

Mark van Atten

SND

CNRS, Université Paris IV

vanattenmark@gmail.com

Göran Sundholm

Instituut voor Wijsbegeerte

Universiteit Leiden

goran.sundholm@gmail.com

**Evenement** Tachtigste verjaardag Dirk van Dalen

# Intuitionistische logica en het scheppend subject

Op 20 December 2012 bereikte Dirk van Dalen, intuïtionist en biograaf van L.E.J. Brouwer, de leeftijd van tachtig jaar. Om dat te vieren werd op 11 januari 2013 een feestelijke middag georganiseerd in Utrecht. Daarbij sprak Mark van Atten, oud-promovendus van Van Dalen, een rede uit. Dit artikel is de licht aangepaste tekst die hij hiervan samen met Göran Sundholm schreef.

Het eerste deel van deze voordracht gaat over Brouwers reden het principe van de uitsloten derde niet als logische wet te aanvaarden, en is gebaseerd op ons gezamenlijk onderzoek.<sup>1</sup> Het tweede deel gaat over Brouwers notie van de ideale wiskundige, ofwel, zoals hij dat zelf noemde, 'het scheppend subject', en komt voor de mogelijk gepeperde rekening van Van Atten alleen. Beide onderwerpen hebben sinds lang Van Dalens bijzondere belangstelling.

## Intuitionistische logica

Hoewel Brouwer zijn algemene ideeën over logica en het verband tussen logica en wiskunde al in zijn dissertatie uiteengezet had, trok hij de revisionistische conclusies daaruit eerst in zijn artikel 'De onbetrouwbaarheid der logische principes' [7]. Hij schreef dat niet lang na zijn promotie en publiceerde het in het *Tijdschrift voor Wijsbegeerte* in 1908. Brouwer introduceert de vraag naar de betrouwbaarheid van de logica in de zuivere wiskunde, en maakt die vraag aannemelijk door eerst van twee andere gebieden te laten zien dat men daar op de logica niet rekenen kan, namelijk de natuurwetenschappen en de wijsheid. Zijn opvatting van logica daar is die uit zijn dissertatie: logica bestudeert patronen in talige weergaven van wiskundige bouwhandelingen. Het lijkt of Brouwer daarmee de logica haar traditionele context-onafhankelijkheid ontnemt, maar in zekere

zin geeft hij die met de andere hand weer terug door al het exact denken als toegepaste wiskunde te zien.

Voor Brouwer is het criterium voor de correctheid van een conclusie uit bepaalde premissen dat ik de constructie die de conclusie vereist, kan maken als ik vooronderstel dat ik al constructies voor de premissen gevonden heb. De hypothese hier is dus een epistemische: ik neem aan dat de premissen gekend zijn, niet alleen dat ze waar zijn. Brouwer zou zelf zo'n onderscheid overigens niet kunnen maken, omdat er volgens hem geen niet-ervaren waarheden bestaan, en ik bij het vooronderstellen van de waarheid van een propositie dus vanzelf ook vooronderstel dat ik heb ervaren dat die propositie waar is, dat wil zeggen, dat ik er een bewijs voor heb. Dit geeft natuurlijk een belangrijk verschil aan met de notie van hypothese die in de natuurlijke deductie gebruikt wordt. Daar betekent het stellen van een hypothese immers het aannemen dat A waar is, of ik er nu een bewijs van heb of niet. In feite is de Brouweriaanse implicatie dan ook niet die uit Gentzens Natuurlijke Deductie, maar moet zij begrepen worden als een regel waaronder de hele wiskunde gesloten is. Het betekent ook dat de betekenisverklaring van de intuitionistische logica niet gegeven moet worden in termen van bewijscondities, maar van assertiecondities (wat Heyting in zijn boek uit 1956 ook inderdaad doet [37, hoofdstuk 7]). Deze sugges-

tie hebben Sundholm en ik eens uitgewerkt aan de hand van Brouwers Barrièrestelling, en ik zal er hier niet verder op ingaan [49].

In zijn artikel beschrijft Brouwer het probleem van de logica in de natuurwetenschappen als het traditionele probleem van inductie. Er is geen zekerheid dat een wiskundig model dat een aantal gedane waarnemingen verklaart vervolgens ook correcte voorspellingen zal maken. Maar de rol van de logica is om uit uitspraken in het wiskundig model andere uitspraken in dat model af te leiden. Het kan dus makkelijk gebeuren dat uit premissen die met waarnemingen overeenkomen langs logische weg conclusies worden getrokken die dat niet doen. En dus is de logica daar onbetrouwbaar.

In wijsheid is de logica onbetrouwbaar om een andere reden. In Brouwers opvatting vooronderstelt de logica immers de aanwezigheid van wiskundige constructies, maar in de wijsheid zijn die er volgens hem niet. Wiskunde accepteert tijdbewustzijn, en heeft die nodig voor haar opbouw. Wijsheid verwerpt tijdbewustzijn, omdat dat het onderscheid tussen subject en object teweegbrengt, en zo het bewustzijn uit zijn 'diepste tehuis' houdt, waar dat onderscheid niet bestaat.<sup>2</sup> Om logica op wijsheid toe te kunnen passen, zou je er dus een wiskundige structuur aan moeten opdringen die het van huis uit niet heeft. Dat kan de inhoud ervan alleen maar verwringen, en er is geen reden aan te nemen dat logische conclusies uit verwrongen inhouden zelf wel inhoudelijk accuraat zijn.

Wiskunde nu verschilt van de natuurwetenschappen alleen al hierdoor, dat ze van alle waarnemingsinhoud abstraheert; en wiskunde verschilt van wijsheid omdat, wanneer



