

Ionica Smeets

wetenschapsjournalist, Leiden

i@ionica.nl

Maatschappij Studiegroep Wiskunde met de Industrie 2013

Een hardnekkig probleem

Probeer eens voor je te zien wat er gebeurt als je aan rolletje klei trekt. Het rolletje rekt eerst langzaam uit, daarna ontstaat er ergens in het midden één plek die snel dunner wordt, tot het rolletje breekt. Een vergelijkbaar effect treedt op bij metalen die worden uitgerekt: ook daar kan alle spanning op één klein gebied samenballen, wat tot ernstige vervormingen leidt. TNO wil beter begrijpen wat er precies gebeurt bij deze vervorming. Het probleem is dat in dit geval de krachten in drie dimensies werken, maar dat de gebruikelijke modellen tweedimensionaal zijn. Kunnen de wiskundigen de analyse naar een hogere dimensie tillen?

Deelnemers van de studiegroep

Nicodemus Banagaaya (TU/e)
Johan Dubbeldam (TU Delft)
Bas van 't Hof (TU Delft)
Keith Myerscough (CWI)
Björn de Rijk (UL)
Lotte Sewalt (UL)

Het is voor allerlei toepassingen belangrijk om te begrijpen wat er gebeurt als metalen onder druk komen te staan. In oktober 2012 botste in Hong Kong bijvoorbeeld een veerboot tegen het schip Lamma IV. De waterdichte compartimenten van de Lamma IV scheurden open en vulden zich razendsnel met wa-



Figuur 1 De gehavende Lamma IV na de botsing.

ter. Het schip zonk zo snel dat passagiers niet eens tijd hadden om een reddingsvest aan te trekken en bijna veertig passagiers verdronken. Dit soort botsingen is moeilijk te voorkomen, maar TNO wil graag beter begrijpen hoe metaal reageert bij een botsing. Betere simulaties en begrip van het botsingsproces kunnen in de toekomst mensenlevens redden.

Verschillende vervormingen

Als er een kracht op een voorwerp wordt uitgeoefend, dan zal dat eerst elastisch vervormen. De naam elastisch zegt het al: als de kracht verdwijnt, keert het voorwerp weer terug naar zijn oorspronkelijk vorm. Net als een elastiekje. Maar als de kracht te groot is, dan raakt het voorwerp blijvend vervormd, als een elastiek dat te ver uitgerekt is. Zo'n vervorming die niet omkeerbaar is heet een *plastische deformatie*. Carey Walters van TNO legt aan het begin van de studiegroep uit dat hij werkt aan botsingen en explosies waarbij materialen onder extreme druk staan en daardoor vervormen.

Om precies te zijn gaat het probleem van TNO over *necking*, oftewel insnoering. Daarbij wordt een (metalen) voorwerp zover uitgerekt dat alle vervorming zich verplaatst naar één gebied. Als voorbeeld laat Carey een ronde buis zien waarbij het midden van de buis veranderd is in een heel smal stuk, een soort nek.



Figuur 2 Een metalen buis met een nek die ontstaan is doordat er teveel kracht op de buis stond.

Het doel van de studiegroep is het modelleren van wat er in die nek gebeurt. De plastische vervorming is te beschrijven met een tweedimensionaal model, omdat overal in de buis hetzelfde gebeurt. Zodra de nek ontstaat, raakt het proces volledig driedimensionaal. Bestaande modellen werken echter in twee dimensies en negeren dit effect. Daardoor zijn de simulaties niet altijd even betrouwbaar. Carey vertelt maandag tijdens zijn presentatie waar hij op hoopt: "Het liefste wil ik de tweedimensionale beperking verwijderen en wel de eenvoud van de bestaande modellen houden."

