

Roland van der Veen

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde

Universiteit van Amsterdam

r.i.vanderveen@uva.nl

Vakantiecursus

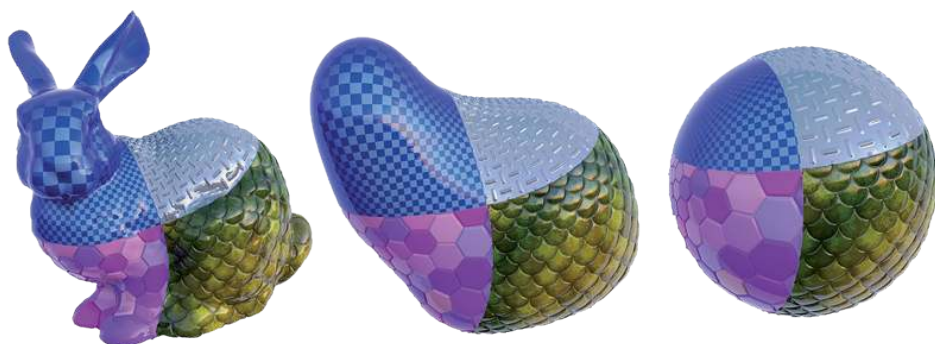
Het vormen van ruimte: van Poincaré tot Perelman

Op de Vakantiecursus 2013 van het Platform Wiskunde Nederland geeft Roland van der Veen een kort overzicht van recente ontwikkelingen in het vakgebied van de (laagdimensionale) topologie. In 2003 bewees Grigori Perelman het Poincaré-vermoeden, een doorbraak zowel binnen als buiten de topologie. Aan de hand van oppervlakken wordt in dit artikel een indruk gegeven van de belangrijkste ideeën, methoden en toepassingen.

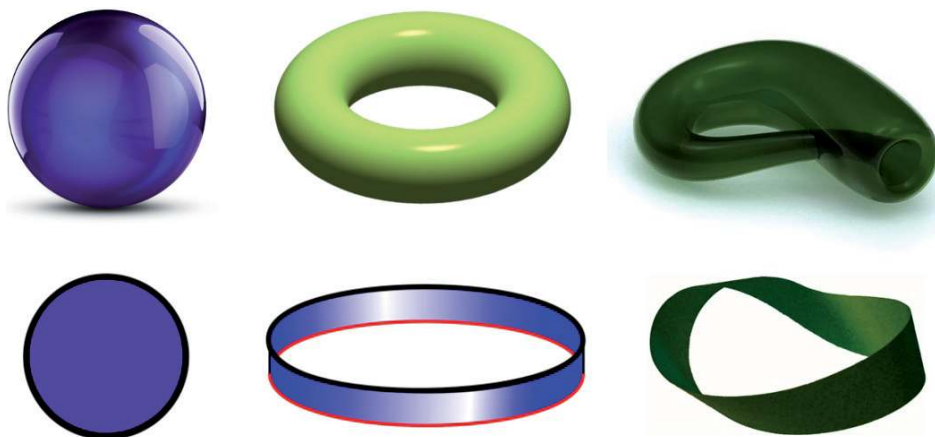
Aan het einde van de negentiende eeuw ontwikkelde de Franse wiskundige Henri Poincaré een nieuwe tak van de wiskunde: de *topologie*. Dat kwam zo: In zijn bestudering van de bewegingen van de planeten en andere differentiaalvergelijkingen viel het Poincaré op dat de precieze vorm van de vergelijkingen vaak niet zo heel belangrijk is. Kwalitatieve vragen als “Loopt het systeem uit de hand of niet?” worden vaak al bepaald door de globale vorm van de oplossingen. Hetzelfde fenomeen kwam hij tegen bij het uitrekenen van complexe integralen. De uitkomst van de integraal verandert vaak niet wanneer we het integratiegebied een klein beetje veranderen. Het gaat blijkbaar om de globale vorm van het gebied, niet om de details.

