Jan Friso Groote
Informatica, Technische Universiteit Eindhoven
j.f.groote@tue.nl

Hans Zantema
Informatica, Technische Universiteit Eindhoven
Informatica, Radboud Universiteit, Nijmegen
h.zantema@tue.nl

Recreatieve wiskunde

De kans om Ganzenbord te winnen

In dit artikel analyseren Jan Friso Groote en Hans Zantema de kans op winst voor de verschillende spelers van het traditionele bordspel *Ganzenbord*. Deze kansen kan men berekenen voor maximaal vijf spelers, waarbij het aantal toestanden oploopt tot zeer grote omvang. Voor twee spelers kan men deze kansen exact uitrekenen als breuken waarvan de tellers en noemers uit duizenden cijfers bestaan. Een verrassend resultaat is dat bij twee spelers de kans op gelijk spel (een speler in de put en de ander in de gevangenis) substantieel is: bijna 23 procent.

Ganzenbord is een traditioneel bordspel. Het is algemeen bekend, vooral in Europa [1], en is de basis van veel variaties op dit spel. Het basisidee bestaat uit een aantal genummerde velden, waarbij het doel is het laatste veld te bereiken door om de beurt met een of twee dobbelstenen te gooien en het geworpen aantal ogen vooruit te gaan. Onderweg kom je allerlei hindernissen tegen, zoals de put en de gevangenis waarin je moet blijven tot een andere speler je komt bevrijden.

In [5] wordt Ganzenbord beschreven als “historically the most important spiral game ever devised” en wordt als een van de bronnen het Italië van Francesco de Medici (1574–1587) genoemd, terwijl in de oude geschiedenis van Egypte en Griekenland verwante spelen ook al populair waren.

Het huidige Ganzenbord kent 64 velden, genummerd van 0 tot en met 63, en wordt gespeeld met twee of meer spelers. Het spel is een puur geluksspel: het verloop van het spel wordt geheel bepaald door het werpen van dobbelstenen, en de spelers hebben geen enkele eigen keuze, in tegenstelling tot bijvoorbeeld *Mens erger je niet!*, waarbij de spelers nog kunnen kiezen welke van hun pionnen ze gaan spelen. Op grond hiervan ligt de kans om te winnen bij Ganzenbord voor elke speler helemaal vast. Een voor de hand liggende vraag is wat deze kans is voor elke speler, en dat is precies het onderwerp van dit artikel.

In tegenstelling tot pure kansspelen zoals Ganzenbord, is er veel analyse gedaan naar winst bij strategiespelen. Spelen als *Vier op ’n rij* [7] en beperkte vormen van *Awari* zijn helemaal doorgerekend. Voor de grote spelen als schaken, dammen en go is niet bekend of er een winnende strategie is, wel is de vraag of zo’n strategie bestaat goed gedefinieerd.

Voordat we met de analyse van Ganzenbord kunnen beginnen, moeten we eerst de regels precies vastleggen. Hoewel in grote lijnen de spelregels van de verschillende versies van Ganzenbord met elkaar overeenkomen, zijn er toch verschillen op detailpunten. Zo is de plaats waarnaar je terug moet springen als je op het doolhof op positie 42 komt in sommige uitvoeringen 30, en in andere 37. Hier hebben we een vrij willekeurige keuze gemaakt. Verder zijn er versies waarbij *fiches* uitgekeerd of betaald worden, een aspect dat wij buiten beschouwing laten. De precieze regels die wij volgen worden beschreven in de volgende paragraaf.

Een manier om de kans op winst te benaderen is door het spel een groot aantal keren te simuleren, en daarbij te tellen hoe vaak elke speler wint. Echter, deze methode convergeert zeer traag, en is daarmee niet geschikt om de kansen met grote precisie vast te stellen.

In plaats daarvan bouwen we de volledige toestandsruimte op, bestaande uit alle toestanden waarin het spel zich bij een gegeven aantal spelers kan bevinden. Voor elke toestand geven we een vergelijking voor de kans dat in die toestand een betreffende speler wint. Voor toestanden waarin het eindveld 63 bezet is, is dat makkelijk: als dat veld door de betreffende speler bezet is, is dat 1, en als dat door een andere speler is, is dat 0. Voor de overige toestanden bekijken we welke toestanden er vanuit die toestand bereikbaar zijn bij elke mogelijke dobbelsteenworp, en stellen de kans als gewogen gemiddelde van de kansen bij de vervolgtoestanden. Op deze manier krijgen we n lineaire vergelijkingen over n onbekenden, waarbij n het totaal aantal toestanden is. Dit lineaire stelsel kan met standaardmethoden worden opgelost. Dit aantal n loopt snel op met het aantal spelers, zo is n ongeveer 4000 voor Ganzenbord met twee spelers, maar rond de 885 miljoen voor vijf spelers.