Spanning en relaties

Wiskundige Lotte Sewalt van de Universiteit Leiden legt uit waarom TNO kijkt naar buizen: "Die zijn in een laboratorium een stuk makkelijker te testen dan complete schepen. Bovendien is het al heel moeilijk om die buis helemaal te begrijpen. Je wilt uit het gedrag van de randen afleiden wat er in het midden bij de nek gebeurt." Het verslag van de studiegroep begint met een korte samenvatting van

continue mechanica. Zolang materiaal elastisch vervormt, is de relatie tussen de spanning en de vervorming lineair. Op het moment dat het materiaal meegeeft, wordt de situatie veel ingewikkelder. Aannemen dat het materiaal in alle richtingen dezelfde eigenschappen heeft én dat hydraulische druk geen invloed heeft op het moment dat de plastische vervorming begint, vereenvoudigt het proces enigszins. De Duitse wiskundige Richard von Mises stelde aan het begin van de twintigste eeuw voor om daarnaast aan te nemen dat het meegeven van het materiaal kwadratisch afhangt van de spanning in verschillende richtingen. Alles bij elkaar volgt hieruit dat de spanning zoals Von Mises hem formuleerde, samenhangt met de vervorming volgens een machtsverband. In het eendimensionale geval is de Von Mises-spanning een macht van de vervorming (keer een of andere constante). Om deze relatie om te zetten naar drie dimensies, zijn er verschillende aanpakken mogelijk.

Modellen

Het team van wiskundigen duikt in de literatuur en ontdekt dat er al een heleboel modellen bestaan voor *necking*. Sewalt: "Het blijkt enorm lastig om het model goed te formuleren. Welke waarden zijn relevant? Wat kun je weglaten? Sommige versimpelingen maken het probleem ineens triviaal." In het algemeen geven metingen alleen informatie over de gemiddelde spanning in de nek. Maar er is op voorhand niet bekend wat de precieze vorm van de nek zal zijn, wat het extreem moeilijk maakt om de verdeling van de spanning te berekenen. Elk model doet andere aannames over hoe de spanning verdeeld is over de nek, maar niet alle aannames zijn realistisch.

Het klassieke model komt van P.W. Bridgman en is meer dan vijftig jaar oud. Bridgman kreeg in 1946 de Nobelprijs voor de Natuurkunde voor zijn werk aan hoge druk. In zijn postuum gepubliceerde onderzoeksartikelen uit 1964 bespreekt hij hoe een nek ontstaat in een rekbaar buis.

Bridgman neemt op basis van zijn eigen experimenten aan dat de spanning uniform verdeeld is bij het smalste punt van de nek. In dat geval is de spanning te berekenen vanaf dat punt en is de spanning op een punt van de buis evenredig met de afstand tot het midden van de buis.

In dit geval zijn er tamelijk elegante formules af te leiden voor het moment dat de nek zal gaan vormen en voor de uiteindelijke vervorming. Alleen zijn de modellen helaas

niet realistisch voor de vervorming van metalen buizen zoals TNO ze bestudeert.

In de jaren zeventig breidde M.A. Kaplan de analyse van Bridgman uit naar buizen van zacht metaal. De aanname is hier dat de vervorming in een symmetrische staaf zelf ook symmetrisch zal zijn ten opzichte van de as. Een tweede belangrijke aanname is dat de vervorming puur plastisch is, eventuele elastische vervorming wordt verwaarloosd. Dat laatste is overigens een zeer realistische aanname, omdat in de praktijk bij dit soort metalen de bijdrage van de elastische vorming ongeveer 1 procent is als het nekken begint, en daarna alleen maar kleiner wordt.

De analyse van Kaplan gebruikt dat de verhouding tussen de straal in het midden van de nek en straal aan de rand van de nek steeds hetzelfde blijft in het proces, iets dat al uit metingen van Bridgman bleek. Door de straal van de buis na de vervorming te meten, weet Kaplan de spanning af te leiden. De voordelen van Kaplans model zijn dat alle parameters makkelijk te meten zijn en dat het model beter met de praktijk van plastische vervormingen klopt dan Bridgmans werk. Het nadeel is dat het uiteindelijk niet de driedimensionale vervormingen beschrijft.

