat er altijd een conflictvrije kleuring bestaat die maar  $O(\log n)$  kleuren gebruikt.

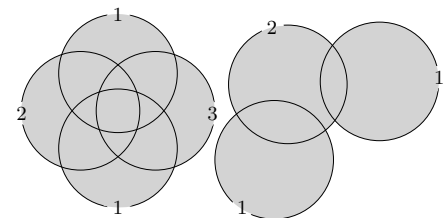
Draadloze netwerken, bijvoorbeeld voor mobiele telefonie, bestaan uit basisstations (zendmasten) die de communicatie voor gebruikers van het netwerk verzorgen. Als een gebruiker binnen bereik is van meerdere zendmasten, dan heeft hij in principe meerdere mogelijkheden ter beschikking om de communicatie te laten verlopen. Als verschillende zendmasten echter dezelfde frequentie gebruiken, dan kan de communicatie met die zendmasten verstoord worden door interferentie. Dit kan natuurlijk voorkomen worden door elke zendmast een eigen, unieke frequentie toe te kennen, maar het uitgeven van veel verschillende frequenties is ongewenst. De vraag is dus: is het echt nodig om alle zendmasten een eigen frequentie te geven, of kunnen we ook met minder frequenties toe? In dit artikel zullen we zogenaamde conflict-

vrije kleuringen bekijken, die het bovenstaande probleem modelleren.

In onze modellering gaan we ervan uit dat een zendmast alle gebruikers kan bereiken binnen een gegeven vaste afstand. (Dit is in de praktijk niet precies het geval: het bereik van een zendmast wordt onder andere beïnvloed door gebouwen en atmosferische omstandigheden, en sommige zendmasten kunnen krachtiger dan andere zijn.) In ons model is het bereik van een zendmast dus een schijf met de zendmast als middelpunt en met een vaste straal. Het toekennen van een frequentie aan een zendmast wordt nu gemodelleerd als het toekennen van een kleur aan de bijbehorende schijf, waarbij we voor het gemak de  $i$ -de kleur identificeren met de integer  $i$ . Dit leidt tot het volgende abstracte probleem.

Laat  $S := \{S_1, \dots, S_n\}$  een verzameling van  $n$  schijven in het vlak zijn, elk met dezelfde straal. Voor een punt  $q \in \mathbb{R}^2$  definiëren we  $S(q) := \{S_i \in S : q \in S_i\}$  als de verzameling schijven die  $q$  bevatten.

Een *kleuring* van  $S$  met  $c$  kleuren is een afbeelding  $\kappa$  die aan elke schijf  $S_i \in S$  een kleur  $\kappa(S_i) \in \{1, \dots, c\}$  toekent. Een kleuring  $\kappa$  wordt *conflictvrij* genoemd als het volgende geldt voor elk punt  $q \in \mathbb{R}^2$ : als  $S(q) \neq \emptyset$  dan is er een schijf in  $S(q)$  met een unieke kleur, dat wil zeggen een schijf  $S_i \in S(q)$  zodanig dat  $\kappa(S_j) \neq \kappa(S_i)$  voor alle  $S_j \in S(q) \setminus \{S_i\}$ . In de toepassing die we in gedachten hebben zou een gebruiker op locatie  $q$  dus kunnen communiceren via de zendmast behorend bij



**Figuur 1** Voorbeeld van een conflictvrije kleuring van zeven schijven: elk punt in de vereniging van de schijven is bevat in ten minste een schijf met een unieke kleur.

$S_i$ , want alle andere zendmasten die binnen bereik zijn gebruiken een andere frequentie. Figuur 1 illustreert het concept van conflictvrije kleuringen.

De vraag die we nu willen beantwoorden is: wat is het kleinste aantal kleuren, als functie van  $n$ , zodat we voor elke verzameling  $S$  van  $n$  schijven een conflictvrije kleuring kunnen vinden? Wat formeler: als  $\chi_{cf}(S)$  het minimale aantal kleuren is dat nodig is om  $S$  conflictvrij te kleuren, dan willen we

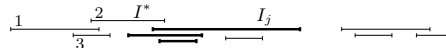
$$\chi_{cf}(n) := \max_{|S|=n} \chi_{cf}(S)$$

bepalen.

