

Herman de Lang

redacteur Nederlands Tijdschrift voor Natuurkunde
hndelang@gmail.com

Ken uw klassieken

Wiskunde en fysica

E.P. Wigner, The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences, Communications on Pure and Applied Mathematics 13 (1960), 1–14. In deze nieuwe rubriek worden klassiek geworden artikelen besproken die een blijvend stempel hebben gedrukt op de wiskunde. De navolgende bespreking van Wigners artikel door Herman de Lang is eerder verschenen in het Nederlands Tijdschrift voor Natuurkunde.

Volgens Albert Einstein is “das ewig Unbegreifliche an der Welt ihre Begreiflichkeit”. Die begrijpelijkheid komt voort uit de ontdekking dat “het boek der natuur geschreven is in de taal der wiskunde”. Galileo zei het 400 jaar geleden reeds: “De natuurfilosofie staat beschreven in het onvoorstelbaar grote boek dat doorlopend open voor onze ogen staat, ik bedoel het universum, maar men kan het niet lezen wanneer men niet eerst de taal en de tekens kent waarmee het geschreven is. Het is geschreven in de taal der wiskunde.” En meer dan 2000 jaar vóór hem verklaarde Pythagoras: “Het getal is de maat aller dingen.” Maar, aldus weer Einstein: “Wie ist es möglich, dass die Mathematik, die doch ein von aller Erfahrung unabhängiges Produkt des menschlichen Denkens ist, auf die Gegenstände der Wirklichkeit so vortrefflich passt?”

Dat fysische verschijnselen zo precies wiskundig beschreven konden worden, was ook Werner Heisenberg reeds als scholier opgevallen. “Diesen Gedanken, dass die Mathematik in irgendeiner Weise auf Gebilde unserer Erfahrung passt, empfand ich als ausserordentlich merkwürdig und aufregend”, herinnerde hij zich uit zijn middelbare schooltijd. Maar wat Eugene Wigner (Nobelprijswinnaar 1963) in zijn artikel formuleerde was de vraag naar de oorzaak van dat ‘unreasonable’ succes. Hoe komt het, aldus Wigner, “that the mathematical formulation of the physicist’s often crude experience leads in an uncanny number of cases to an amazingly accurate description of a large class of phenomena?” Voorbeelden daarvan zijn onder andere de bewegingswetten en de gravitatiewet van Newton waarmee de beweging van zon,

maan, planeten en sterren konden worden verklaard en de Maxwell-vergelijkingen waarmee in vier wetten alle elektrische, magnetische en optische verschijnselen konden worden begrepen.

Wiskunde: effectief of ineffectief?

Het antwoord op zijn vraag kon Wigner zelf niet leveren. Zijn onmacht blijkt uit het feit dat hij de samenhang tussen mathematica en fysica als een soort mysterieus raadsel beschouwde. “The enormous usefulness of mathematics in the natural sciences is something bordering on the mysterious and there is no rational explanation for it”, aldus Wigner. “The appropriateness of the language of mathematics for the formulation of the laws of physics is a wonderful gift which we neither understand nor deserve.”

Het probleem dat Wigner aan de orde stelde, ontlokt nog steeds reacties, ook van paus Benedictus XVI. In een Engelstalige brief aan de rector magnificus van de Pauselijke Lateraanse Universiteit, aartsbisschop Fisichella, schreef hij ter gelegenheid van het internationale congres ‘From Galileo’s telescope to evolutionary cosmology’ (Rome, 26 november 2009): “Yet the human mind invented mathematics in order to understand creation, but if nature is really structured with a mathematical language and mathematics invented by man can manage to understand it, this demonstrates something extraordinary. The objective structure of the universe and the intellectual structure of the human being coincide; the subjective reason and the objectified reason in nature are identical.”