Poincaré zocht naar een nieuwe wiskundige taal om de globale eigenschappen van zijn ruimten mee te beschrijven. Wat blijft er over

van meetkunde als je *irrelevante details* zoals hoeken, afstanden en rechte lijnen allemaal overboord zet? Poincaré ontdekte dat je dan nog steeds een zinnige theorie krijgt en noemde het topologie. Het bekendste deel van de topologie is de grafentheorie van netwerken. In een netwerk gaat het alleen om welke punten verbonden zijn met welke, niet hoe het er precies uitziet. Topologie wordt ook wel rub-



Figuur 1 Deze drie objecten zijn topologisch gezien hetzelfde. De vrij ingewikkelde vorm van het konijn links wordt vereenvoudigd tot een perfect ronde bol rechts.



Figuur 2 Voorbeelden van oppervlakken. Eerste rij (zonder rand): De bolschil, de torus en de fles van Klein. Tweede rij (met rand): De schijf, de ring en de Möbiusband.

bermeetkunde genoemd, een object verandert immers topologisch gezien niet wanneer we het uitrekken en vervormen alsof het van rubber was, zie Figuur 1. Een beroemd voorbeeld is dat een topoloog het verschil niet kan zien tussen zijn koffiekop en de donut die er naast ligt.

De centrale vragen in de topologie zijn: Hoeveel verschillende ruimten zijn er mogelijk? Passen ze in een classificatieschema? Is er een soort periodiek systeem van alle mogelijke ruimten? Poincaré probeerde rond 1900 de eenvoudigste ruimten in kaart te brengen. Hij vermoedde dat dit juist de cirkel, de bol en de hogerdimensionale bollen waren. Deze uitspraak is in de honderd jaar daarna bekend geworden als het *Poincaré-vermoeden*. Een van de beruchtste en belangrijkste problemen in de wiskunde.

Pas in 2003 slaagde de Rus Grigori Perelman er uiteindelijk in om Poincarés vermoeden op een spectaculaire manier te bevestigen. Perelman geeft een volstrekt nieuwe visie op de topologie. Het geeft een effectieve en intuïtieve manier om willekeurige ruimten, hoe ingewikkeld ook, in kaart te brengen. De eenvoudigste ruimten waar Poincaré over nadenkt zijn slechts een kleine toepassing. Het zijn inderdaad de bollen zoals Poincaré vermoedde.

De kern van Perelmans visie is dit: *Breng je ruimte in een zo mooi en symmetrisch mogelijke standaardvorm*. Een eenvoudige illustratie hiervan is Figuur 1. Het vrij ingewikkelde konijnenbeeld¹ links wordt teruggebracht tot een perfect symmetrische bol rechts. Topologisch gezien gebeurt hier helemaal niets, maar in de praktijk is de bol veel makkelijker te begrijpen. Het briljante van Perelman is dat hij het gebrek aan vorm in de topologie juist aangrijpt om zo mooi mogelijke vormen te creëren. In deze optimale vorm worden de eigenschappen van de ruimte veel makkelijker zichtbaar. In plaats van abstracte ruimten te classificeren kunnen we dus optimaal symmetrische standaardruimten bestuderen. Zo heeft Perelman de centrale vraag in de topologie teruggebracht tot een eenvoudiger meetkundig probleem. De wiskunde is namelijk veel beter in staat om met mooie symmetrische objecten om te gaan dan met vormloze ruimten.

Hieronder geven we een korte en niet-technische inleiding in de topologie met nadruk op de visie van Perelman. We illustreren de belangrijkste ideeën aan de hand van heel speciale ruimten: *oppervlakken*. We zullen zien hoe we oppervlakken in kaart kunnen brengen en hoe Perelman deze ruimten in hun optimale vorm brengt. De begrippen *Eulergetal* en *kromming* zullen een hoofdrol

spelen. Differentiaalvergelijkingen komen ook aan bod en tot slot heeft de techniek van Perelman onverwachte toepassingen.