Conflictvrije kleuringen zijn gerelateerd aan graafkleuringen. In een gewone graafkleuring moeten de knopen van een graaf op een zodanige manier gekleurd worden dat de eindpunten van elke kant in de graaf verschillend gekleurd zijn. De beroemde *vierkleurenstelling* zegt dat elke planaire graaf met vier kleuren gekleurd kan worden. Laat  $\mathcal{G}_S$  nu de intersectiegraaf van  $S$  zijn, dat wil zeggen de graaf met een knoop voor elke schijf  $S_i \in S$  en een kant tussen twee schijven  $S_i$  en  $S_j$  als  $S_i \cap S_j \neq \emptyset$ . Dan geeft een kleuring van de graaf  $\mathcal{G}_S$  een conflictvrije kleuring van de schijven. Immers, voor elk punt  $q \in \mathbb{R}^2$  snijden alle schijven in  $S(q)$  elkaar, dus alle schijven in  $S(q)$  moeten verschillend gekleurd zijn. Helaas is de intersectiegraaf van een verzameling schijven niet noodzakelijk planair. Sterker, als alle schijven elkaar snijden dan is de intersectiegraaf  $\mathcal{G}$  een volledige graaf en zijn er dus  $n$  kleuren nodig voor een gewone kleuring van  $\mathcal{G}_S$ . Dit betekent niet dat een conflictvrije kleuring van  $S$  in dit geval ook  $n$  kleuren nodig heeft. Zo zijn de linker vier schijven in Figuur 1 conflictvrij gekleurd met drie kleuren, terwijl de intersectiegraaf van deze vier schijven volledig is. We zullen zien dat, hoe de schijven ook liggen, er altijd een conflictvrije kleuring bestaat met maar  $O(\log n)$  kleuren.

**Het eendimensionale geval**

Om meer inzicht in het probleem te krijgen bestuderen we eerst de eendimensionale versie, waarbij een verzameling  $\mathcal{I} := \{I_1, \dots, I_n\}$  van  $n$  intervallen in  $\mathbb{R}^1$  conflictvrij gekleurd moet worden. Een conflictvrije kleuring is hier gedefinieerd analoog aan het tweedimensionale geval: voor elk punt  $q \in \mathbb{R}^1$  moet gelden dat  $\mathcal{I}(q)$ , de verzameling van intervallen die  $q$  bevatten, ten minste één interval heeft met een kleur die uniek is binnen  $\mathcal{I}(q)$ . Het blijkt dat er in deze eendimensionale versie maar drie kleuren nodig zijn voor een conflictvrije kleu-



**Figuur 2** Het kleuringsalgoritme voor intervallen. Op het moment dat  $I^*$  behandeld wordt zijn er al drie intervallen gekleurd. De intervallen in  $\mathcal{I}_{in}$  zijn dikgedrukt. Het algoritme is in geval (i), en zal  $I_j$  kleur 1 geven; de twee andere intervallen in  $\mathcal{I}_{in}$  krijgen kleur 3. In de volgende stap zal  $I^*$  veranderd worden in  $I_j$ , en zal geval (ii) van toepassing zijn.

ring. Het volgende algoritme genereert zo'n kleuring. We gaan er in de beschrijving voor het gemak van uit dat de er geen eindpunten van intervallen samenvallen; het is niet moeilijk om het algoritme aan te passen als dit wel zo is.

Laat  $I_1$  het interval zijn met het meest linkse linker eindpunt. We geven interval  $I_1$  kleur 1 en kleuren daarna de overige intervallen als volgt.

