Joseph Steenbrink
Nijmegen
j.steenbrink@math.ru.nl

Geschiedenis

Ibn al-Haythams biljartprobleem voor een ellips

Al-Hasan ibn al-Haytham, een Arabisch astronoom en wiskundige, bedacht een oplossing voor een oud optisch probleem over lichtweerkaatsing van een cirkelvormige spiegel. Dit probleem staat ook wel bekend als het cirkel-biljartprobleem. Joseph Steenbrink, emeritus hoogleraar van de Radboud Universiteit, beschrijft in dit artikel een versie van dit probleem waarbij het biljart de vorm van een ellips heeft.

Het volgende optische probleem werd reeds geformuleerd door Claudius Ptolemaeus (circa 87–150):

> *Een voorwerp en een waarnemer bevinden zich op gegeven posities in een vlak. Hoe kunnen we de punten op een cirkelvormige spiegel vinden zodanig dat een lichtstraal uitgaande van het voorwerp die de spiegel in het punt raakt, weerkaatst wordt naar het oog van de waarnemer?*

Het werd opgelost door de Arabische geleerde Al-Hasan ibn al-Haytham (965–1040) met behulp van euclidische meetkunde. Zie [4] voor een analyse van zijn argumenten. Aangezien de terugkaatsing van biljartballen aan dezelfde wet voldoet als die van licht (hoek van inval is gelijk aan hoek van terugkaatsing), spreekt men ook wel van het biljartprobleem van Ibn al-Haytham of Alhazen.

Ik maakte een tiental jaren geleden kennis met dit klassieke probleem aan de lunchtafel met Leon van den Broek. Er bleek op internet een oplossing te vinden. Als men het middelpunt M van de cirkel vastlegt en de positie van twee punten A en B, dan bepaalt elk punt P in het vlak de cirkel met middelpunt M die door P gaat. Neem aan dat A en B binnen die cirkel liggen. Een van A uitgaande lichtstraal wordt dan in P gereflecteerd; de weerkaatste straal gaat dan door B indien $\angle APM = \angle MPB$. Hier gebruiken we de *georiënteerde hoek*, die waarden aanneemt in $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

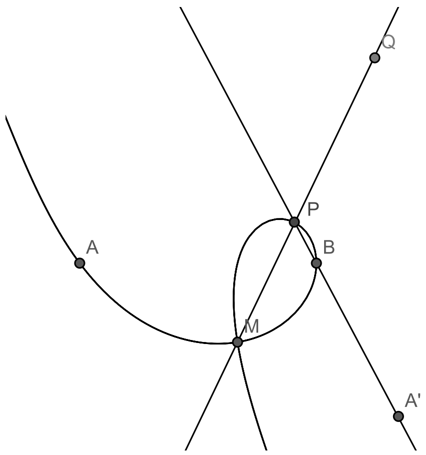
Een iets zwakkere voorwaarde is dat de rechte AP door reflectie in de raaklijn in P overgaat in de rechte BP; dit komt neer op de conditie $2\angle APM = 2\angle MPB$, die equivalent is met $\tan\angle APM = \tan\angle MPB$. Deze voorwaarde is algebraïsch eenvoudiger.

De punten P in het vlak met de eigenschap dat $2\angle APM = 2\angle MPB$ vormen een kromme, genoemd naar Isaac Barrow, die er de vergelijking van bepaalde in zijn Cambridge Lectures van 1669 (zie [5]). Deze kromme heeft graad drie en gaat door de punten A, B en M. Hij heeft een dubbelpunt in M. Door inversie met betrekking tot een cirkel met middelpunt M ontstaat een orthogonale hyperbool, die door Huygens werd gebruikt om het probleem van Alhazen analytisch op te lossen. De snijpunten van de Barrowkromme met de gegeven cirkel zijn de gezochte punten. Ze zijn niet met passer en liniaal te construeren (zie [3]).

De Barrowkromme is reeds eerder in dit tijdschrift opgedoken in verband met het schurenprobleem (zie [1]). Een vroegere bespreking van het biljartprobleem in onze landstaal is [2]. In geen van deze artikelen wordt de relatie met Alhazen gelegd.

Met meetkundige software zoals Cabri Geometry of Geogebra is de Barrowkromme eenvoudig te construeren. Fixeer de punten A, B en M. Kies een hulpcirkel met middelpunt M. Voor een punt Q op deze hulpcirkel zij A' het spiegelbeeld van A ten opzichte van de lijn MQ. Zij P met snijpunt van $A'B$ met MQ. Dan is de Barrowkromme de meetkundige plaats van de punten P als Q de hulpcirkel doorloopt. Zie Figuur 1.

In de rest van deze bijdrage wil ik Alhazens biljartprobleem voor een ellips analyseren. We leggen twee punten A en B (de posities van de biljartballen) en twee punten F en G (de brandpunten van de beschouwde ellips) vast. Dan hebben we weer een Barrowkromme; deze bestaat uit de punten P met



Figuur 1

de volgende eigenschap: is E de ellips door P met brandpunten F en G, dan gaat de rechte AP door reflectie in E te P over in de rechte BP.

Ik geef nu een eenvoudige manier om de vergelijking van de Barrowkromme C te bepalen. Het zal blijken dat C meestal een derdegraadskromme is, door de punten A, B, F en G gaat en voor algemene positie van de gegeven punten niet-singulier is, dat wil zeggen een elliptische kromme. Daaruit volgt onder meer dat er geen rationale parametrisering van C bestaat. Wel kan men C met Geogebra construeren, door twee meetkundige plaatsen samen te voegen.