Dirk van Dalen

er aan wiskunde logica te pas komt, die toegepast wordt op iets dat zelf wiskundige structuur heeft. De vraag is dan of logica in de wiskunde *wel* betrouwbaar is, en Brouwers conclusie is van niet. Hij beredeneert dat op constructieve wijze, dat wil zeggen door een voorbeeld te geven van een logisch principe dat in de wiskunde onbetrouwbaar is, het principe van de uitgesloten derde. De abstracte mogelijkheid van onbetrouwbare principes had Brouwer echter al in zijn dissertatie gezien [6, pp. 132–133 en Stelling XX]. Het argument daar was dat de betrouwbaarheid van logisch

redeneren afhankelijk is van de wiskundige context waarin het wordt toegepast: het is immers de context die bepaalt of een logische redenering inderdaad een soort tegoedbon is die kan worden ingewisseld voor een wiskundige constructie. Brouwer verwierp daar bijvoorbeeld pogingen met behulp van logica iets te weten te komen over niet-constructieve objecten, die voor hem immers geen werkelijk wiskundige structuur hebben. In dat geval ligt de fout zagezegd aan de kant van het object; Brouwer maakte nog geen bezwaar dat ligt aan de kant van de logica. Maar dat komt al-

leen omdat hij toen de uitgesloten derde nog verkeerd begreep, als “niet- $A$  impliceert niet- $A$ ” [6, p. 131]. Dirk van Dalen heeft laten zien hoe deze foutieve lezing teruggaat op Brouwers leraar logica, Bellaar Spruyt.<sup>3</sup> Een jaar later leest Brouwer het principe correct als “ $A$  is bewijsbaar, of niet- $A$  is bewijsbaar” [21, pp. 3–4]. Het artikel over de onbetrouwbaarheid is dus in twee opzichten een stap vooruit vergeleken bij de dissertatie: Brouwer corrigeert zijn lezing van de uitgesloten derde, en daarmee is hij dan in staat te laten zien dat ook in de wiskunde zelf een traditioneel logisch principe onbetrouwbaar is.

Brouwers redenering is eenvoudig: sommige traditionele principes behouden construeerbaarheid, maar uitgesloten derde doet dat niet. Zolang ik alleen die eerste principes blijf gebruiken, kan ik mijn wiskundige constructies verlaten, zuiver logisch verder redeneren, en toch zeker zijn dat de conclusie waar ik op uitkom weer door wiskundige constructies kan worden gewettigd. Maar als ik onderweg de uitgesloten derde gebruik, dan verlies ik in het algemeen die zekerheid, omdat ik nu eenmaal niet zeker weet dat ik een willekeurige propositie hetzij bewijzen, hetzij weerleggen kan.

Brouwer was niet de eerste die kritiek of twijfel uitte over het nut of zelfs de geldigheid van de uitgesloten derde in de wiskunde. Reeds Kronecker betwistte het gebruik van dit principe en van de daarmee verwante definities op grond van onbesliste gevalsonderscheidingen [44, p. 11n]. Zijn promovendus Jules Molk<sup>4</sup> schreef in 1885 in zijn dissertatie:

“Les définitions devront être algébriques et non pas logiques seulement. Il ne suffit pas de dire: ‘Une chose est ou elle n’est pas’. Il faut montrer ce que veut dire être et ne pas être, dans le domaine particulier dans lequel nous nous mouvons. Alors seulement nous faisons un pas en avant.” [45, p. 8]

Overigens citeert ook Van Dalen dat “Il ne suffit pas de dire: ‘Une chose est ou elle n’est pas’”, in zijn boek *Filosofische Grondlagen van de Wiskunde* waar het een van de motto’s is bij het hoofdstuk over het intuitionisme [18, p. 19].<sup>5</sup> Dat boek was, toen ik het op de middelbare school las, mijn eerste kennismaking met Van Dalen. Jules Molk kwam jaren na zijn promotie nog eens uitgebreid op de zaak terug. De gelegenheid dat te doen bestond in de uitgave van een Franse versie van de onder redactie van Felix Klein uitgegeven *Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen* [42]. Molk vertaalde en bewerkte daarvoor artikelen van Pringsheim over elementaire analyse. In een

toegift beschrijft Molk als volgt het ‘Point de vue de L. Kronecker’:

“L’Analyse doit, d’autre part, se garder de considérations générales d’ordre logique étrangères à son objet. Les définitions ne doivent introduire en Analyse que des notions auxiliaires facilitant l’étude des divers groupes naturels que l’on forme pour étudier les propriétés des nombres. Ces notions auxiliaires doivent avoir un caractère arithmétique et non logique seulement, en sorte qu’elles ne sauraient porter que sur des groupes dont chaque élément puisse être effectivement obtenu au moyen d’un nombre fini d’opérations, et non sur des groupes simplement déterminés par une convention logique non-contradictoire.

De même l’évidence logique d’un raisonnement ne suffit pas pour légitimer l’emploi de ce raisonnement en Analyse. Pour avoir donné une démonstration mathématique d’une proposition, il ne suffit pas, par exemple d’avoir établi que la proposition contraire implique contradiction. Il faut donner un procédé permettant d’obtenir, au moyen d’un nombre fini d’opérations arithmétiques au sens ancien du mot, effectuées sur les éléments que l’on envisage, le résultat qu’énonce la proposition à démontrer. C’est ce procédé qui constitue l’essence de la démonstration; il ne vient pas s’y ajouter. [...]

Le principe de l’économie dans la science, économie de temps, économie d’efforts, nous amène en Analyse les nombres rationnels absolus et relatifs: cette introduction est légitime, puis qu’elle n’a pour effet que d’abrèger les déductions sans en changer le caractère. À toute proposition concernant les nombres rationnels, exprimée par une égalité par exemple, correspond une congruence prise suivant un module ou un système de modules toujours faciles à déterminer. [...]

Le caractère des démonstrations est, au contraire, complètement changé par l’introduction de nombres irrationnels quelconques. On ne peut d’ailleurs donner de ces nombres qu’une définition logique, les déterminant, mais ne les définissant pas mathématiquement. C’est cette définition logique (mais non mathématique) qui confère aux ensembles (infinis) de nombres rationnels, que l’on dit définir des nombres irrationnels quelconques, le caractère d’une suite organique. Ces nombres ne peuvent donc, suivant L. Kronecker, figurer à aucun titre dans la démonstration définitive d’une proposition d’Analyse.” [46, pp. 159–160]

Ik citeer dit zo uitvoerig omdat parallellen met Brouwers artikel uit 1908 zo duidelijk en

tot in de details aanwezig zijn: het verwerpen van indirecte existentiebewijzen; het verbod zich te beperken tot blind, louter symbolisch redeneren; en de uitdrukkelijke scheiding van bewezen en niet-contradictoire proposities. Nu verscheen deze *Encyclopédie* in afleveringen en werd het fascicule met Molks toegift gepubliceerd in 1904. Navorsingen door Sundholm hebben uitgewezen dat er toentertijd één bibliotheek in Nederland was die de opeenvolgende fascicules kocht: de universiteitsbibliotheek te Amsterdam. Deze passages van Molk staan op de allerlaatste bladzijden van fascicule 1, en fascicule 2 verscheen in mei 1907, een paar maanden na Brouwers promotie in februari. Stel je voor, heeft Sundholm me na zijn speurwerk gezegd, dat iemand toen die nieuwe aflevering opzocht, en de blik liet vallen op die laatste bladzijden van aflevering 1... Maar voordat we Brouwer nu gaan verdenken van plagiaat, moeten we ook vaststellen dat noch in de aantekenschriftjes waarin de studieuze Brouwer zijn dissertatie voorbereidde,<sup>6</sup> noch in die dissertatie zelf, noch in zijn omvangrijke correspondentie enige verwijzing staat naar het artikel van Pringsheim en Molk, of naar enig ander artikel uit de Duitse dan wel Franse versie van deze encyclopedie, of naar enig ander geschrift van Molk. Maar ik kan natuurlijk niet verhinderen dat deze overweging naar twee kanten uitgelegd kan worden.