Laat  $\mathcal{I}^*$  de verzameling intervallen zijn die nog gekleurd moeten worden, en laat  $I^*$  het meest rechtse al gekleurde interval zijn. In het begin geldt dus  $\mathcal{I}^* = \mathcal{I} \setminus \{I^*\}$  en  $I^* = I_1$ , maar in de loop van het algoritme zullen intervallen uit  $\mathcal{I}^*$  verwijderd worden en zal  $I^*$  veranderen. We zullen er echter voor zorgen dat  $I^*$  altijd kleur 1 of 2 heeft. Bekijk nu alle intervallen in  $\mathcal{I}^*$  die hun linker eindpunt in  $I^*$  hebben. Laat  $\mathcal{I}_{in}$  deze verzameling intervallen zijn. Er zijn twee gevallen, geïllustreerd in Figuur 2.

- i. Als  $\mathcal{I}_{in}$  ten minste één interval bevat dat niet helemaal binnen  $I^*$  ligt, laat dan  $I_j \in \mathcal{I}_{in}$  het interval zijn dat het verst naar rechts uitsteekt. We kleuren  $I_j$  als volgt:  $\kappa(I_j) := 2$  als  $\kappa(I^*) = 1$  en  $\kappa(I_j) := 1$  als  $\kappa(I^*) = 2$ . Alle andere intervallen in  $\mathcal{I}_{in}$  krijgen kleur 3. Tenslotte verwijderen we de zojuist gekleurde intervallen uit  $\mathcal{I}^*$ , en veranderen we  $I^*$  in  $I_j$ .
- ii. Als alle intervallen in  $\mathcal{I}_{in}$  bevat zijn in het interval  $I^*$  — het geval  $\mathcal{I}_{in} = \emptyset$  valt hier onder —, geef dan deze intervallen kleur 3 en verwijder ze uit  $\mathcal{I}^*$ . Neem daarna van alle overblijvende intervallen in  $\mathcal{I}^*$  het interval  $I_j$  met het meest linkse linker eindpunt, geef  $I_j$  kleur 1, verwijder  $I_j$  uit  $\mathcal{I}^*$ , en verander  $I^*$  in  $I_j$ .

Nadat we het relevante geval hebben afgehandeld wordt het proces herhaald met de nieuwe  $\mathcal{I}^*$  en  $I^*$ , net zolang tot  $\mathcal{I}^* = \emptyset$  en dus alle intervallen gekleurd zijn. Dit leidt tot de volgende stelling.

**Stelling 1.** *Elke verzameling van  $n$  intervallen in  $\mathbb{R}^1$  kan conflictvrij gekleurd worden met drie kleuren.*

*Bewijs.* Het bovenstaande algoritme gebruikt drie kleuren. Dat de kleuring conflictvrij is, volgt uit de volgende twee observaties.

Ten eerste zal een interval met kleur 1 nooit een ander interval met kleur 1 overlappen. Immers, als een interval  $I_j$  kleur 1 krijgt, dan krijgen in de stap daarna alle intervallen die  $I_j$  overlappen kleur 2 of 3. Eenzelfde argument laat zien dat intervallen met kleur 2 elkaar nooit overlappen.

Ten tweede ligt elk punt  $q$  dat bevat is in een interval  $I_k$  van kleur 3 ook in een interval van kleur 1 of 2. (De intervallen van kleur 3 hoeven dus door geen enkel punt  $q$  ‘gebruikt’ te worden.) Om dit in te zien, bekijk het moment waarop  $I_k$  gekleurd wordt. Het linker eindpunt van  $I_k$  ligt in het interval dat op dat moment  $I^*$  is, en  $I_k$  steekt minder ver uit dan het interval  $I_j$  dat op dat moment kleur 1 of 2 krijgt. Dus  $I_k \subset I^* \cup I_j$ , hetgeen de claim impliceert.  $\square$

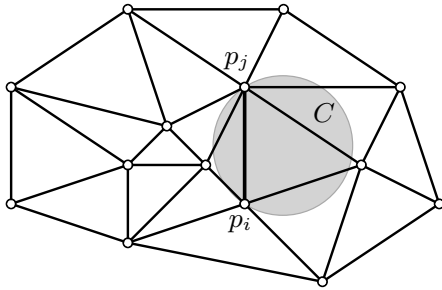
**Het tweedimensionale geval**

Het tweedimensionale geval, waarin we schijven in het vlak willen kleuren, is een stuk lastiger dan het eendimensionale geval. Zoals eerder aangegeven zullen we aannemen dat alle schijven in  $S$  dezelfde straal hebben. Zelfs dan blijkt het niet altijd mogelijk om een conflictvrije kleuring te geven met een constant aantal kleuren.