Anderen wezen er echter op dat in wetenschapgebieden zoals economie, meteorologie, biologie de effectiviteit van de wiskunde veel te wensen overliet. De bekende moleculair bioloog Israel Gelfand verklaarde in een reactie op Wigners artikel: “There is one thing which is more unreasonable than the unreasonable effectiveness of mathematics in physics and that is the unreasonable ineffectiveness of mathematics in biology.” De mathematische ineffectiviteit in die andere wetenschappen is vaak te wijten aan de complexiteit van de aldaar heersende verschijnselen — complexiteit die zich alleen laat vangen in waarschijnlijkheidsrekening en statistiek.

Dit gebeurt ook in de fysica zoals bij de conceptie van de emergente thermodynamische begrippen en bij de dataverwerking van experimenten van de elementaire deeltjesfysica. Ook kan het gebeuren dat bepaalde wiskundige vergelijkingen — zoals de Navier–Stokes-vergelijkingen uit de stromingsleer — niet analytisch kunnen worden opgelost en numeriek moeten worden bewerkt. Maar een veel dieper liggende oorzaak



Eugene Paul Wigner (1902–1995)

is het feit dat, met uitzondering van de fysica, in de andere (natuur)wetenschappen de wiskunde slechts een instrumentele rol vervult, louter als toepassing, als numerieke manifestatie van kwantitatieve gegevens. Steeds kan men daarbij een strikte scheiding aanbrengen tussen de conceptuele begrippen uit de betreffende wetenschap en de mathematische bewerking ervan.

Daarentegen bestaat in de fysica een veel dieper, zelfs inherent verband tussen de wiskundige en fysische concepten. Snelheid en versnelling zijn niet te scheiden van differentiaalafgeleiden, het elektromagnetisch veld niet van het vectorveld, de algemene relativiteitstheorie niet van de niet-euclidische meetkunde, de tensorrekening en de differentiaalgeometrie, de elementaire-deeltjesfysica niet van de transformatiegroepen en kwantummechanica niet van de Hilbert-ruimte, om maar enkele voorbeelden te noemen. Zo werd door Newton de differentiaalrekening specifiek uitgevonden om de continue verandering en instantane snelheid van een lichaam in beweging te kunnen beschrijven. De wiskunde is medebepalend voor de vormgeving van de fysica, is daarmee ‘verinwendig’ en daarom onafscheidelijk en onscheidbaar ermee verbonden.

Wiskunde als taal

“Toutes les lois physiques,” aldus Henri Poincaré, “sont tirées de l’expérience, mais pour l’énoncer, il faut une langue spéciale; le langage ordinaire est trop vague, pour exprimer les rapports si délicats, si riches et si précis. Voilà donc une première raison pour laquelle le physicien ne peut se passer des mathématiques; elles lui fournissent la seule langue qu’il puisse parler.” Gezien haar constituerende en formatieve rol echter, is wiskunde méér dan de taal van de fysica. Wiskunde is in de fysica niet louter descriptief, maar vormt onderdeel van de fysische gedachte. De (theoretische) fysicus denkt de fysische verschijnselen mede in mathematische concepten. Die samenhang is subtiel. De wiskunde is niet een skelet waaromheen het fysische vlees wordt opgebouwd, noch is het een abstract idee dat met de fysische werkelijkheid concrete vorm wordt gegeven. De samenhang is dynamisch, waarbij men twee vormen kan onderscheiden: een *actieve* en een *passieve*.

De actieve vorm betreft de wiskunde die speciaal werd ontwikkeld met de toepassing op een specifiek fysisch probleem voor ogen. Ogenscheinlijk lijkt de effectiviteit dan voor de hand te liggen, maar toch is verbazingwekkend dat de effectiviteit veel groter blijkt te