Topologie en oppervlakken

Topologie gaat over het beschrijven en classificeren van abstracte ruimten. Om het nog abstracter te maken mogen we bovendien niet naar de details van de ruimte kijken, het gaat om de grote lijn, de globale vorm. Maar wat is een ruimte eigenlijk? En wat bedoelen we met de globale vorm?

In plaats van deze vragen in hun algemeenheid te beantwoorden zullen we ons beperken tot een speciaal soort ruimten: *oppervlakken*. In Figuur 2 hebben we alvast wat voorbeelden van oppervlakken getekend. Hieronder zullen we precies zeggen wat we bedoelen met een oppervlak en wanneer twee oppervlakken topologisch gezien hetzelfde zijn.

Oppervlakken vormen een ideale proeftuin voor de topologie omdat er veel over bekend is en ze vrij goed te visualiseren zijn. We zullen zien hoe we ze kunnen classificeren en van elkaar kunnen onderscheiden. Zo kunnen we in de volgende paragraaf de ideeën van Perelman heel mooi in actie zien. Aan het einde van de paragraaf gaan we kort in op driedimensionale ruimten waar Poincaré over nadenkt.

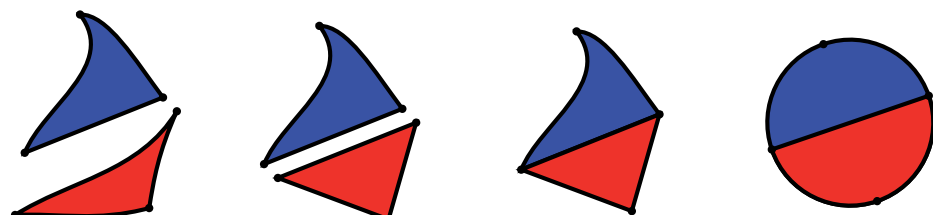
Definitie van een oppervlak

Wat is een oppervlak? Als we nog eens naar Figuur 2 kijken, dan zijn het een soort flexibele dunne zeepvliesen met gaten erin. Ook kunnen ze een rand hebben. Omdat dit idee concreter te maken brengen we alles terug tot de eenvoudigst mogelijke bouwstenen: driehoeken.

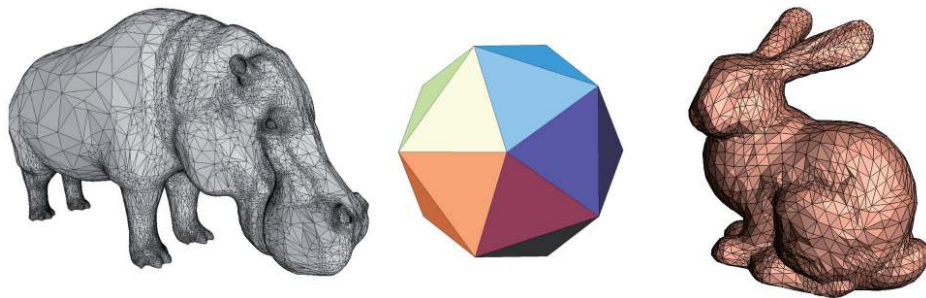
Definitie 1. Een *oppervlak* is een ruimte die je kunt construeren door (eindig veel) driehoeken netjes aan elkaar te plakken.

Met netjes aan elkaar plakken bedoelen we dat twee driehoeken met de zijden tegen elkaar geplakt worden, zie Figuur 3. In het resultaat komen op iedere zijde maximaal twee driehoeken samen en is er geen verdere overlap.