Parallellen met Brouwers artikel zijn ook te vinden in een latere tekst, van weer iemand anders, Edmund Husserl.<sup>7</sup> Ik denk aan diens opstel ‘Vom Ursprung der Geometrie uit 1936.’<sup>8</sup> Met de meetkunde als voorbeeld bespreekt Husserl daar de merkwaardige omstandigheid dat taal, schriftelijke overlevering, aan de ene kant een voorwaarde is voor het bestaan van een wetenschap als een gedeelde traditie van voortschrijdende inzichten, maar aan de andere kant die traditie voortdurend van binnenuit bedreigt. Bedreigt, omdat een verstaander een mededeling niet alleen op een actieve manier kan begrijpen, door die zelf te doordenken en zo het medegedeelde inzicht zelf te reproduceren, maar ook op een passieve manier, waarbij de mededeling aangenomen wordt zonder te proberen de oorspronkelijke evidentie ervoor zelf te herhalen. (Natuurlijk zijn dit de twee extremen en is iemands begrip van een gegeven mededeling in werkelijkheid meestal deels actief, deels passief.) Het passieve begrip nu kan besmet worden door allerlei associaties, waardoor betekenselementen worden toegevoegd die niet voortgekomen zijn

uit de oorspronkelijke context van de mededeling. Zo kan er een talige constructie ontstaan die we tot de wetenschap in kwestie rekenen en schriftelijk aan de traditie toevoegen, zonder dat we op dat moment *zekerheid* hebben dat ook zij een gedachte uitdrukt die in authentiek denken evident gemaakt kan worden. Als we ons daar niet van bewust zijn, en niets doen om die nieuwe uitspraak te controleren, dan zijn we slachtoffer geworden van de ‘Verführung der Sprache’ [39, p. 372].

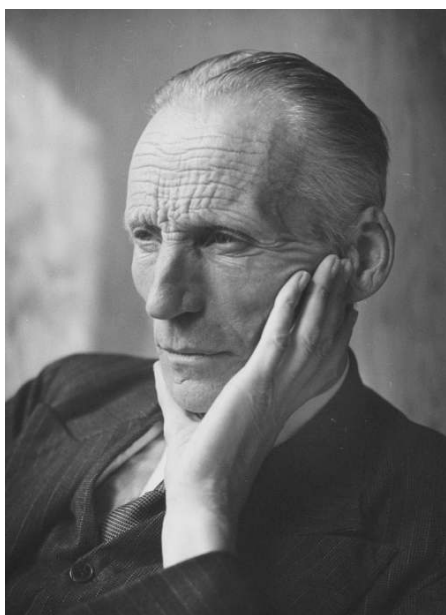
Husserls betoog is omvattender en genuanceerder dan ik het nu kan weergeven, maar het is duidelijk dat zijn argument hier analoog is aan dat van Brouwer over de logica. Weliswaar richt Husserl zich op de feilbaarheid van passief begrepen taal, en niet zoals Brouwer op de feilbaarheid van tijdelijk niet geïnterpreteerde en in die zin geheel niet begrepen taal, maar in beide gevallen is het relevante contrast dat met taal die een authentieke en evidente gedachte uitdrukt. Ik vermoed dat Husserl deze tekst van Brouwer nooit gekend heeft — een andere trouwens aantoonbaar wel, een die niet onbelangrijk is in dit verband, namelijk de ‘Intuitionistische Betrachtungen über den Formalismus’ uit 1928 [10], waarin Brouwer zijn eerdere artikel en de conclusie daarvan uitdrukkelijk noemt.<sup>9</sup>

De remedie die Husserl voorstelt is de innerlijke ontwikkeling van een wetenschap te reconstrueren en na te gaan waar de taal ontspoorde door het contact met de authentieke en evidente gedachte te verliezen. Het is duidelijk dat Brouwer van begin af aan, toen hij van Husserl nog niet wist, zijn eigen project zo gezien heeft.

In de twintigste-eeuwse wijsbegeerte en cultuurkritiek heeft die tekst van Husserl over de oorsprong van de meetkunde een belangrijke rol gespeeld. Voor de geschiedschrijving is het daarom vermeldenswaard dat een eerste aanzet ertoe, daterend rond 1922 en getiteld ‘Kritik der Geometrie als positiver Wissenschaft’, geschreven is op de achterkant van enkele bladzijden van het Habilitationschrift van Oskar Becker<sup>10</sup> uit datzelfde jaar, en daar kennelijk door geïnspireerd was.<sup>11</sup> Dat Habilitationsschrift heette ‘Beiträge zur phänomenologischen Begründung der Geometrie und ihrer physikalischen Anwendung’, gepubliceerd als [2], en was uitdrukkelijk gemotiveerd door het in de grond fenomenologische karakter van Brouwers theorie van het continuüm, die toen net nieuw was. Van een misschien niet beslissende, maar toch duidelijke invloed van het intuitionistische denken op de ontwikkeling van de fenomenologie kan hier daarom denk ik wel gesproken worden,

een invloed die trouwens voorafging aan de bekendere maar volgens mij ook beperktere in de andere richting, die tot uitdrukking komt in Heytings uitleg van de intuitionistische logica in zijn voordracht te Königsberg in 1930 (gepubliceerd als [36]). Heyting verklaart daar dat een wiskundige uitspraak een verwachting uitdrukt, namelijk de verwachting dat er een bepaald bewijs bestaat, en hij zegt ook, onder verwijzing naar Becker [3], dat je dat nog beter kunt verwoorden in fenomenologisch vocabulaire: een uitspraak drukt een intentie uit, die in het vinden van een bewijs vervuld wordt. Maar in later werk geeft Heyting hier geen vervolg aan, en het is uiteindelijk niet meer dan een momentane terminologische precisering geweest.