**Stelling 2.** *Voor elke  $n$  is er een verzameling van  $n$  schijven in  $\mathbb{R}^2$  waarvoor elke conflictvrije kleuring  $\Omega(\log n)$  kleuren gebruikt.*

*Bewijs.* Bekijk de verzameling  $S := \{S_1, \dots, S_n\}$  waarin  $S_i$  een schijf is met straal 1 en middelpunt  $(i/n, 0)$ . Merk op dat er voor elke paar indices  $i, j$  met  $1 \leq i < j \leq n$  een punt  $q$  in het vlak bestaat waarvoor geldt dat  $S(q) = \{S_i, S_{i+1}, \dots, S_j\}$ . Omdat er een punt  $q$  is met  $S(q) = S$ , moet er een schijf  $S_k \in S$  zijn met een unieke kleur. Stel dat  $k \leq n/2$  en bekijk de verzameling  $S' := \{S_{k+1}, \dots, S_n\}$ . Merk op dat  $|S'| \geq \lfloor n/2 \rfloor$ . (Als  $k > n/2$ , dan bekijken we  $\{S_1, \dots, S_{k-1}\}$ .) Ook in  $S'$  moet er weer een schijf zijn met een kleur die uniek is binnen  $S'$ , aangezien er een punt  $q$  is met  $S(q) = S'$ , enzovoorts. (Binnen  $S \setminus (S' \cup \{S_k\})$  kan de kleur wel hergebruikt worden.) We concluderen dat het aantal benodigde kleuren,  $K(n)$ , voor deze configuratie van  $n$  schijven voldoet aan de recurrente betrekking  $K(n) \geq 1 + K(\lfloor n/2 \rfloor)$ , waaruit de stelling volgt.  $\square$

Gelukkig wordt het niet veel erger dan in bovenstaande stelling: elke verzameling van  $n$  even grote schijven kan conflictvrij gekleurd worden met  $O(\log n)$  kleuren. Het algoritme hiervoor gebruikt de Delaunay-triangulatie,



**Figuur 3** Voorbeeld van een Delaunay triangulatie. De grijze cirkel  $C$  illustreert de lege-cirkel eigenschap van het paar  $p_i, p_j$ .

die we kort introduceren voordat we het algoritme beschrijven.

*De Delaunay-triangulatie*

Laat  $\mathcal{P}$  een verzameling van  $n$  punten in het vlak zijn. Een *triangulatie* van  $\mathcal{P}$  is een verdeling van het convexe omhulsel van  $\mathcal{P}$  in driehoeken, waarbij de verzameling hoekpunten van de driehoeken gelijk is aan  $\mathcal{P}$ . Een bijzondere triangulatie is de *Delaunay-triangulatie*, genoemd naar de Russische wiskundige Boris Delaunay (1890–1980). De Delaunay-triangulatie  $DT(\mathcal{P})$  wordt verkregen door een lijnstuk te trekken tussen elk paar punten  $p_i, p_j \in \mathcal{P}$  dat de *lege-cirkeleigenschap* heeft: er is een cirkel  $C$  met  $p_i$  en  $p_j$  op de rand die verder leeg is, dat wil zeggen, die geen andere punten van  $\mathcal{P}$  bevat in het inwendige of op de rand; zie Figuur 3. (Als er vier of meer punten van  $\mathcal{P}$  precies op een cirkel liggen, dan hoeft het verbinden van alle paren met de lege-cirkeleigenschap geen volledige triangulatie op te leveren. Indien gewenst kan een volledige triangulatie verkregen worden door het toevoegen van een aantal extra verbindingen, maar voor onze toepassing is dat niet nodig.)