Met behulp van Mathematica [2] kunnen we het spel met twee spelers exact oplossen, waarbij de resulterende kansen als breuken worden gegeven. Voor het spel met drie spelers is een exacte berekening niet meer haalbaar, maar wel een numerieke benadering. Het spel met vier spelers kunnen we numeriek oplossen met Matlab [3] met de *induced dimension reduction*-methode (IDR-methode) als uitbreiding [6]. Voor vijf spelers hebben we een oplossing met behulp van een ad-hoc-dekpuntalgoritme. Voor zes of meer spelers is het vaststellen van de kansen op winst met deze precisieaanpak vooralsnog buiten ons bereik.

De verkregen resultaten bevestigen op veel punten wat je intuïtief verwacht, maar wijken daar soms ook van af. Het meest verrassende was dat er bij het spel met twee spelers een substantiële kans, namelijk bijna 23 procent, is op gelijkspel: de eindsituatie waarbij een van de spelers in de put zit en de ander in de gevangenis.

Voor alle aantallen spelers die we onderzocht hebben, blijkt de speler die begint in het voordeel te zijn. Bij twee spelers is dit verschil nog geen 2 procent, bij vijf spelers loopt dit op tot bijna 10 procent. Het is ook interessant te kijken hoe de winstkansen beïnvloed worden door de posities op het bord. Voor twee spelers geven wij hiervoor driedimensionale diagrammen die de winstkansen geven met de beide posities van de spelers als parameters. Ook hier komen soms tegenintuïtieve resultaten uit, zo wordt de winstkans van een speler nauwelijks verhoogd als de tegenstander in de put komt.

De reden voor het analyseren van dit spel zit zeker niet alleen in de recreatieve sfeer. In de informatica is het verifiëren van eigenschappen van systemen met grote toestandsruimten een belangrijk onderwerp, en veel van dergelijke systemen vertonen probabilistisch gedrag. Op grond hiervan is het zinvol systemen met probabilistisch gedrag en een groot aantal toestanden te verkennen en door te rekenen, en ervaring op te doen met de beperkingen die daarin optreden. Hierin is Ganzenbord een eerste stap.

Alvorens Ganzenbord in detail te beschrijven beschouwen we eerst een zeer versimpelde versie om onze manier van oplossen toe te lichten.

0	1	2
start		einde

Hierin zijn er slechts drie velden, 0, 1 en 2, en de speler die het eerst op 2 komt heeft gewonnen. Er zijn twee spelers, en die werpen om de beurt met een munt waarop op de ene zijde een 0 staat en op de andere een 1, aangevende het aantal posities dat de speler vooruit mag. Dit spel kent toestanden (i,j,k) voor $i \in \{1,2\}$ en $j,k \in \{0,1,2\}$, waarbij (i,j,k) de toestand is waarbij speler i aan de beurt is, speler 1 op positie j staat en speler 2 op positie k staat. Niet al deze toestanden zijn bereikbaar, zo kunnen niet beide spelers op 2 staan, en komen de toestanden $(i,2,2)$ niet voor. We willen weten wat de kans is dat de beginner (speler 1) wint, en voeren daartoe variabelen q_{ijk} in, aangevende de kans dat speler 1 wint vanuit toestand (i,j,k). We willen dus weten wat de waarde is van q_{100}. Vanuit toestand $(1,0,0)$ werpt

speler 1 de munt. Met een kans van één op twee levert dat een 0, waarbij speler 1 op 0 blijft en daarna speler 2 aan de beurt is, en we aangekomen zijn in toestand $(2,0,0)$. Met ook een kans van één op twee had speler 1 een 1 geworpen, en is $(2,1,0)$ de nieuwe toestand. Dit levert de vergelijking $q_{100} = \frac{1}{2}q_{200}+\frac{1}{2}q_{210}$. Algemener geeft elke toestand (i,j,k) waarbij nog niet gewonnen is, dus $j,k<2$, een vergelijking voor q_{ijk}: als $i=1$ kan speler 1 naar j of $j+1$ gaan, met gelijke kans, waarna speler 2 aan de beurt is, dus $q_{1jk} = \frac{1}{2}q_{2jk}+\frac{1}{2}q_{2,j+1,k}$. Net zo voor speler 2: $q_{2jk} = \frac{1}{2}q_{1jk}+\frac{1}{2}q_{1,j,k+1}$. Verder heeft speler 1 gewonnen als hij op 2 komt, dus $q_{i2k}=1$, en heeft speler 1 verloren als speler 2 op 2 komt, dus $q_{ij2}=0$. In totaal geeft dit het hele stelsel

$$\begin{aligned}
q_{100} &= \tfrac{1}{2}q_{200}+\tfrac{1}{2}q_{210},\\
q_{200} &= \tfrac{1}{2}q_{100}+\tfrac{1}{2}q_{101},\\
q_{110} &= \tfrac{1}{2}q_{210}+\tfrac{1}{2}q_{220},\\
q_{112} &= 0,\\
q_{210} &= \tfrac{1}{2}q_{110}+\tfrac{1}{2}q_{111},\\
q_{220} &= 1,\\
q_{101} &= \tfrac{1}{2}q_{201}+\tfrac{1}{2}q_{211},\\
q_{111} &= \tfrac{1}{2}q_{211}+\tfrac{1}{2}q_{221},\\
q_{201} &= \tfrac{1}{2}q_{101}+\tfrac{1}{2}q_{102},\\
q_{211} &= \tfrac{1}{2}q_{111}+\tfrac{1}{2}q_{112},\\
q_{221} &= 1,\\
q_{102} &= 0,
\end{aligned}$$