zijn dan voor het doel waarvoor die oorspronkelijk werd ontworpen. Toen Newton zijn gravitatiewet opstelde, die inhoudt dat de kracht tussen twee massa’s omgekeerd evenredig is met het kwadraat van hun onderlinge afstand, bleek die wet tot op 4 procent nauwkeurig, op grond van de experimentele data die hem toen ter beschikking stonden. In 1950 bleek de experimentele nauwkeurigheid van de wet beter dan 0,001 procent. Vanwege de snaartheorie en de hypothese van meerdere opgerolde dimensies ontstond recent het vermoeden dat op hele korte afstanden de wet van Newton niet meer zou gelden. Met ingenieuze metingen toonde Dan Kapner van de universiteit van Washington (Seattle) in 2007 echter aan dat tot op een afstand van 0,056 mm de wet nog steeds geldt. Aldus blijkt dat een wet, die meer dan 300 jaar geleden op grond van summere gegevens wiskundig werd geformuleerd, thans nog met uiterste nauwkeurigheid geldt, zelfs in een gebied waarbinnen tot voor kort niet eens gemeten kon worden.

Zo groot was ook in het verleden het vertrouwen in de precisie van de wet van Newton, dat kleine afwijkingen ervan niet aan de wet zelf werden toegeschreven, maar aan de invloed van een storend object. Op die manier werd in 1840 de planeet Neptunus door Urbain Le Verrier ontdekt en in 1930 de dwergplaneet Pluto door Clyde Tombaugh van de Lowell Observatory in Arizona. Een ander voorbeeld is het magnetisch moment van het elektron dat in de kwantumelektrodynamica men zowel theoretisch kan berekenen als experimenteel meten. Beide resultaten bleken overeen te stemmen met een precisie van 10^{-8} procent. Volgens Richard Feynman is het alsof je de afstand tussen New York en San Francisco tot op een haarbreedte hebt kunnen bepalen.

Hoe dieper men in de fundamenteën van de fysica doordringt, hoe meer men merkt dat de fysica door de wiskunde wordt beheerst. De wiskunde die men daar vindt is bovendien niet van het eenvoudige uit te rekenen soort, maar betreft wiskunde van een diepgaand, subtiel en complex karakter dat men niet bij de minder fundamentele fysica aantreft. Nog verbazingwekkender is de effectiviteit van de passieve vorm, die bestaat uit volledig abstracte, zonder enig toepassingsoogmerk ontwikkelde wiskunde, maar die later blijkt een precies passend model voor een fysisch gebied te vormen. Zo bleek de in 1924 door Heisenberg opgestelde kwantummechanica, zonder dat hij er erg in had, te berusten op de matrix- en determinanttheorie die reeds in

de achttiende en negentiende eeuw was ontwikkeld. De in 1831 de dag voor zijn dood opgeschreven groepentheorie van Evariste Galois, louter om de oplosbaarheid van algebraïsche vergelijkingen te bepalen, bleek een uitstekende toepassing te zijn voor de classificatie, representatie en transformatie van elementaire deeltjes. Ook Einstein vond in de tensorrekening en differentiaalgeometrie van Bernhard Riemann (1826–1866) een kant-enklaar mathematisch apparaat voor zijn algemene relativiteitstheorie van 1915.

Een ander aspect is de pluriformiteit van het wiskundig gebruik in de fysica. Hetzelfde fysische verschijnsel kan op verschillende, maar equivalente wiskundige manieren beschreven worden. De beweging van een massapunt in een conservatief krachtenveld bijvoorbeeld, kan worden beschreven volgens Newton, Hamilton of Lagrange. De kwantummechanica kan worden geformuleerd volgens Heisenberg/Dirac, Schrödinger of Feynman. Niet alleen de wiskunde daarbij is verschillend, ook de onderliggende fysica is anders. Dit is een van de redenen waarom de fysica zich niet laat axiomatiseren. (Vanwege het onvolledigheidstheorema (1931) van Kurt Gödel is dat in de wiskunde ook niet meer mogelijk gebleken, ondanks pogingen daartoe van David Hilbert en van de école Bourbaki onder leiding van André Weil.)