Het is belangrijk dat de driehoeken *geen* specifieke vorm of grootte hebben. Ze zijn als het ware van rubber en kunnen naar believen uitgerekt en ingekrompen worden (hoewel we ze voor het gemak meestal recht tekenen). Zolang het patroon waarmee ze op elkaar aansluiten maar niet verstoord wordt, beschouwen we het oppervlak als onveranderd. Het opbouwen van een oppervlak uit driehoeken



Figuur 3 Twee losse driehoeken links worden iets vervormd zodat ze netjes tegen elkaar aan geplakt kunnen worden. De twee plaatjes rechts stellen (topologisch gezien) allebei dezelfde schijf voor.



Figuur 4 Drie triangulaties van de bol. Topologisch gezien is er geen verschil.

heet ook wel een *triangulatie* van het oppervlak.

Bij het aan elkaar plakken van de driehoeken hoeven niet alle zijden aan een andere zijde vastgeplakt te worden. De overgebleven zijden vormen dan samen de *rand* van ons oppervlak. Dit gebeurde in Figuur 3 waar we een schijf plakten uit twee driehoeken. De vier overgebleven zijden vormen de rand van de cirkelschijf.

Alle oppervlakken op de onderste regel van Figuur 2 hebben een rand. Bij de ring bestaat die zelfs uit twee cirkels (de onderste hebben we rood gemaakt). In het algemeen bestaat de rand altijd uit een aantal losse cirkels, de *randcirkels*. Je kunt nagaan dat dit komt doordat er nooit meer dan twee driehoeken een lijn gemeen hebben.

De driehoeken zijn alleen maar een manier om over het oppervlak te kunnen praten. We stellen ons het oppervlak vaak meer als een glad object voor, zoals de bol (schil) en de andere voorbeelden uit Figuur 2. Het werken met driehoeken is niet echt een beperking want alles wat je om je heen ziet, dit tijdschrift, je hand, je stoel, alles kun je met kleine driehoekjes benaderen. Dit gebeurt bijvoorbeeld dagelijks in de computergraphicstoepassingen. Zo zie je in Figuur 4 bijvoorbeeld een grove triangulatie van het konijn uit Figuur 1. Daarnaast staan in Figuur 4 nog twee alternatieve triangulaties van dezelfde bol. Kun je ook triangulaties vinden van de andere oppervlakken in Figuur 2?

De kernvraag van de topologie is: *hoe kunnen we herkennen of twee oppervlakken (topologisch gezien) hetzelfde zijn?* Maar wat bedoelen we hier nu precies mee? We hebben gezien dat er heel veel verschillende manieren zijn om een oppervlak uit driehoeken op te bouwen, te trianguleren. Intuïtief zijn twee oppervlakken gelijk als ze geleidelijk in elkaar om te vormen zijn, waarbij we zo nodig de driehoeken onderverdelen in kleinere driehoekjes, maar dat is nog erg vaag. Daar hebben we niets aan als we bijvoorbeeld willen begrijpen hoe het kan dat twee

Möbiusbanden, langs hun randen aan elkaar geplakt, de Kleinse fles vormen (rechtsboven in Figuur 2). Om in de volgende paragraaf Perelmans ideeën te kunnen volgen hebben we een precieze definitie nodig van wanneer we twee oppervlakken als hetzelfde beschouwen:

Definitie 2. We zeggen dat oppervlakken *A* en *B* *topologisch gelijk* zijn als we een *gemeenschappelijke verfijning* van hun triangulaties kunnen vinden.

Met een gemeenschappelijke verfijning bedoelen we dat we de driehoeken van *A* en *B* kunnen verdelen in kleinere driehoeken zo dat er een een-op-eenverband ontstaat tussen de kleine driehoeken van *A* en die van *B*. Bovendien moeten dan twee kleine driehoeken elkaars burens zijn precies wanneer de corresponderende driehoekjes in *B* dat zijn en omgekeerd.