De Delaunay-triangulatie wordt voor allerlei toepassingen gebruikt en heeft prachtige eigenschappen. Zo is de Delaunay-triangulatie de duale van het bekende Voronoi-diagram: twee punten  $p_i, p_j$  zijn verbonden in  $DT(\mathcal{P})$  dan en slechts dan als de Voronoi-cellen van  $p_i$  en  $p_j$  buren zijn in  $Vor(\mathcal{P})$ . (Het Voronoi-diagram  $Vor(\mathcal{P})$  is de opdeling van het platte vlak in Voronoi-cellen, één per punt  $p_i \in \mathcal{P}$ , zodanig dat de cel van  $p_i$  precies die punten  $q \in \mathbb{R}^2$  bevat waarvoor  $p_i$  het dichtstbijzijnde punt in  $\mathcal{P}$  is.) Voor ons zijn maar twee eigenschappen van de Delaunay-triangulatie van belang: de lege-cirkeleigenschap en het feit dat  $DT(\mathcal{P})$  een planaire graaf is (met  $\mathcal{P}$  als de verzameling knopen, en de verbindingen tussen de punten als kanten).

*Conflictvrije kleuring*

We keren nu terug naar het kleuringsprobleem voor een verzameling  $S$  van even grote schijven in het vlak. We zullen dit probleem eerst transformeren naar een kleuringsprobleem op punten.

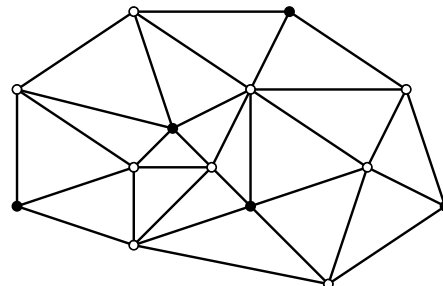
Laat  $p_i$  het middelpunt van de schijf  $S_i \in S$  zijn, en laat  $\mathcal{P} := \{p_i : S_i \in S\}$  de verzameling van alle middelpunten zijn. Laat  $r$  de gemeenschappelijk straal zijn van de schijven in  $S$ . Merk op dat voor elk punt  $q \in \mathbb{R}^2$  en elke schijf  $S_i \in S$  geldt dat  $q \in S_i$  dan en slechts dan als  $p_i \in D_q$ , waarbij  $D_q$  de schijf is met middelpunt  $q$  en straal  $r$ . Definieer  $\mathcal{P}(D_q)$  als de verzameling van punten  $p_i \in \mathcal{P}$  die in  $D_q$  liggen. Dan is het vinden van een conflictvrije kleuring voor  $S$  equivalent aan het vinden van een conflictvrije kleuring voor  $\mathcal{P}$ , waarbij een kleuring voor  $\mathcal{P}$  conflictvrij is als het volgende geldt voor elk punt  $q \in \mathbb{R}^2$ : als  $\mathcal{P}(D_q) \neq \emptyset$  dan is er een punt  $p_i \in \mathcal{P}(D_q)$  met een unieke kleur. De Delaunay-triangulatie geeft een elegant algoritme om een conflictvrije kleuring voor  $\mathcal{P}$  te vinden, zoals hieronder beschreven.

Het algoritme werkt in  $O(\log n)$  fasen. In de eerste fase geven we een aantal punten kleur 1, in de tweede fase geven we een aantal punten kleur 2, enzovoorts, totdat alle punten een kleur hebben gekregen. Het selecteren van de punten die in de  $k$ -de fase gekleurd worden, gaat als volgt.