Wiskunde en de werkelijkheid

De welhaast pijnlijke nauwkeurigheid van de wiskunde bij de beschrijving en voorspelling van fysische verschijnselen doet de vraag rijzen of de werkelijkheid volledig door de wiskunde wordt bepaald. “Is God a mathematician?”, vraagt de astrofysicus Mario Livio zich af. Max Tegmark, een fysicus van MIT, lijkt die vraag te beamen. In een artikel uit 2007 in de *Foundations of Physics* met als titel ‘The Mathematical Universe’, poneert hij twee hypothesen, de External Reality Hypothesis (ERH): *There exists an external physical reality completely independent of us humans*, en de Mathematical Universe Hypothesis (MUH): *Our external physical reality is a mathematical structure*. Hij adstrueert zijn hypothesen als volgt. Fysische theorieën streven ernaar om de werkelijkheid te beschrijven. De huidige theorieën echter bestrijken slechts beperkte gebieden van de werkelijkheid. De Heilige Graal van de fysica is een complete beschrijving van alles — een ‘Theory of Everything’ (TOE).

De ERH impliceert dat voor zo’n complete allesomvattende beschrijving de gebruikte ‘taal’ welgedefinieerd en begrijpelijk moet

zijn, ook voor niet-menselijke intelligente wezens zoals buitenaardse bewoners ('aliens') of toekomstige computers. Zo'n taal moet dus vrij zijn van 'menselijke bagage', dat wil zeggen van concepten en uitdrukkingen die tijdens de menselijke evolutie zijn ontstaan, zoals 'deeltje', 'observatie', enzovoorts, ja zelfs van ieder woord in iedere taal.

De enige taal zonder die menselijke bagage en daarom geschikt om de gehele werkelijkheid compleet te beschrijven is de wiskunde. Dat impliceert weer dat de werkelijkheid een wiskundige structuur moet hebben, zoals gesteld in MUH. Waar men nu nog zegt dat de externe werkelijkheid door de wiskunde wordt *beschreven*, kan men zeggen als de TOE is voltooid, dat de wiskunde de externe werkelijkheid *is*.

De vraag van Wigner naar de oorzaak van de raadselachtige effectiviteit van de wiskunde is daarmee volgens Tegmark beantwoord. De wiskundig geformuleerde benaderingen waaruit onze fysische theorieën bestaan zijn effectief omdat die eenvoudige wiskundige formuleringen een goede benadering vormen van bepaalde aspecten van meer complexe wiskundige structuren. "In other words," aldus Tegmark, "our successful theories are not mathematics approximating physics, but mathematics approximating mathematics."

De mathematische structuur van de werkelijkheid verklaart ook dat vanuit de wiskunde nieuwe fysische verschijnselen kunnen worden voorspeld, beter gezegd: nieuwe mathematische verbanden kunnen worden ontdekt. Reeds in 1931 verklaarde Paul Dirac: "The most powerful method of advance that can be suggested at present is to employ all the resources of pure mathematics in attempts to perfect and generalize the mathematical formalism that forms the existing basis of theoretical physics and after each success in this direction, to try to interpret the new mathematical features in terms of physical entities."

In zijn boek *The Road to Reality* (2004) echter, verdiept de bekende (nu emeritus) hoogleraar mathematische fysica van de universiteit van Oxford, Roger Penrose, de vraag van Wigner. Penrose onderscheidt drie werelden: de wereld van het mentale bewustzijn of de menselijke geest, de wereld van de materiële fysische realiteit en de platonische (ideële) wereld van de wiskunde. Die drie werelden zijn volgens hem verbonden door drie mysteries, namelijk: hoe kan het dat de menselijke geest uit de materiële wereld is ontstaan, hoe kan het dat de fysische wereld door de mathematische wereld wordt beheerst en hoe kan het dat de menselijke geest weet heeft

van de wiskundige wereld en daarmee ook de fysische wereld kan omvatten? De drie werelden vallen niet samen, maar vormen toch een eenheid. Daaraan is echter ook de vraag verbonden of wiskunde wordt ontdekt of uitgevonden. Met andere woorden, bestaat er inderdaad een ideële wiskundige wereld onafhankelijk van de mens, waarin we stukje bij beetje binnendringen of is de wiskunde niet meer dan een menselijke constructie? Daarover bestaat nog geen consensus.