met als oplossing

$$\begin{array}{lll}
q_{100} = \dfrac{16}{27}, & q_{200} = \dfrac{11}{27}, & q_{110} = \dfrac{8}{9},\\
q_{112} = 0, & q_{210} = \dfrac{7}{9}, & q_{220} = 1,\\
q_{101} = \dfrac{2}{9}, & q_{111} = \dfrac{2}{3}, & q_{201} = \dfrac{1}{9},\\
q_{211} = \dfrac{1}{3}, & q_{221} = 1, & q_{102} = 0.
\end{array}$$

In het bijzonder vinden wij hierin de gevraagde kans dat de beginner wint: $q_{100} = \frac{16}{27}\approx 0.59$.

Deze methode werkt voor elk spel met eindig veel toestanden waarin het spelverloop geheel door kansen wordt vastgelegd: voer voor elke toestand een variabele in die de kans aangeeft dat een bepaalde speler vanuit die toestand wint. Voor de winnende en verliezende toestanden wordt de vergelijking opgeleverd die deze variabele gelijkstelt aan 0 of 1. Voor de overige toestanden wordt gekeken welke toestanden in een stap bereikt kunnen worden, en wordt de vergelijking opgeleverd die de kans bij de gegeven toestand gelijkstelt aan het gewogen gemiddelde van de kansen bij de vervolgtoestanden. Op deze manier is er voor elke variabele precies één lineaire vergelijking. Vanaf dit moment kunnen we de betekenis van de variabelen vergeten, en elk gewenst mechanisme inzetten om de vergelijkingen op te lossen. Voor kleine stelsels zoals hierboven is dat nog heel goed met de hand te doen, voor grotere stelsels kunnen hulpmiddelen als Mathematica en Matlab behulpzaam zijn. In ontaarde gevallen, bijvoorbeeld bij het werpen van dobbelstenen die aan alle zijden 0 ogen hebben, kan het voorkomen dat het resulterende stelsel geen unieke oplossing heeft.

De spelregels van Ganzenbord

Dan zijn we nu toe aan het geven van de spelregels van Ganzenbord, waarin we op de detailpunten waarin verschillende in omloop zijnde versies van elkaar verschillen, een keuze vastleggen.

- Er zijn 64 velden, genummerd van 0 tot en met 63. Alle spelers starten op veld 0. De eerste speler die op veld 63 terechtkomt, wint.
- De spelers spelen om de beurt in een vaste volgorde.
- Een beurt van een speler bestaat uit het werpen van twee dobbelstenen, en het vooruitbewegen van evenveel plaatsen als er ogen zijn gegooid, tenzij de volgende regels iets anders voorschrijven.
- In het geval dat het veld waarop een speler terechtkomt al bezet is door een ander speler, gaat de speler weer terug naar waar hij vandaan kwam.
- Een speler wint alleen als hij precies op 63 terechtkomt; als hij voorbij 63 terecht zou komen moet hij het teveel geworpen aantal terugstappen vanaf 63.
- Op de velden 5, 9, 14, 18, 23, 27, 32, 36, 41, 45, 50, 54 en 59 is een gans aangegeven. Als een speler op een van deze velden terechtkomt, speelt hij hetzelfde aantal ogen nogmaals, in dezelfde richting als waarin gespeeld werd. Als dit weer een gans is, herhaalt dit proces zich.
- Als vanuit veld 0 een 3 en een 6 wordt geworpen, springt de speler in een keer naar 53. Als vanuit veld 0 een 4 en een 5 wordt geworpen, springt de speler in een keer naar 26. Merk op dat zonder deze regel de speler met de vorige regel in een keer op 63 terecht zou komen, omdat op alle negenvouden een gans is aangegeven.
- Veld 6 is de brug: een speler die hier aankomt gaat direct door naar veld 12.
- Veld 19 is de herberg: een speler die hier aankomt moet een beurt overslaan.
- Veld 31 is de put: een speler die hier aankomt moet hier net zolang blijven en doet niet mee met het spel tot een andere speler de put bereikt: dan doet deze speler weer mee en moet de ander in de put blijven.
- Veld 42 is het doolhof: een speler die hier terechtkomt gaat terug naar veld 30.
- Veld 52 is de gevangenis: een speler die hier aankomt moet hier net zolang blijven tot een andere speler de gevangenis bereikt; net zoals bij de put dus.
- Veld 58 is de dood: een speler die hier terecht komt gaat terug naar veld 0 en moet dus helemaal opnieuw beginnen.