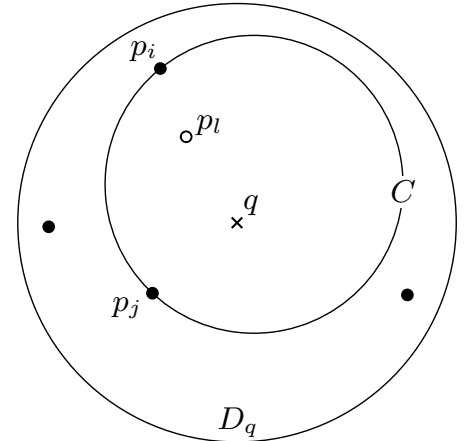
Laat  $\mathcal{P}_k \subseteq \mathcal{P}$  de deelverzameling van de punten zijn die nog geen kleur hebben gekregen, en laat  $DT(\mathcal{P}_k)$  de Delaunay-triangulatie van  $\mathcal{P}_k$  zijn. Een *independent set* in  $DT(\mathcal{P}_k)$  is een deelverzameling van punten uit  $\mathcal{P}_k$  die niet met elkaar verbonden zijn in  $DT(\mathcal{P}_k)$ ; zie Figuur 4.

Omdat  $DT(\mathcal{P}_k)$  een planaire graaf is, heeft  $DT(\mathcal{P}_k)$  een independent set  $\mathcal{I}_k$  met ten minste  $n_k/4$  punten. We selecteren de punten in  $\mathcal{I}_k$  als de punten die kleur  $k$  krijgen. De verzameling  $\mathcal{P}_{k+1}$  die voor volgende fase overblijft, is dus  $\mathcal{P}_k \setminus \mathcal{I}_k$ .

Nadat we alle punten uit  $\mathcal{P}$  gekleurd hebben volgens het bovenstaande algoritme, ge-



**Figuur 4** Een independent set (de zwarte punten) in de Delaunay triangulatie.



**Figuur 5** Illustratie bij het bewijs van Stelling 3. De zwarte punten zijn de punten uit  $\mathcal{P}(D_q) \cap \mathcal{I}_k$ .

ven we elke schijf  $S_i \in S$  de kleur van het bijbehorende middelpunt. Dit leidt tot het volgende resultaat.

**Stelling 3.** *Elke verzameling  $S$  van  $n$  schijven in  $\mathbb{R}^2$  kan conflictvrij gekleurd worden met  $O(\log n)$  kleuren.*

*Bewijs.* Bekijk het bovenstaande algoritme om de verzameling  $\mathcal{P}$  van middelpunten van de schijven te kleuren. Het algoritme begint met  $n$  punten, en kleurt ten minste een kwart van de overgebleven punten in elke fase. Als  $n_k$  het aantal overgebleven punten aan het begin van de  $k$ -de fase is, dan geldt dus  $n_{k+1} \leq 3n_k/4$ . Het aantal fasen, en daarmee het aantal kleuren, is daarom  $O(\log n)$ .

Blijft over te bewijzen dat de kleuring conflictvrij is. Laat  $q \in \mathbb{R}^2$  een punt in het vlak zijn, en laat  $S(q)$  de verzameling schijven zijn die  $q$  bevatten. Neem aan dat  $S(q) \neq \emptyset$ . We willen bewijzen dat er een schijf  $S_i \in S(q)$  is met een unieke kleur. Zoals al eerder opgemerkt komt dit overeen met te bewijzen dat  $\mathcal{P}(D_q)$ , de verzameling middelpunten die in  $D_q$  liggen, een punt met een unieke kleur heeft. Om dit te bewijzen zullen we beargumenteren dat de hoogst voorkomende kleur in  $\mathcal{P}(D_q)$  uniek is.