Ik keer terug naar Brouwers artikel uit 1908. Veel directe invloed lijkt het niet gehad te hebben, behalve natuurlijk op Heyting. Een interessante uitzondering is Griss.<sup>12</sup> De keuze uit Brouwers correspondentie die Van Dalen onlangs gepubliceerd heeft, bevat een brief van Griss aan Brouwer uit 1941 [22, pp. 2142–2146]. Het is daar dat Griss, in directe aansluiting op uitspraken in Brouwers artikel, zijn negatielose wiskunde en de filosofische motivatie daartoe aan Brouwer bekend maakt. Griss publiceerde over dit onderwerp vanaf 1944 [32], en Brouwer reageerde daarop in 1948 met zijn ‘Essentieel negatieve eigenschappen’ [13]. Helaas liet hij het daarin bij een wiskundige constructie waarin de negatie onontbeerlijk is, op zichzelf natuurlijk al spectaculair genoeg,<sup>13</sup> maar zonder daarnaast aan te geven hoe zijn filosofisch begrip van de negatie afwijkt van dat van Griss.



L.E.J. Brouwer

### Het scheppend subject

Ik kom nu tot mijn tweede thema.<sup>14</sup> In die correspondentie van Brouwer is ook opgenomen de brief uit 1928 waarin hij Heyting bedankt voor het toesturen van diens gedeeltelijke formalisering van de intuitionistische wiskunde [22, pp. 1521–1522]. Hij moedigt Heyting aan het stuk te publiceren en daartoe nog wat uit te breiden. Brouwer suggereert het begrip ‘Gesetz’ te formaliseren. Het bedoelde begrip is dat van de spreidingswet; het begrip wet als in wetmatige keuzerij is daar een speciaal geval van. Heyting [35] doet dat niet, en formaliseert alleen de voorwaarden waaraan een species van eindige rijtjes moet voldoen om door een wet gegeven te kunnen zijn. In 1962 schrijft Heyting dat een van Brouwers motiveringen om keuzerijen in te voeren juist was dat het begrip ‘wet’ volledig onhandelbaar is, en dat als de notie van recursieve functie toen al had bestaan, Brouwer wel eens besloten zou kunnen hebben zich daar dan maar toe te beperken [38, p. 195]; en je kunt vermoeden dat Heyting het hier behalve over Brouwer ook over zijn vroegere ik heeft. Helemaal overtuigend vind ik Heytings suggestie niet, want Brouwer had ook de algemenere motivatie dat als een reëel getal gegeven moet worden door een wet of een definitie of een formeel bewijs, allemaal dingen die wat hun verdere aard ook moge zijn in ieder geval talige objecten zijn, dat er nooit meer dan een aftelbare hoeveelheid van oplevert [11, p. 3], en dat bezwaar zou ook gegolden hebben voor recursieve functiedefinities. Natuurlijk is het dan de vraag of het soms beter kan. Brouwer dacht van wel, maar vandaag de dag zijn onder de constructivisten zij die, liever dan keuzerijen te moeten accepteren, Brouwers kritiek maar onbeantwoord laten en met technische trucs de schijn op proberen te houden veruit in de meerderheid, wat overigens niet wil zeggen dat zij ook gelijk hebben. Brouwer was natuurlijk een beetje de man uit het gedicht ‘The Road not Taken’ van Robert Frost:

*Two roads diverged in a wood, and I —  
I took the one less traveled by  
And that has made all the difference.*

De ontwikkeling van de recursietheorie zou natuurlijk pas jaren na Brouwers invoering van de keuzerijen beginnen. Maar in haar recente boek *Logic and Philosophy of Mathematics in the Early Husserl* benadrukt Stefania Centrone terecht het nu en toentertijd weinig bekende feit dat Husserl misschien wel de eerste was die de vraag stelde naar een algemene theorie van alle mogelijke rekenkundige functies en hun reductie tot een klein aantal normaalvormen [16, pp. 54–61, 98]. Dit in

zijn *Philosophie der Arithmetik* uit 1891 [40, hoofdstuk 13].

Husserl introduceert en bespreekt daar een bepaalde klasse van functies en met goede wil is er wel wat te zeggen voor de opmerking van Ettore Casari, door Centrone verder uitgewerkt, dat die klasse extensioneel heel dicht bij de partieel recursieve functies komt. Maar het is ook zo dat Husserl geen enkele aanzet of bijdrage heeft geleverd tot het oplossen van het grotere vraagstuk dat erin bestaat aannemelijk te maken dat een bepaalde klasse van functies precies *alle* berekenbare functies bevat. Interessanterwijs kun je Turings argument uit 1936 voor diens bewering dat berekenbaarheid samenvalt met partiële recursiviteit [52] met recht een exercitie van fenomenologische aard noemen. Het is een reflectie op de handelingen die een geïdealiseerd rekenend mens kan uitvoeren, en op hoe die handelingen afhankelijk zijn van eigenschappen van diens geest en waarneming. Het was dat argument, van een type dat in de discussie over berekenbaarheid in de jaren dertig nog niet eerder was gebruikt, dat Gödel over de streep trok om de berekenbare functies te identificeren met de partieel recursieve; twee jaar daarvoor had hij Church, die tot dezelfde conclusie was gekomen, nog niet willen geloven [29, p. 348n.3 en pp. 369–71]. Let wel, de berekenbaarheid waar het hier om ging is mechanische berekenbaarheid. Gaandeweg raakte Gödel ervan overtuigd dat er functies zouden kunnen zijn die de menselijke geest wel kan berekenen maar niet langs mechanische weg; met andere woorden, dat er misschien functies bestaan die wel effectief zijn maar niet recursief.

Het is in dit verband instructief te zien hoe Gödel de voetnoot over Turing in zijn *Dialectica*-artikel uit 1958 wijzigt in de versie van 1972. Eerst schreef Gödel:

“A.M. Turing hat bekanntlich mit Hilfe des Begriffs einer Rechenmaschine eine Definition des Begriffs einer berechenbaren Funktion erster Stufe gegeben. Aber wenn dieser Begriff nicht schon vorher verständlich gewesen wäre, hätte die Frage, ob die Turingsche Definition adäquat ist, keinen Sinn.” [25, p. 283]

In 1972 wordt dat:

“It is well known that A.M. Turing has given an elaborate definition of the concept of a *mechanically* computable function of natural numbers. This definition most certainly was not superfluous. However, if the term ‘mechanically computable’ had not had a clear, although unanalyzed, meaning before, the question as to whether Turing’s definition is adequate would be meaning-

less, while it undoubtedly has an affirmative answer.” [27, p. 275n.5]