Deze regels worden herhaaldelijk toegepast, waardoor een beurt uit een hele serie bewegingen kan bestaan. Als een speler bijvoorbeeld op veld 46 staat en 4 gooit, gaat hij naar 50. Dat is een gans, dus gaat hij naar 54. Dit is wederom een gans, dus gaat hij naar 58. Dat is de dood, dus hij moet helemaal opnieuw beginnen op veld 0. Als veld 0 al bezet is doordat een andere speler in een vorige beurt op de dood terechtkwam, kan deze hele beurt niet worden uitgevoerd, en blijft de speler staan op veld 46 waar de hele operatie begon. Als een ander voorbeeld beschouwen we een speler die op veld 60 twee zessen werpt, komt negen posities over de 63 heen, en moet dan dus naar 54. Aangezien dit een gans is, moet hij nogmaals 12 stappen doen in de gespeelde richting, dat is achteruit, dus naar 42. Omdat dit het doolhof is, gaat hij dan terug naar veld 30.

Merk op dat er door dit heen en weer spelen geen bovengrens is aan het aantal beurten dat een spel kan duren; de kans dat het spel onbeperkt lang doorgaat is echter 0.

In het geval van twee spelers zijn er drie mogelijke uitkomsten: de eerste of de tweede speler kan winnen door precies op veld 63 te komen, maar de derde mogelijkheid is een gelijkspel doordat het spel vastloopt in een toestand waarbij een speler in de put zit en de ander in de gevangenis. Bij meer dan twee spelers kan dit verschijnsel zich niet voordoen, omdat zowel de put als de gevangenis maar hoogstens één speler kan vasthouden, en er dus altijd nog een speler is die niet vast zit.

Bij het beschouwen van toestanden bij Ganzenbord is het basisidee hetzelfde als in het simpele spel dat net is beschreven: een toestand wordt aangegeven door de posities waar de spelers zich bevinden, en welke speler aan de beurt is. Bij elke toestand en elke mogelijke worp moet worden beschreven in welke nieuwe toestand het spel dan terechtkomt, en de bijbehorende vergelijking moet worden opgesteld, die de variabele van de oorspronkelijke toestand gelijkstelt aan het gewogen gemiddelde van de variabelen van de mogelijke vervolgtoestanden. Het vaststellen van de vervolgtoestanden kan best gecompliceerd zijn, zoals hierboven in enkele voorbeelden aangegeven, maar is wel precies gedefinieerd volgens een klein aantal simpele regels. Er zijn spelregels die afdwingen om nog een aantal extra toestanden in te voeren. Zo moeten alle toestanden waarbij een speler op de herberg staat verdubbeld worden: een toestand aangevende dat de beurt die moet worden overgeslagen nog moet komen, en een waarbij die al geweest is.

Het spel voor twee spelers

Bij twee spelers wordt de toestand in principe vastgelegd door de posities van beide spelers, en welke van de twee spelers aan de beurt is. Een eerste schatting van het aantal toestanden is dus het kwadraat van het aantal velden op het bord maal twee. Het werkelijke aantal is echter aanzienlijk kleiner, onder meer omdat veel velden nooit bezet zijn na het afhandelen van een worp: de ganzen, de brug, het doolhof en de dood, maar ook bijvoorbeeld veld 1. Het blijkt dat bij twee spelers het aantal bereikbare toestanden 4048 is. Voor elk van deze toestanden wordt een variabele ingevoerd die de kans aangeeft dat speler 1 wint, en een vergelijking opgesteld die deze variabele gelijkstelt aan een gewogen gemiddelde van de variabelen die horen bij de mogelijke vervolgtoestanden. Voor een toestand waarbij speler 1 op 63 staat wordt de waarde 1 ingevuld, en voor een toestand waarbij speler 2 op 63 staat, of waarbij de ene speler in de put zit en de ander in de gevangenis, is de waarde 0. Het oplossen hiervan levert voor de variabele horend bij beide spelers op veld 0, en speler 1 aan de beurt, de waarde

$$0{,}393625137393757391402840344876\ldots$$

en dat is dus de kans dat de beginner wint. Voor zowel het opstellen van de vergelijkingen en het oplossen daarvan, is de hulp van de computer onontbeerlijk. Zowel het opstellen als oplossen hebben wij met verschillende middelen onafhankelijk van elkaar gedaan, en dat leverde steeds dit getal in al zijn decimalen op, wat een indicatie is voor correctheid. Kleine wijzigingen in de spelregels, bijvoorbeeld het weglaten van de beurt overslaan bij de herberg op 19, of het terugspringen naar een ander veld dan 30 bij het doolhof op 42 (zoals bij de spelregels van sommige uitvoeringen van Ganzenbord wordt aangegeven) leveren een waarde die wel ongeveer gelijk is aan deze waarde, maar niet exact. Bij het gebruiken van Mathematica als oplosmethode is het mogelijk de waarde exact te bepalen als breuk van twee positieve gehele getallen. Dit levert de breuk in Figuur 1 op. Deze breuk is de exacte waarde van de kans dat speler 1 wint, bij twee spelers.