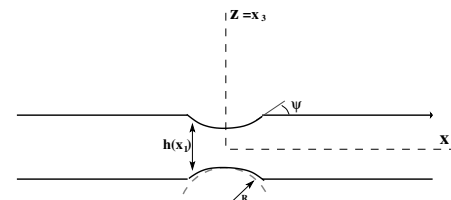
Drie dimensies

In een poging de modellen naar de derde dimensie te tillen, proberen de wiskundigen twee verschillende methoden. De eerste is om de vergelijking voor de Von Mises-spanning in het eendimensionale geval direct om te zetten naar drie dimensies. Daarvoor moet je alleen wel de effectieve spanning kennen.

Een andere generalisatie werd in de jaren zeventig door J. Hutchinson en co-auteurs voorgesteld, hier is de driedimensionale spanning een iets ingewikkeldere functie van de vervorming en constanten die bij het specifieke materiaal horen.

Om te begrijpen hoe het nekken verloopt, bestuderen de wiskundigen een dunne metalen plaat. De plaat begint in rust en daarna wordt er een gelijkmatige trekkracht op de uiteindes uitgevoerd. Met een redenering in de trant van het werk van Hutchinson leiden de wiskundigen een niet-lineaire differentiaalvergelijking af die beschrijft hoe de spanning in het vlak van de plaat zich in de loop der tijd ontwikkelt. Deze vergelijking is numeriek op te lossen. Omdat de tijd in de studiegroep beperkt is, kiezen de wiskundigen ervoor om die oplossing niet te zoeken, maar nog dieper in de theorie van het nekken te duiken.

Na een boel aannames en een hoop afleidingen concluderen de wiskundigen dat de



Figuur 3 De vorm van de metalen plaat zoals de wiskundigen hem bestudeerden. Door een analyse van de verstoring te maken, kan bepaald worden hoe de nek er aan het begin uitziet zonder aannames over de kromming.

spanning in de nek alleen maar uniform is als de materiaalconstante strain hardening exponent precies 4 is. Helaas is die exponent voor staal eerder rond de 0,44. Verder ziet het team dat met de gemaakte aannames de vergelijkingen voor de spanning bij Hutchinson op één factor na gelijk zijn aan die van Bridgman.

Wordt vervolgd

Uiteindelijk moeten de wiskundigen concluderen dat het probleem van TNO verre van triviaal is en dat er helaas te weinig tijd was om een compleet driedimensionaal model te ontwikkelen. Bas van 't Hof van VORtech is trots op wat ze in korte tijd gevonden hebben, maar baalt dat de studieweek zo snel omvloog: "We hebben zoveel goede aanknopingspunten, maar allemaal nét niet wat we zoeken. Hadden we maar iets meer tijd." Het team adviseert TNO om de besproken modellen verder te onderzoeken, liefst zowel met pijpen in het lab als met numerieke simulaties, zodat gekeken kan worden welke aannames het beste overeenkomen met de praktijk.

Carey Walters zegt aan het eind van de week dat hij in het begin wel moest lachen om de reacties: "De wiskundigen leken te denken dat ik hen vroeg om het wiel uit te vinden, omdat er al zoveel over het probleem bekend was. Maar wat ik vroeg, stond echt niet in de literatuur. Deze week heb ik in veel discussies meegedaan. Door aan niet-ingenieurs uit te leggen wat precies mijn probleem is, heb ik veel geleerd over het fenomeen. De ideeën van de wiskundigen zijn zeker interessant en ze hebben ook een aantal artikelen opgedoken die ik nog niet kende. Maar de grootste toegevoegde waarde waren de discussies."

Dit is een verslag van de Studiegroep Wiskunde met de Industrie 2013, van 26 januari t/m 1 februari 2013 op het Lorentz Center in Leiden. Voor de bijbehorende wetenschappelijke publicatie, waarin de gebruikte wiskundige modellen en methoden uitvoerig staan beschreven, verwijzen we u naar websites.math.leidenuniv.nl/SWI-2013/.