Het verschil is dat Gödel nu de mechanische aard van Turings notie benoemt en benadrukt. Voor zijn eigen notie van ‘computable functional’ eist hij alleen dat de berekenbaarheid ‘constructief evident’ moet zijn. Het had voor de hand gelegen om dan in een moeite door ook de vraag naar constructief evidente maar niet-mechanische berekenbaarheid te stellen. Dat doet Gödel hier weliswaar niet, maar in een ander klad voor de herziening van *Dialectica* wel:

“It must be admitted that the construction of a well-defined procedure which could actually be carried out (and would yield a non-recursive number-theoretic function) would require a substantial advance in our understanding of the basic concepts of mathematics.” [28, p. 306]

Welnu, zegt de intuitionist, die ‘substantial advance’ hebben wij al gemaakt. Er is in de intuitionistische literatuur minstens drie keer een voorbeeld van een effectieve maar niet-recuratieve functie gegeven, door Van Dalen [18, p. 40n.3], door Wim Gielen (gepubliceerd in [50, p. 35]), en door Albert Drăgalin [24, pp. 134–135]. Ze komen alle drie op hetzelfde neer, en gaan terug op een constructie ontsproten aan het brein van de Amerikaanse filosoof Saul Kripke, die deze zelf niet gepubliceerd heeft.

De presentatie van Van Dalen is de meest elegante, omdat die het eenvoudigst is en het dichtst op het scheppend subject zit. Hij gebruikt Kreisel’s zogeheten theory of the creating subject, dat wil zeggen de volgende drie schema’s, waar  $\Box_n p$  staat voor ‘Het scheppend subject heeft op tijdstip  $n$  een bewijs voor propositie  $p$ ’:

$$(CS1) \quad p \leftrightarrow \exists n \Box_n p,$$

een propositie  $p$  is waar dan en slechts dan als het scheppend subject het op een gegeven moment bewijst.

$$(CS2) \quad \forall n \forall m (\Box_n p \rightarrow \Box_{n+m} p),$$

het scheppend subject vergeet nooit wat het bewezen heeft.

$$(CS3) \quad \forall n (\Box_n p \vee \neg \Box_n p),$$

op ieder moment kan het scheppend subject uitmaken of het  $p$  al bewezen heeft of niet.

Merk overigens op dat, naar aanleiding van wat ik aan het begin al even zei, het hier beter zou zijn schematische regels in plaats

van axiomaschema’s te geven. Dat maakt ook een verschil voor hun rechtvaardiging: CS1 is als de logische implicatie van links naar rechts die het suggereert nauwelijks te rechtvaardigen, want waarom zou uit een bewijs van  $p$ , of het subject dat nu kent of niet, met louter logica een moment  $n$  te extraheren zijn waarop het subject  $p$  bewijst? Maar van de corresponderende regel is de correctheid makkelijk in te zien. Immers, als ik per hypothese een bewijs van  $p$  heb, dan heb ik dat natuurlijk op een bepaald moment verkregen. Ik laat dit punt hier en in de rest van dit artikel terzijde.

Sommige constructivisten willen CS niet accepteren wegens de expliciete verwijzingen naar de tijd, die zij onwiskundig of op zijn best heel exotisch vinden, maar zij accepteren weer wel Kripkes Schema:

$$(KS) \quad \exists \alpha (\exists n \alpha(n) = 1 \rightarrow p).$$

KS is afleidbaar uit CS en alle bekende argumenten die CS gebruiken kunnen ook met KS gegeven worden. In het gebruik is KS vandaag de dag populairder dan CS. Maar vanuit Brouweriaans standpunt, waar de tijdparameter in alle wiskunde en haar ontwikkeling ingebakken is, worden CS en KS op gelijke gronden gerechtvaardigd. Het argument voor KS verloopt dan als volgt (en je zou je kunnen afvragen hoe een niet-intuitionistische constructivist het dan anders zou kunnen doen): de wiskundige activiteit van het scheppend subject vindt plaats in de tijd, beginnend bij de eerste oerintuïtie, en dan stap voor stap verder. Voor een gegeven propositie  $p$  kan het subject dan besluiten om elke zoveel tijdseenheden even te kijken of hij op een van de voorgaande stappen een bewijs van  $p$  verkregen heeft, en de resultaten van deze waarnemingen bijhouden in een keuzerij.

Hoewel dit argument laat zien dat KS intuitionistisch volslagen natuurlijk is, heeft Georg Kreisel toch eens het bezwaar aangevoerd dat juist van Brouwers standpunt deze rechtvaardiging iets arbitrairs heeft, omdat erin verondersteld wordt dat wiskundige evidenties zich aan ons voordoen in een  $\omega$ -reeks, maar Brouwer tegelijk mentale wiskundige bewijzen van transfinitie lengte toelaat [43, p. 128]. Daarom ook vermoedde Kreisel bij die gelegenheid dat argumenten dat KS inconsistent is met de Church–Turingthese tekortschieten om die these helemaal te weerleggen. Denkkelijk had hij hier de mogelijkheid voor ogen dat de recursiviteit van een bepaalde rij wel eens alleen in een mentaal

bewijs van transfinitie lengte aangetoond zou kunnen worden. Maar ik zie hier noch het arbitraire noch het tekortschietende: immers, de transfinitie boomstructuur die ten grondslag ligt aan een mentaal bewijs van transfinitie lengte is een potentieel oneindige structuur die we, volgens Brouwers theorie van transfinitie welordeningen, in een  $\omega$ -reeks van stappen construeren, en niet in een lange re [8, p. 22]. Dat betekent ook dat als we informatie uit zo’n transfinitie bewijs willen gebruiken, we die daar in een  $\omega$ -reeks van stappen uithalen, want de enige toegang die we tot zo’n bewijs hebben is via zijn constructie. Natuurlijk heeft Kreisel gelijk als hij vervolgt dat inconsistentie van KS met de Church–Turingthese de vraag openlaat of constructieregels die niet naar een ordening van onze wiskundige bewijzen verwijzen dan wel allemaal recursief zijn. Daar heb ik vandaag niets over te zeggen.

John Myhill heeft gezien dat Kripkes Schema al door Brouwer zelf geformuleerd is, althans, een instantiatie ervan [48, p. 295], [15, p. 4]. Sommigen zien in dat verschil voldoende grond om te betwijfelen dat Brouwer het algemene schema accepteert, maar er is geloof ik geen argument te bedenken dat wel Brouwers instantiatie rechtvaardigt maar niet de algemene versie. Dit omdat de aard en opbouw van de propositie in kwestie eigenlijk geen rol spelen in het schema zelf. Terecht stellen anderen, waaronder Van Dalen, dan ook voor om voortaan te spreken over ‘het Brouwer–Kripke-Schema’, niet KS maar BKS.