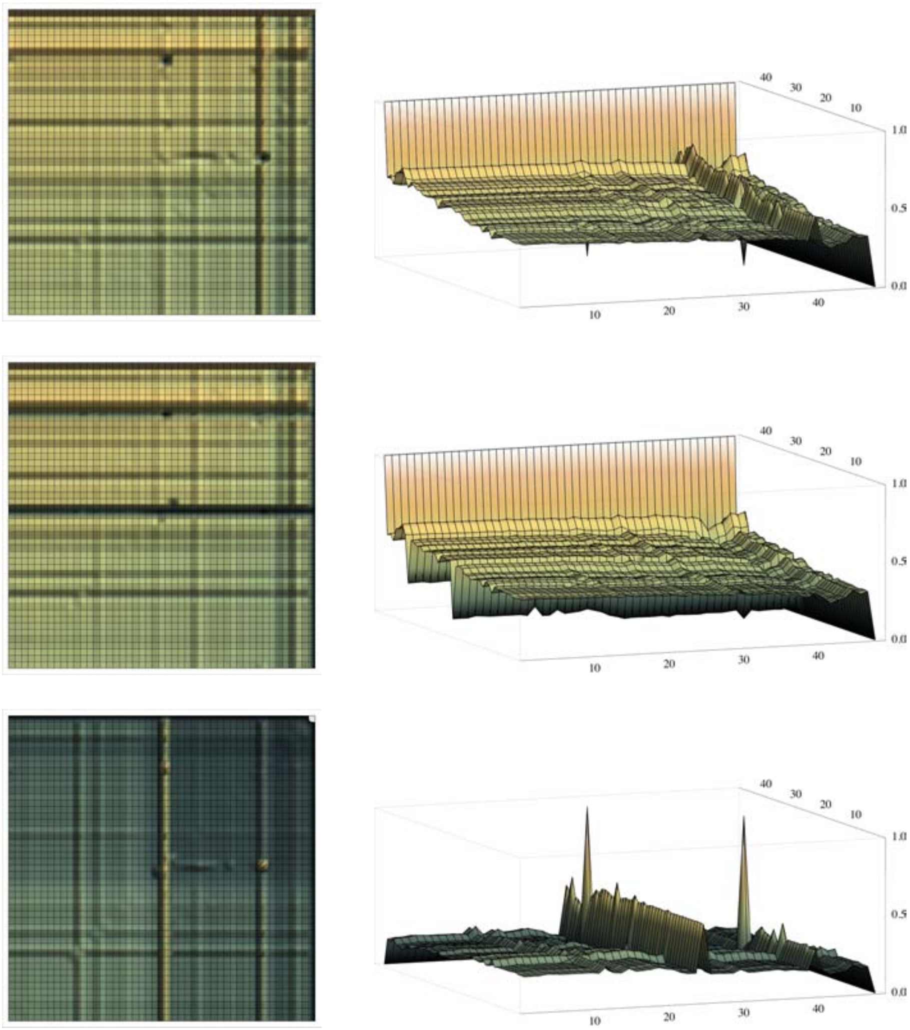
Om de kans dat speler 2 wint te bepalen, stellen we hetzelfde stelsel vergelijkingen op, met als enige verschil dat nu de toestanden waarbij speler 2 op 63 staat een 1 leveren en de toestanden waarbij speler 1 op 63 staat een 0 leveren. Voor de kans op remise hebben we twee manieren: we kunnen toestanden waarin de put en gevangenis beide bezet zijn een 1 geven en toestanden met een speler op 63 een 0, en dat stelsel oplossen, of we kunnen de som van de winstkansen voor beide spelers van 1 aftrekken. Het resultaat is als volgt:

Kans dat speler 1 wint	0,3936
Kans dat speler 2 wint	0,3799
Kans op gelijkspel	0,2265

354578138124950186817810489217182791317787798724802614410029328485608903369477431635018222558
399309450507103459074238228376405712500904558023752239339280938603803457573412946045548555428
192408470799948053129350811785597975235328183601609649319429499349866185498239751673351341769
582839004783122090660713501153416711577247932684590810429682087674204514516206428023232773142
970683832903046790844706695907372586643039096740098702406743747498676783882062602493264926223
838302824908562507570250392570595827698114873011234704695646697896143603966602499097872351154
669089452354191599916709746676851938051878405719576742617594702275857493698645246959330233303
091445902939904912863840744790654661105175111195454449663058266233638363673073343450482998878
224889581332206333579009718721098139784479036279112434678742992137019681147035075938046701550
918055159448125308748921320289899333197006467347143802920860473826874931173910161985261833871
891348234745481157765616175520794275559824385481401595657510498531296821490135004997149723846
312298317137414865283481215837836732118455291175984574489259882269507968728081889027165529711
660915404995631330437820160918345491253783805093745020459199567996953546847609820992902762908
750628689522634308453656275384033760133459102330761797545360967662642992417761488637785343096
179837783567510615016827169189382638260325730601238974784021870275751361465251485833641380988
601239137220474152073594938576999714048510670106244854187988128408120363500526256376389738531
527536713654289142088651349218285889196358082646355336459464707565595257453153280748427467824
804125023919836067186411643984746979465748585196447014561870836245035624955049440432350263977
824403133461025845332976436704285089656500992657870174243661788423998434592130682667322269405
049490116752141370798765615956317551142249979497567046069585441301567890743987803069586801932
669973979851519762918559922723993392470947267582828358727134952210072937955951818226524755153
725945829745811214804332328703353196315111784798277410263357528661496628912933728773218555977
962282140759639089508990171920383431393394642405434973415711204469313507363576994397787067207
425052329110883835493651467371006199576012293462207442967865421344357444321357800987822349475
376878156929670045445507371744044527718465666904104107234441730939460632072987861228015467811
882360487748332166057469542836916432762990864234404289049048042068157866859460085236085608315
623668882716193909184091442443597083669348518632793885704717828545288254527572206829503888843
189830953755201841220373817976349249436975535253449029794712313365966457380552647526110163477
309530899123504784001358147399949405347287670149449824157437381968509825640543358543867976582
112932024845249858864855940315369112486827116397833485123121716079117281508469354925885409764
674924868096271749236366074963266182936247416433242594731524706999193767511101871330792678259
280382594971805430937807818516642167895701603935105753261288618047393431315053008943441431152
112314766320450756187900149495780206679762576019422616321340814720511095615601551532129272718
542739705072677966046511469321938635400662566613122323344475936596007879096566202575850204524
189676551943771629765498166351584803390675990234443292078393699164128871377784023956250048044
331552068284643624644046415414958009203064443229091249119093243635766772160882604554315879605
060831221307872086909952800271602369875618608782388082232510649386131941136637973880915801002
154572511895832800230367533198381720968690002760891453868273714176187898521616789993779960852
761931148923821002490024262343407522301166428721085616227115222756065531414838764999639026632
039441391801485622144284338102119223432872300849269879911935735471566830470688649086825183967
844807850946421646147394307730886861802798090936151774215069265819265138777116887920005066844
010830068931878504072308068647265799544023019246293329832623031453567259134862222156900665676
786448672835928798628020069958939032396484550567944379409480283