De toekenning van een wiskundige structuur aan de fysische werkelijkheid werpt ook de vraag op welke waarheidscriteria men op een mathematische beschrijving van die werkelijkheid moet toepassen, mede in verband met de pluriformiteit van zo'n beschrijving. Tot nog toe geldt daarvoor het criterium van de experimentele verificatie, of sinds Karl Poppers boek *Die Logik der Forschung* (1935), van de experimentele falsifieerbaarheid. Maar wat te doen wanneer een theorie zich bijna principieel aan een experimentele toetsing onttrekt, zoals bijvoorbeeld het geval is met de snaartheorie? Is op grond van het postulaat van een mathematisch gestructureerd universum de wiskundige zelfconsistentie of niet-tegenstrijdigheid van zo'n theorie voldoende waarborg voor de realiteit ervan?

Einstein en, met name, Dirac bepleitten een esthetisch criterium, namelijk de eenvoud, elegantie en schoonheid van de wiskundige formulering als mede-keurmerk voor het fysisch waarheidsgehalte van de beschrijving. In zijn boek *Experiment and Theory in Physics* (1943) schrijft Max Born daarover: "I have not endeavoured to analyse the idea of beauty or perfection or simplicity of a natural law which have often guided the correct divination. I am convinced that such an analysis would lead to nothing; for these ideas are themselves subject to development. We learn something new from every new case, and I am not inclined to accept final theories about invariable laws of the human mind. My advice to those who wish to learn the art of scientific prophecy is not to rely on abstract reason, but to decipher the secret language of Nature from Nature's documents, the facts of experience." En reeds in de inleiding van zijn eerste hoofdstuk van zijn befaamde *The Feynman Lectures on Physics* (1963) verklaart Richard Feynman: "The principle of science, the definition almost, is the following: The test of all knowledge is experiment. Experiment is the sole judge of scientific truth."

Over de hypothese dat de fysische werkelijkheid volledig isomorf is met een wiskundige structuur bestaat trouwens geen consen-



Roger Penrose

sus. In navolging van de filosoof Immanuel Kant valt volgens de Kopenhaagse School (Bohr, Heisenberg) de werkelijkheid als zodanig niet te kennen, ook niet volgens wiskundig geformuleerde theorieën of experimentele metingen. Wat wij kunnen weten is alleen het verband tussen de werkelijkheid en onze zintuigen en meetapparatuur. "Die Vorstellung von der objektiven Realität der Elementarteilchen", aldus Werner Heisenberg, "hat sich also in einer merkwürdigen Weise verflüchtigt. . . in die durchsichtige Klarheit einer Mathematik, die nicht mehr das Verhalten des Elementarteilchens, sondern unsere Kenntnis dieses Verhalten darstellt. Der Atomphysiker hat sich damit abfinden müssen, dass seine Wissenschaft nur ein Glied ist in der endlosen Kette der Auseinandersetzungen des Menschen mit der Natur, dass sie aber nicht einfach von der Natur an sich sprechen kann."

Hoe het ook zij, laten we ons aansluiten bij Eugene Wigner, die zijn artikel over de effectiviteit van de wiskunde in de natuurkunde met de volgende zin besluit: "We should be grateful for it and hope that it will remain valid in future research and that it will extend, for better or for worse, to our pleasure, even though perhaps also to our bafflement, to wide branches of learning." ←

Deze nieuwe rubriek is geïnspireerd op een soortgelijke rubriek in het *Nederlands Tijdschrift voor Natuurkunde*. Wij danken de redactie van dit tijdschrift voor hun enthousiaste reactie op onze suggestie de rubriek te openen met de hierboven afgedrukte bespreking van Wigners klassieke artikel. Graag wijzen we de geïntereerde lezer ook op een interessant artikel van Robbert Dijkgraaf in het NTvN, 'De onredelijke effectiviteit van de fysica in de moderne wiskunde' (NTvN, 62/11, 1996), dat Wigners artikel in omgekeerd perspectief beziet.