In combinatie met andere principes heeft BKS gevolgen voor de logica. Uit BKS en het continuïteitsprincipe voor keuzerijtes<sup>15</sup> bijvoorbeeld volgt dat Markov’s Principe

$$(MP) \quad \forall \alpha (\neg \neg \exists x \alpha(x) = 1 \rightarrow \exists x \alpha(x) = 1)$$

tot een tegenspraak leidt [24, p. 134]. Een ander bekend effect is dat BKS en MP samen het principe van de uitgesloten derde geven, wat voor Brouwerianen natuurlijk als nog een weerlegging van MP geldt [51, p. 237].

Dat BKS ook concrete wiskundige gevolgen heeft, even afgezien van de niet-recuratieve functie die we zo zullen zien, is aangetoond door Van Dalen in papers uit 1975 en 1997. Het eerste, ‘The use of Kripke’s schema as a reduction principle’ [17], laat zien hoe je met BKS een intuitionistische versie van de machtsverzameling van de natuurlijke getallen kunt maken. Het tweede artikel, ‘How connected is the intuitionistic continuum?’ [19], bouwt voort op Brouwers resultaat dat het continuüm niet gesplitst kan wor-

den [9, p. 66n.10], dat wil zeggen dat als  $\mathbb{R}$  de vereniging van twee disjuncte verzamelingen  $A$  en  $B$  is, dan is één van die twee  $\mathbb{R}$  zelf en de andere dus leeg. Met een beroep op BKS laat Van Dalen zien dat ook het continuüm waaraan het punt 0 onttrokken is, onsplitsbaar blijft, en dat je met het continuïteitsprincipe voor keuzerijtjes en barinductie er ook nog bij kunt bewijzen dat het continuüm waaraan *alle* rationale getallen zijn onttrokken, nog steeds onsplitsbaar is. Later heeft Van Dalen dat nog versterkt: iedere negatieve, dichte deelverzameling van  $\mathbb{R}$  is onsplitsbaar [20].

Nu dan Kripkes functie zoals gegeven door Van Dalen. Neem voor  $K$  een willekeurige recursief opsombare, maar niet recursieve verzameling.<sup>16</sup> Definieer

$$f(n, m) = \begin{cases} 0 & \text{als } \Box_m n \notin K, \\ 1 & \text{als niet } \Box_m n \notin K, \end{cases} \quad (1)$$

Dan geldt:

$$n \notin K \leftrightarrow \exists m f(n, m) = 0. \quad (2)$$

Het argument hiervoor is als volgt. Van rechts naar links: Neem aan dat  $\exists m f(n, m) = 0$  voor een gegeven  $n$ . Uit de definitie van  $f$  volgt dan dat er een  $m$  geconstrueerd kan worden zó dat  $\Box_m n \notin K$ . Wat het scheppend subject bewijst is correct, dus  $n \notin K$ .


Van links naar rechts: Neem aan dat  $n \notin K$ . Op grond van CS1 betekent dit dat het

subject dit op een bepaald moment  $m$  bewezen heeft. Door terug te kijken op zijn activiteit kan het subject die  $m$  construeren; en dat levert de getuige op voor de kwantor rechts.

Voor het scheppend subject is  $f$  een effectieve functie, omdat het voor elk gegeven moment  $m$  (in verleden of toekomst) en voor elke  $n$  op grond van CS3 kan bepalen of  $f \Box_m n \notin K$ . Stel nu dat  $f(n, m)$  recursief is; dan is de projectie  $\{n | \exists m f(n, m) = 0\}$  recursief opsombaar. Maar die verzameling is het complement van  $K$ , en dus is  $K$  recursief. Tegenspraak.

In zijn boek *Foundations of Constructive Mathematics* geeft Michael Beeson een overweging die, hoewel hij voorbeelden als deze functie niet bespreekt, er wel een kritiek op impliceert [4, p. 56]. Hij stelt dat de vraag of het scheppend subject een specifieke niet-recursieve keuzerij kan genereren louter speculatief moet blijven, omdat wij niet in staat zijn een niet-recursieve rij te laten zien die gegenereerd is door een geïdealiseerde wiskundige die doorwerkt tot in de eeuwigheid. Dit lijkt me een *non sequitur*. Het achterliggende idee van Beesons argument is blijkbaar dat wij gewone stervelingen alleen dat kunnen laten zien wat volledig gespecificeerd kan worden middels een eindige hoeveelheid informatie; voor rijtjes betekent dat dat die ofwel eindig moeten zijn, ofwel oneindig maar gegeven middels een wet, die in tegenstelling tot die rij zelf een eindig object is, en dus voor ons te bevatten. Maar wat dan

nog? Het gegeven voorbeeld van een niet-recursieve functie laat zien dat het scheppend subject die berekenen kan, en dat is alles wat gevraagd werd.

Iemand zou hierop weer kunnen antwoorden dat intuïtionisten beweren de wiskunde te zien als een scheppen in de menselijke geest; maar als die niet-recursieve rij alleen door een sterk geïdealiseerde wiskundige gezien kan worden, wat zegt dat dan nog over ons? Toch wel iets belangrijks, denk ik. Want de idealisering waarmee we het scheppend subject definiëren meten ons weliswaar onbepaalde tijd en onbepert geheugen toe, maar geen *soorten* handelingen die een echt mens niet nu ook al uit kan voeren, zij het in het klein. (Merk hier op dat ik in het bijzonder Van Dalens functievoorschrift erbij kan nemen en functiewaarden kan gaan berekenen; en ook al zal ik tijdens mijn leven slechts een eindig aantal waarden daarvan berekenen, men zal pas als de Heere mij weggehaapt heeft kunnen zeggen *welk* eindig rijtje dat is, en niet van tevoren.) Als we daarentegen op dezelfde manier een echte computer idealiseren, berekent die nog steeds alleen recursieve functies. Als je Chomsky's onderscheid tussen 'performance' en 'competence' gebruikt, kun je concluderen dat de correcte performance van een rekenend mens niet boven die van een echte computer uitstijgt, maar de competence wel. Hoewel het extensioneel voor echte mensen dus geen verschil maakt, moet onze geest dan toch echt anders in elkaar zitten dan een computer. 