900801560775964656126774493326889579738207808673590850978148447654100516265185014530331647892
963003549157974321305021253246292417449947288406287943081249483047759028012482686458088710035
667076237996138211920100304931630064917887932900820281965696801766239831673398209178450364993
664141772270799113017382685324511970805425293800448269497362017976312673299247677364939829441
356682373589121359929188239605113065014562579196471221602072740197329678855003920081111125071
562181004087297676021601547101904445991031881920268404465974551250191245335606564444955874790
579668842903908691859663445026042171718496802772890001540462085862285203596824508136312510930
848256782907319085401577950566480236492258368651403851498168474838648238887253361826278320974
211582989769501836744362197433090321629992797581960180227991741382084013179433356134386879465
593763466375933164532378142992032030676788266593780697459863590954425340611505393883463891170
971971064338366560257877714490386750914477743904362410695314284442222150192349474163351136665
216496309031156352596603819405940309695923665530872630461144194903750285125269104079009482059
449373800161294244270975727298452311247329735693384663705652207467764860758084365569131209291
229381384664939466470853167529986572849474795951706727760432071740948785034512160370763120637
339519772942758900998043467561936589952119274344302734511358915860188099372260220328866589088
156263594454570824879678437060954154474559388781342874179426124184682655203719929399964083174
163103613617183832005419973105753767668901642442011068968931764251547938499039025283281070521
626469361626355506807630054195079424417327991706187186940870807368776939235542166982376805364
554504077292848886835539066227774214224562642653978516302884675382241286557954761373473131260
398683754349784037651478869577494891197647440888866724744290474747707116650727026018201161485
468721477586155819906563951435363663409456413316958670299530968871213165410259673299779136449
546570382066086147033604221435389641473231140715280626878852774956863960299786109914398931518
303131212483531294493331159638610052553627850621091892922181967442078061555180719269959611691
375488038095571656477654073523484609997634483232600502379658428980870346360321738192432670388
030086044391330549464290582334683133818870134666528351268436864593343373928316778450239320151
490616017571218225599667338674345549599369213030835046237448574463407637323433037344642693651
701648988954227861867925754021764324627782273822196813395500498990947900775262466674566797502
538208692635181129126570140804676875824884483807381185441791415008023307041497487737249042310
505372990270640822151972277764575305052107974872293504455660045611058486209180538423771137278
665443687822206785250296004711649547019031985510776338368259491949746485804668295542587032964
330180313351672274528115527876257178151725307206824846802270199905183486827906401182641218870
282587165253232412527268173813719376856485718148441478527543006201364921512289327167966829752
840415669558102361080423578070292648605539487934572107269958992134149955478331466018851569593
718356612338981495161662932308349814571401207328017569896080483808315461551874907047767528969
200021893878774750118480746745401602759010790621652738798780702998291443204275453806422937174
486042713846526300307683386755779988859765442464426523581101010235589403184706181157183193989
204685507819243217476508781703035183919970452946772074659104050764081839159268568343117208670
821350611437447602059630356954342172567631055484692745718321278817807410839504476278638075658
957815114791859980138843196023327044410709069485441809674404861155840974443329069685443563451
000330064673984317988986377130965450283592011509535800247907476188834267070613796557088503934
717084645791126874032339497526018300237585065551096520626437434582945009801773336358068326941
285478875469093008017253189675909895843648482906710452459750563144869260744545121189657756675
3191653418733360283585073225627136513606612524945418565535662080

Figuur 1



Figuur 2

De kans op gelijkspel, dat wil zeggen dat het spel eindigt met een speler in de put en de ander in de gevangenis, is dus bijna 23 procent: veel groter dan aanvankelijk verwacht.