Laat  $k$  de hoogste kleur in  $\mathcal{P}(D_q)$  zijn, laat  $\mathcal{P}_k$  de verzameling overgebleven punten aan het begin van de  $k$ -de fase zijn, en laat  $\mathcal{I}_k$  de independent set in  $DT(\mathcal{P}_k)$  zijn die de kleur  $k$  krijgt. Merk op dat  $\mathcal{P}(D_q) \cap \mathcal{I}_k \neq \emptyset$ . We beweren dat  $|\mathcal{P}(D_q) \cap \mathcal{I}_k| = 1$ , hetgeen betekent dat de kleur  $k$  inderdaad uniek is in  $\mathcal{P}(D_q)$ . Om deze bewering te bewijzen zullen we laten zien dat  $|\mathcal{P}(D_q) \cap \mathcal{I}_k| \geq 2$  tot een contradictie leidt. Het is niet moeilijk in te zien dat  $|\mathcal{P}(D_q) \cap \mathcal{I}_k| \geq 2$  het volgende impliceert: er is een cirkel  $C \subset D_q$  die twee punten  $p_i, p_j \in \mathcal{P}(D_q) \cap \mathcal{I}_k$  op de rand heeft en verder

geen punten van  $\mathcal{P}(D_q)$  bevat; zie Figuur 5. (Zo'n cirkel kan verkregen worden  $D_q$  op de juiste manier te krimpen tot aan de voorwaarden voldaan wordt.) De cirkel  $C$  moet echter wel een punt  $p_l \in \mathcal{P}_k$  bevatten. Immers, als  $C$  verder leeg zou zijn dan zou het paar  $p_i, p_j$  de lege-cirkel eigenschap hebben, en dit zou betekenen dat  $p_i$  en  $p_j$  niet beide in de independent set  $\mathcal{I}_k$  kunnen zitten. Omdat  $p_l \in \mathcal{P}_k \setminus \mathcal{I}_k$ , krijgt  $p_l$  een hogere kleur dan  $k$ , een contradictie met de definitie van  $k$ .  $\square$

### Slotopmerkingen

Conflictvrije kleuringen werden in 2003 geïntroduceerd door Even e.a. [1], die onder andere bewezen dat elke verzameling van  $n$  schij-

ven met  $O(\log n)$  kleuren conflictvrij gekleurd kan worden. Hun bewijs is een stuk algemener dan de versie die we hier besproken hebben. Het werkt bijvoorbeeld ook voor verzamelingen *pseudo-disks*, dat wil zeggen verzamelingen van samenhangende gebieden zodanig dat de randen van elk paar gebieden elkaar maar in ten hoogste twee punten snijden. Sinds 2003 zijn er veel varianten van conflictvrije kleuringen bestudeerd; Smorodinski [2] geeft een overzicht van het werk op dit gebied. Toch zijn nog lang niet alle vragen beantwoord. Zo is het ondergrensvoorbeeld van Stelling 2 niet erg realistisch: in de praktijk zullen de zendmasten nooit zo dicht bij elkaar geplaatst

worden. Dat leidt bijvoorbeeld tot de vraag: met hoeveel kleuren kunnen we toe als geen enkel punt in het vlak binnen bereik is van meer dan  $k$  van de  $n$  zendmasten, voor  $k \ll n$ ? Het voorbeeld van Figuur 2 laat zien dat er in dit geval soms  $\Omega(\log k)$  kleuren nodig zijn, maar er een goede bovengrens is niet bekend. Zelfs voor het geval dat elke schijf maar  $k$  andere schijven snijdt is de best bekende bovengrens  $O(\log^2 k)$  [2]. Ook over andere meer realistische modellen, bijvoorbeeld waarin er rekening mee wordt gehouden dat obstakels het bereik van de zendmasten kunnen beïnvloeden, is weinig bekend. Kortom: nog veel uitdagingen voor onderzoek!  $\leftarrow$

### Referenties

- 1 G. Even, Z. Lotker, D. Ron en S. Smorodinsky, Conflict-free colorings of simple geometric regions with applications to frequency assignment in cellular networks, *SIAM J. Comput.* 33 (2003), 94–136.
- 2 S. Smorodinski, Conflict-Free Coloring and its Applications, in I. Bárány, K.J. Böröczky, G. Fejes Tóth en J. Pach (red.) *Geometry – Intuitive, Discrete, and Convex*, Bolyai Society Mathematical Studies 24, Springer, 2013, pp. 331–389.