## Noten

- Onderzoek gedaan bij het maken van onze nieuwe Engelse vertaling van Brouwers artikel 'De onbetrouwbaarheid der logische principes' [7], te verschijnen, met onze inleiding, in *History and Philosophy of Logic*. Een Franse versie daarvan wordt gepubliceerd in de *Revue d'histoire des sciences*.
- Zie voor dit punt ook Brouwers latere artikelen [12] en [14]. Beide — het tweede in de vorm van het eerste, Nederlandstalige manuscript — zijn opgenomen in de recente Epsilon-uitgave [23].
- Cornelius Bellaar Spruyt (1842–1901) promoveerde in 1867 bij Buys Ballot op *Over de electromotorische kracht van het element van Daniël bij verschillende temperaturen* en werd in 1877 hoogleraar te Amsterdam met als leeropdracht 'Geschiedenis van de wijsbegeerte, de logica, de metaphysica en de zielkunde'. Wat hij Brouwer over logica onderwezen heeft kan nagelezen worden in [5].
- Jules Molk (1857–1914), Frans wiskundige. Hoofdwerk: *Éléments de la théorie des fonctions elliptiques* [47].
- De andere twee zijn "Die Zeit macht die Arithmetik möglich" (A. Schopenhauer) en "I study mathematics as a product of the human mind and not as absolute" (E. Post).
- Deze schriftjes zijn bewaard in het Brouwer-archief te Utrecht.
- Edmund Husserl (1859–1938), Duits filosoof, grondlegger van de fenomenologie. Overigens was de latere Gödel hevig geïnteresseerd in de fenomenologie en haar toepassing in de grondslagen van de wiskunde [26].
- Posthuum gepubliceerd; eerst in iets gewijzigde vorm in 1939, later ongewijzigd in [39, pp. 365–386].
- Een kaart in een oude catalogus van Husserls eigen bibliotheek, beide nu in het Husserl-
- archieft Leuven, laat zien dat hij van dit artikel een overdruk bezat. Helaas is die overdruk zelf daar niet meer aanwezig.
- Oskar Joachim Becker (1889–1964), Duits wiskundige, filosoof, en wetenschapshistoricus. Promotie bij Hölder en Rohn in 1910 op het proefschrift *Über die Zerlegung eines Polygons in exklusive Dreiecke auf Grund der ebenen Axiome der Verknüpfung und Anordnung*; Habilitation bij Husserl in 1923, daarna hoogleraar in de wijsbegeerte in Bonn tot 1955.
- Husserls tekst is gepubliceerd in [41, pp. 380–383]. Zie ook de aantekening van de tekstbezorger daarover op p. 692.
- George François Cornelis Griss (1898–1953), Nederlands wiskundige en filosoof. Promotie bij Weitzenböck in 1925 op *Differentialinvarianten von Systemen von Vektoren*.
- Dat wil zeggen als Brouwers argument de reik-

wijdde zou hebben die hij eraan toekent. Maar hij laat alleen zien dat je de eigenschap niet op de meest voor de hand liggende manier positief kan maken. Hij geeft geen argument dat het ook niet equivalent kan zijn aan een *andere* positieve eigenschap. Iets overhaast is Brouwer hier dus wel. Dank aan Wim Veldman, die dit in conversatie na deze voordracht benadrukte.

14 Vanaf hier valt de tekst onder de verantwoor-

delijkheid van Van Atten alleen.

15 Een veelgebruikte vorm van dit principe luidt  $\forall \alpha \exists x A(\alpha, x) \rightarrow \forall \alpha \exists m \exists x \forall \beta (\beta m = \alpha m \rightarrow A(\beta, x))$ , waar  $\alpha$  en  $\beta$  variabelen zijn voor keuzerijen van natuurlijke getallen,  $m$  en  $x$  voor natuurlijke getallen, en  $\alpha m$  staat voor  $\langle \alpha(0), \alpha(1), \dots, \alpha(m-1) \rangle$ , dat wil zeggen het initieel segment van  $\alpha$  van lengte  $m$ . Brouwer gebruikte dit principe samen met zijn Bar-

riërestelling om te bewijzen dat alle totale functies  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continu zijn [9]. Zie [1] voor een discussie van rechtvaardigingen van het continuïteitsprincipe en een voorstel daartoe.

16 Bijvoorbeeld het complement van de Cantor-verzameling. Metamathematisch voorbeeld: De verzameling Gödelgetallen van de proposities die in PA formeel bewijsbaar zijn.