Het is interessant uit te zoeken hoe de winstkansen veranderen in de loop van het van het spel. Voor het spel met twee personen kan dit in een driedimensionale grafiek worden weergegeven, waarbij de x-as en de y-as de posities van beide spelers aangeven, beiden lopend over de 47 mogelijke posities waarin een speler zich kan bevinden, en de hoogte een kans. In Figuur 2 doen we dit van boven naar beneden voor drie mogelijke kansen: de kans dat speler 1 wint als speler 1 aan de beurt is, de kans dat speler 1 wint als speler 2 aan de beurt is, en de kans op gelijkspel. Van elk van deze grafieken geven we naast elkaar een bovenaanzicht en een vooraanzicht, waarbij donkere kleuren een kleine kans (laag in de grafiek) en lichte kleuren een grote kans (hoog in de grafiek) aangeven.

Deze grafieken geven een aantal verschijnselen die zeer te verwachten zijn: bij de bovenste twee plaatjes zien we een muur tegen de achterwand, aangevende dat de kans 1 is als speler 1 op 63 staat, en een diep dal aan de rechterkant, aangevende de kans 0 als speler 2 op 63 staat. Ruwweg wordt de kans op winst groter naarmate de 63 dichter is genaderd voor speler 1, en kleiner naarmate 63 dichter is genaderd voor speler 2.

Opmerkelijk is dat als speler 2 in de gevangenis (52) zit dit zoals te verwachten de kans op winst voor speler 1 verhoogt, maar als speler 2 in de put (31) zit is dit nauwelijks het geval. Een verklaring hiervoor is te vinden in de onderste grafiek: als speler 2 in de put zit, dan is er een substantiële kans op gelijkspel. De twee pieken in de onderste grafiek geven de kans 1 op gelijkspel in de twee toestanden waarin put en gevangenis beiden bezet zijn.

Er zijn nog meer verschijnselen uit deze grafieken af te lezen, bijvoorbeeld dat het niet in je voordeel is om op de posities vlak voor 63 terecht te komen.

Het spel voor meer dan twee spelers

Voor meer dan twee spelers kan in principe op dezelfde manier de winstkans voor elke speler worden vastgesteld. Een complicatie is wel dat het aantal toestanden, en daarmee het aantal variabelen en vergelijkingen, exponentieel toeneemt met het aantal spelers: voor N spelers is dit ruwweg Nc^N waarbij $c \approx 45$. In Tabel 1 geven we winstkansen voor de verschillende spelers weer voor zover we die hebben kunnen vaststellen: voor het vaststellen van deze waarden zijn we begonnen met het oplossen van de stelsels lineaire vergelijkingen met behulp van Mathematica [2]. Dit konden we exact doen voor twee spelers, zoals aangegeven in de vorige paragraaf, en dit kon numeriek voor drie spelers. Voor vier spelers zijn we overgestapt naar Matlab, uitgebreid met het IDR-pakket [3, 6], en konden daarmee de stelsels vergelijkingen numeriek oplossen; hiervoor was 400 Gbyte geheugen nodig.

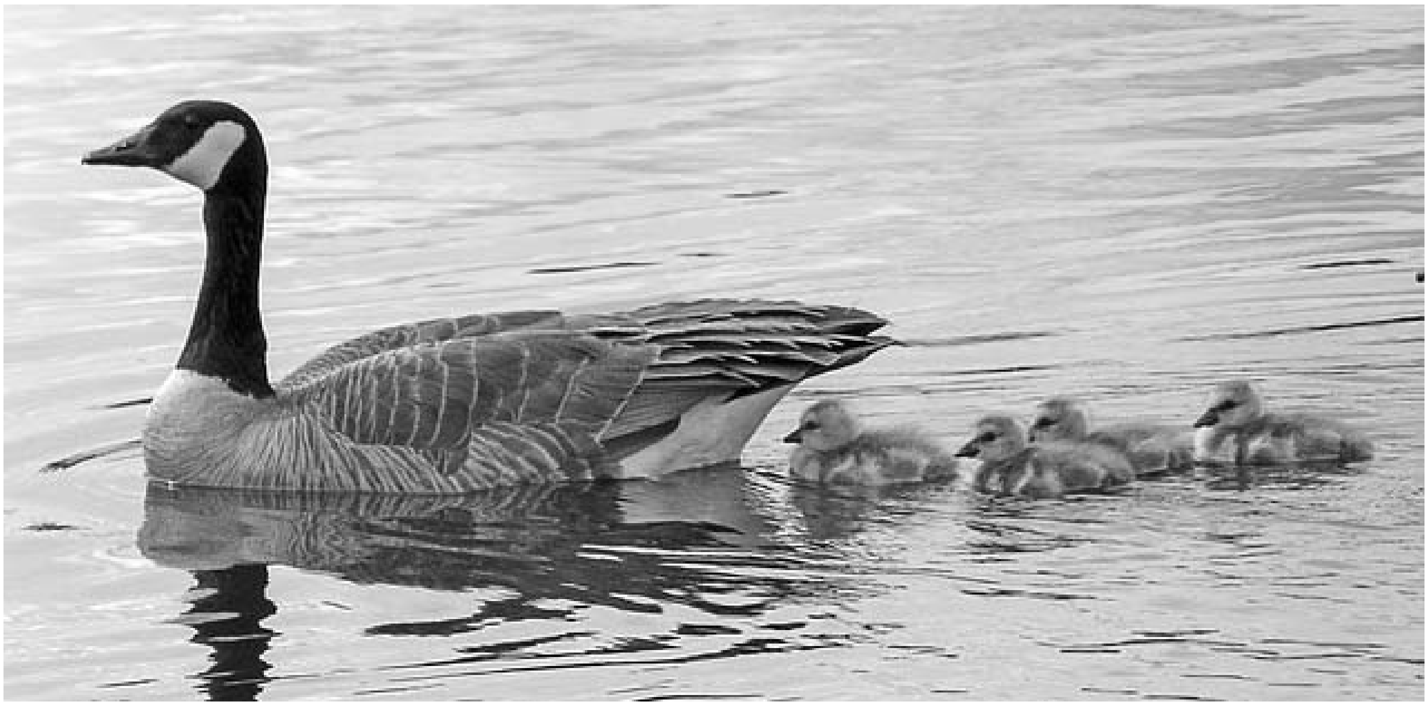
Door het uitbuiten van de speciale structuur van de vergelijkingen kunnen we echter nog een stap verder komen. Alle vergelijkingen zijn van de vorm