Voor verschillende punten P, Q in het vlak definiëren we veeltermen

$$\ell_{PQ} = (x - x_P)(y - y_Q) - (y - y_P)(x - x_Q),$$

$$q_{PQ} = (x - x_P)(x - x_Q) + (y - y_P)(y - y_Q).$$

Dan is ℓ_{PQ} lineair en q_{PQ} kwadratisch. Voor een derde punt R geldt dan, dat $\ell_{PQ}(R)$ tweemaal de georiënteerde oppervlakte van $\triangle PQR$ is en $q_{PQ}(R)$ de *macht* van het punt R ten opzichte van de cirkel met diameter PQ. In het bijzonder geldt dat $\ell_{PQ} = 0$ een vergelijking van de rechte door P en Q is, en $q_{PQ} = 0$ de genormeerde vergelijking van de cirkel met diameter PQ (dat wil zeggen: de tweedegraadsterm is x^2+y^2). Wegens sinus- en cosinusregel geldt bovendien:

$$\ell_{PQ}(R)/q_{PQ}(R) = \tan \angle PRQ.$$

Keren we nu terug tot ons ellipsprobleem met de gegeven punten A, B, F en G. We definiëren de Barrowkromme C als de verzameling punten P waarvoor $P \in \{A, B, F, G\}$ of $2\angle APF = 2\angle GPB$. Een equivalente voorwaarde is

$$\tan \angle APF = \tan \angle GPB.$$

Deze kromme heeft derhalve de vergelijking

$$\ell_{AF} q_{GB} = \ell_{GB} q_{AF}.$$

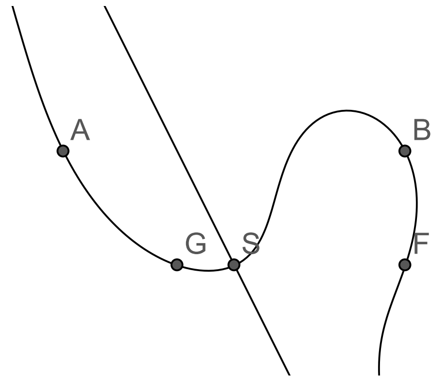
Dit is een vergelijking van graad hoogstens drie.

Het derdegraadsstuk van $\ell_{AF} q_{GB} - \ell_{GB} q_{AF}$ is gelijk aan $(x^2 + y^2)(bx - ay)$ waar

$$b = y_A + y_B - y_F - y_G \quad \text{en}$$
$$a = x_A + x_B - x_F - x_G.$$

We kunnen nu twee gevallen onderscheiden.

- $a = b = 0$. Dan geldt dat $\frac{1}{2}(x_A + x_B) = \frac{1}{2}(x_F + x_G)$ en $\frac{1}{2}(y_A + y_B) = \frac{1}{2}(y_F + y_G)$. Dit betekent dat de middens van de lijnstukken AB en FG samenvallen. Dat wil zeggen dat $\square AFBG$ een parallellogram is. De kromme C heeft nu graad twee. Het is een orthogonale hyperbool door de punten A, B, F, G, die ontaardt in twee loodrechte lijnen als $\square AFBG$ een ruit is. Men kan aantonen dat er precies één orthogonale hyperbool door de gegeven punten bestaat.
- $\square AFBG$ is geen parallellogram. De kromme C heeft graad drie. In het complexe projectieve vlak liggen drie punten van C op de oneigenlijke rechte: de twee isotrope punten — dat zijn de imaginaire punten in oneindig die alle cirkels gemeenschappelijk hebben — en het oneigenlijke punt O van de rechte die de middens van de lijnstukken AB en FG verbindt. Omdat C drie oneigenlijke punten heeft en graad drie heeft, zijn deze oneigenlijke punten regulier. De raaklijn in het punt O is de asymptoot van C. Het is mogelijk dat deze raaklijn een component van C is.



Figuur 2

In Figuur 2 ziet men de kromme C, zijn asymptoot en hun snijpunt S.

Men ziet meteen dat C gaat door alle punten waarvoor $\ell_{AF} q_{GB} = \ell_{GB} q_{AF} = 0$. In het algemeen gaat het daarbij om negen punten die de basispunten zijn van een schaar van derdegraadskrommen. In dit geval wordt de derdegraadskromme C bepaald door de negen basispunten en het punt O. Voor algemene ligging van de punten A, B, F en G is de kromme C niet-singulier. Een niet-singuliere derdegraadskromme waarop een speciaal punt gekozen is heet een *elliptische kromme*. De punten hiervan vormen een abelse groep met het gekozen punt als nulelement. In ons geval kiezen we het punt O. Dan heeft het punt S de volgende betekenis. Zij Q een punt van C. Dan is $-Q$ het derde snijpunt van de rechte QS met C.

Het is me niet gelukt een eenvoudige constructie te vinden voor de ligging van S wanneer alleen de punten A, B, F en G gegeven zijn. Wellicht kan een lezer mij helpen?

Referenties

1 J. van de Craats, Alledaagse wiskunde, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/1, nr. 3 (2000), pp. 342–343.

2 H.M. Mulder, Naar een idee van J.C. van Rhijn, Rotterdam, *Euclides* 52e jaargang, nr. 8 (1976/77), 303–307.

3 P.M. Neumann, Reflections on Reflection in a Spherical Mirror, *Amer. Math. Monthly*, June–July (1998), 523–528.

4 A.I. Sabra, Ibn al-Haytham's Lemmas for Solving "Alhazen's Problem", *Archive for the Exact Sciences* 26 (1982), 299–324.

5 J.D. Smith, The remarkable Ibn al-Haytham, *The Mathematical Gazette* 96 (1992) 189–198.