## Referenties

- 1 M. van Atten en D. van Dalen, Arguments for the continuity principle, *Bulletin of Symbolic Logic* 8 (2002), 329–347.
- 2 O. Becker, Beiträge zur phänomenologischen Begründung der Geometrie und ihrer physikalischen Anwendungen, *Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung* VI (1923), 385–560.
- 3 O. Becker, Mathematische Existenz. Untersuchungen zur Logik und Ontologie mathematischer Phänomene, *Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung* VIII (1927), 440–809.
- 4 M. Beeson, *Foundations of Constructive Mathematics: Metamathematical Studies*, Springer, Berlin, 1985.
- 5 C. Bellaar Spruyt, *Leerboek der Formeele Logica, Bewerkt naar de Dictaten van Wijlen Prof. Dr. C.B. Spruyt door M. Honigh*, Vincent Loosjes, Haarlem, 1903.
- 6 L.E.J. Brouwer, *Over de Grondslagen der Wiskunde*, dissertatie, Maas en Van Suchtelen, Amsterdam, 1907.
- 7 L.E.J. Brouwer, De onbetrouwbaarheid der logische principes, *Tijdschrift voor Wijsbegeerte* 2 (1908), 152–158.
- 8 L.E.J. Brouwer, Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten. Erster Teil, Allgemeine Mengenlehre, *KNAW Verhandelingen* 5 (1918), 1–43.
- 9 L.E.J. Brouwer, Über Definitionsbereiche von Funktionen, *Mathematische Annalen* 97 (1927), 60–75.
- 10 L.E.J. Brouwer, Intuitionistische Betrachtungen über den Formalismus, *KNAW Proceedings* 31 (1928), 374–379.
- 11 L.E.J. Brouwer, *Die Struktur des Kontinuums*, Komitee zur Veranstaltung von Gastvorträgen ausländischer Gelehrter der exakten Wissenschaften, Wien, 1930.
- 12 L.E.J. Brouwer, Willen, weten, spreken, in: L.E.J. Brouwer e.a., red., *De Uitdrukkingswijze der Wetenschap: Kennistheoretische Openbare Voordrachten Gehouden aan de Universiteit van Amsterdam gedurende de Kursus 1932–1933*, Noordhoff, Groningen, 1933, pp. 45–63.
- 13 L.E.J. Brouwer, Essentieel negatieve eigenschappen, *Indagationes Mathematicae* 10 (1948), 322–323.
- 14 L.E.J. Brouwer, Consciousness, philosophy and mathematics, in: E.W. Beth, H.J. Pos en J.H.A. Hollak, eds., *Proceedings of the 10th International Congress of Philosophy, Amsterdam, 1948*, 3 (1949), 1235–1249.
- 15 L.E.J. Brouwer, Points and spaces, *Canadian Journal of Mathematics* 6 (1954), 1–17.
- 16 S. Centrone, *Logic and Philosophy of Mathematics in the Early Husserl*, Springer, Dordrecht, 2010.
- 17 D. van Dalen, The use of Kripke's schema as a reduction principle, *Journal of Symbolic Logic* 42 (1975), 238–240.
- 18 D. van Dalen, *Filosofische Grondslagen van de Wiskunde*, Van Gorcum, Assen, 1978.
- 19 D. van Dalen, How connected is the intuitionistic continuum?, *Journal of Symbolic Logic* 62 (1997), 1174–1150.
- 20 D. van Dalen, From Brouwerian counterexample to the Creating Subject, *Studia Logica* 62 (1999), 305–314.
- 21 D. van Dalen (red.), *L.E.J. Brouwer en de Grondslagen van de Wiskunde*, Epsilon Uitgaven deel 51, 2001.
- 22 D. van Dalen (ed.), *The Selected Correspondence of L.E.J. Brouwer*, Springer, London, 2011, supplement, <http://extras.springer.com>.
- 23 D. van Dalen (ed.), *L.E.J. Brouwer – van Mystiek tot Wiskunde*, Epsilon Uitgaven deel 74, 2013.
- 24 A. Dragalin, *Mathematical Intuitionism: Introduction to Proof Theory*, American Mathematical Society, Providence (RI), 1988 [oorspronkelijke uitgave Moskou, 1979].
- 25 K. Gödel, Über eine bisher noch nicht benutzte Erweiterung des finiten Standpunktes, *Dialectica* 12 (1958), 280–287.
- 26 K. Gödel, The modern development of the foundations of mathematics in the light of philosophy, manuscript, posthuum gepubliceerd in [31, pp. 374–387].
- 27 K. Gödel, On an extension of finitary mathematics which has not yet been used, vertaalde en uitgebreide versie uit 1972 van [25], posthuum gepubliceerd in [30, pp. 271–280].
- 28 K. Gödel, Some remarks on the undecidability results, opmerkingen uit 1972 bedoeld voor publicatie in *Dialectica*, posthuum gepubliceerd in [30, pp. 305–306].
- 29 K. Gödel, *Publications 1929–1936*, Vol. 1 van S. Feferman et al., eds, *Collected Works*, Oxford University Press, Oxford, 1986.
- 30 K. Gödel, *Publications 1938–1974*, Vol. 2 van S. Feferman et al., eds, *Collected Works*, Oxford University Press, Oxford, 1990.
- 31 K. Gödel, *Unpublished Essays and Lectures*, Vol. 3 van S. Feferman et al., eds, *Collected Works*, Oxford University Press, Oxford, 1995.
- 32 G.F.C. Griss, Negatieloze intuitionistische wiskunde, *Verslagen Akademie Amsterdam* 53 (1944), 261–268.
- 33 A. Heyting, Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik I, *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften* (1930), 42–56.
- 34 A. Heyting, Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik II, *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften* (1930), 57–71.
- 35 A. Heyting, Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik III, *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften* (1930), 158–169.
- 36 A. Heyting, Die intuitionistische Grundlegung der Mathematik, *Erkenntnis* 2 (1931), 106–115.
- 37 A. Heyting, *Intuitionism: An Introduction*, North-Holland, Amsterdam, 1956.
- 38 A. Heyting, After thirty years, in: E. Nagel et al., *Logic, Methodology, and Philosophy of Science: Proceedings of the 1960 International Congress*, Stanford University Press, Stanford, 1962, pp. 194–197.
- 39 E. Husserl, *Die Krisis der europäischen Wissenschaften und die transzendente Phänomenologie. Eine Einleitung in die phänomenologische Philosophie*, W. Biemel, ed., Martinus Nijhoff, Den Haag, 1954.
- 40 E. Husserl, *Philosophie der Arithmetik*, L. Eley, ed., Martinus Nijhoff, Den Haag, 1970.
- 41 E. Husserl, *Einleitung in die Philosophie: Vorlesungen 1922/23*, B. Goossens, ed., Kluwer, Dordrecht, 2002.
- 42 F. Klein (ed.), *Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen*, B.G. Teubner Verlag, Leipzig, 1904–1935.
- 43 G. Kreisel, Church's Thesis, a kind of reducibility axiom of constructive mathematics, in: A. Kino et al., eds, *Intuitionism and Proof Theory. Proceedings of the Summer Conference at Buffalo, NY, 1968*, North-Holland, Amsterdam, 1970, pp. 121–150.
- 44 L. Kronecker, Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Größen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 92 (1882), 1–122.
- 45 J. Molk, Sur une notion qui comprend celle de la divisibilité et sur la théorie générale de l'élimination, *Acta Mathematica* 6 (1885), 1–165.
- 46 J. Molk, Nombres irrationnels et notion de limite. Exposé, d'après l'article allemand de A. Pringsheim, in: *Encyclopédie des sciences mathématiques*, t. 1, vol. 1, fasc. 1, Gauthier-Villars, Paris, 1904, pp. 133–160.
- 47 J. Molk en J. Tannery, *Éléments de la théorie des fonctions elliptiques* (4 vols), Gauthier-Villars, Paris, 1893–1902.
- 48 J. Myhill, Notes towards an axiomatization of intuitionistic analysis, *Logique et Analyse* 35 (1966), 280–297.
- 49 G. Sundholm en M. van Atten, The proper interpretation of intuitionistic logic: on Brouwer's demonstration of the Bar Theorem, in: M. van Atten et al., eds, *One Hundred Years of Intuitionism (1907–2007): The Cerisy Conference*, Birkhäuser, Basel, 2008, pp. 60–77.
- 50 H. de Swart, *Intuitionistic Logic in Intuitionistic Metamathematics*, dissertatie, Katholieke Universiteit Nijmegen, 1976.
- 51 A. Troelstra en D. van Dalen, *Constructivism in Mathematics: An Introduction*, Vol. 1, North-Holland, Amsterdam, 1988.
- 52 A. Turing, On Computable Numbers, with an application to the Entscheidungsproblem, *Proceedings of the London Mathematical Society* II, Series 42 (1936), 230–265.