$$p_i = c_{i1}p_{i1} + \cdots + c_{ik}p_{ik},$$

waarin c_{ij} getallen tussen 0 en 1 zijn, waarvan de som over j gelijk aan 1 is, afgezien van twee variabelen die de waarden 0 en 1 hebben. Dit stelsel kan nu gezien worden als een monotone operator, waarvan de gevraagde oplossing een dekpunt is. Deze oplossing kan benaderd worden door dekpunt iteratie: geef

	#vergelijkingen	speler 1	speler 2	speler 3	speler 4
twee spelers	4048	0,39363	0,37999	-	-
drie spelers	$2{,}79 \times 10^5$	0,34596	0,33290	0,32114	-
vier spelers	$1{,}64 \times 10^7$	0,26695	0,25471	0,24408	0,23426
vijf spelers	$8{,}85 \times 10^8$	0,22039	x	x	x

Tabel 1



eerst alle p's de waarde 1. Vervolgens wordt een groot aantal slagen uitgevoerd, waarbij in elke slag de nieuwe benadering van p_i bepaald wordt als $c_{i1}p_{i1} + \cdots + c_{ik}p_{ik}$, waarin voor $p_{i1}, \ldots, p_{ik}$ de laatst verkregen benaderingen worden ingevuld. In elke stap is nu voor elke p_i de nieuwe waarde kleiner of gelijk aan de vorige waarde, en zo wordt voor elke i een dalende rij waarden voor p_i verkregen, die uiteindelijk convergeert naar de juiste waarde van p_i. Voor vijf spelers is de gegeven waarde bepaald door dit proces te herhalen totdat de gegeven waarde stabiel is. Per constructie zijn deze benaderingen allemaal bovengrenzen: het is een invariant van dit proces dat elke benadering groter of gelijk is aan de echte oplossing. Op een soortgelijke manier zijn ondergrenzen te verkrijgen door te beginnen met alle p's de waarde 0 te geven. Met het genereren van ondergrenzen en bovengrenzen die voldoende dicht bij elkaar liggen, kan de juiste waarde met elke gewenste precisie worden bepaald.

Voor zes spelers is het aantal vergelijkingen ongeveer 5×10^{10}, en daarmee te groot om dit proces binnen redelijke tijd uit te voeren.

Referenties

1. H.C. Bolton, The game of goose, *The Journal of American Folklore* 8 (1985), 145–150.
2. Mathematica Version 8.0, Wolfram Research, Inc., Champaign, IL, 2010.
3. MATLAB version 7.10.0 (R2010a), The MathWorks Inc., Natick, MA, 2010.
4. J.W. Romein en H.E. Bal, Solving the Game of Awari using Parallel Retrograde Analysis, *IEEE Computer* 38 (2003), 26–33.
5. A.H. Seville, Tradition and Variation in the Game of Goose, *Board Games in Academia III*, Proceedings of Colloquium in Florence, 1999, pp. 163–174.
6. P. Sonneveld en M.B. van Gijzen, IDR(s): a family of simple and fast algorithms for solving large nonsymmetric linear systems, *SIAM Journal of Scientific Computing* 31 (2008), 1035–1062.
7. J.W.H.M. Uiterwijk, H.J. van den Herik en L.V. Allis, A Knowledge-Based Approach to Connect- Four. The Game is Solved! *Heuristic Programming in Artificial Intelligence: the first computer olympiad*, D.N.L. Levy en D.F. Beal, eds., Ellis Horwood Limited, Chichester, 1989, pp. 113–133.