In Figuur 5 staat een voorbeeld waar je aan kunt zien hoe dit in de praktijk werkt. We laten zien dat het rode oppervlak linksboven gelijk is aan het blauwe oppervlak rechtsboven. Beide stellen ze de topologische schijf voor. De rode triangulatie uiterst links bestaat uit vier driehoeken, de blauwe rechts uit drie. Volgens de definitie hierboven moeten we een gemeenschappelijke verfijning vinden van de blauwe en de rode driehoeken. Daaruit volgt dan dat de twee oppervlakken topologisch gelijk zijn. Links- en rechtsonder staat met fijne lijntjes de gezochte gemeenschappelijke verfijning aangegeven in de twee triangulaties. De verfijning bestaat uit 17 kleinere driehoeken.

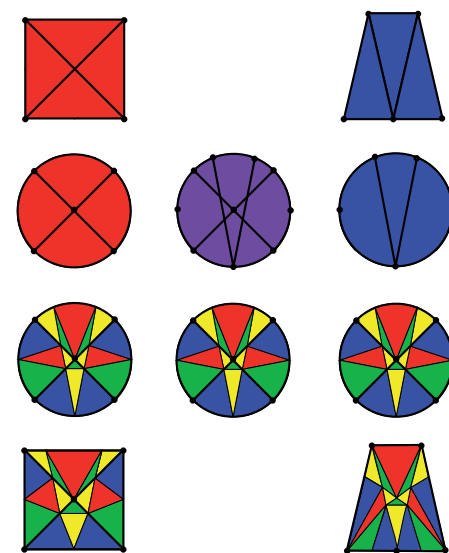
Op de twee regels met plaatjes daartussen zien we hoe we aan deze verfijning kwamen. Eerst vervormen we de rode en de blauwe oppervlakken tot ze ‘op elkaar passen’. Dat is gemakkelijk voor elkaar te krijgen door beide de vorm van een ronde schijf te geven. Vervolgens leggen we deze twee schijven bovenop elkaar (paars). De lijnen van de twee triangulaties snijden elkaar nu en maken een pa-

troon van (kromme) veelhoeken (vette lijnen). Op de volgende regel voegen we extra lijntjes toe aan dit patroon om er een triangulatie van te maken. Deze triangulatie is onze gezochte gemeenschappelijke verfijning. We kunnen die nu ook ‘terughalen’ naar de oorspronkelijke triangulaties (fijne lijntjes). Anders gezegd krijgen we via het paarse plaatje de gevraagde een-op-eencorrespondentie tussen de kleine driehoekjes.

De voorgaande procedure werkt niet alleen voor ons voorbeeld van de schijven. Voor ieder tweetal triangulaties van hetzelfde oppervlak kunnen we zo een gemeenschappelijke verfijning vinden.

Als een directe toepassing van Definitie 2 kunnen we nu bewijzen dat oppervlakken met rand nooit gelijk kunnen zijn aan oppervlakken zonder rand. We kunnen de rand namelijk nooit weggrijpen door een triangulatie te verfijnen of te vervormen. Sterker nog, het aantal randcirkels moet gelijk zijn. Zo heeft de ring twee randcirkels en de schijf maar één (zie Figuur 2). Daarom zijn deze oppervlakken topologisch niet gelijk. Het aantal randcirkels is dus een nuttig getal waarmee we oppervlakken kunnen beschrijven. In de volgende paragraaf komen we nog zo’n getal tegen, het Eulergetal, dat beschrijft wat er binnen het oppervlak zelf gebeurt.

Opgave. Bewijs dat als je twee ringen met hun randcirkels aan elkaar plakt je de torus krijgt (zie Figuur 2). Laat ook zien dat als je twee Möbiusbanden langs hun randcirkels aan elkaar plakt, je de Kleinse fles krijgt (moeilijker).



Figuur 5 Boven: twee triangulaties van de schijf. Tweede regel: vervorming tot een ronde schijf en overlap (midden). Derde regel: onderverdeling in driehoeken (fijne lijntjes). Onder: De oorspronkelijke triangulaties met daarin hun gemeenschappelijke verfijning.

$$\chi = V - E + F$$

$$1 = 4 - 5 + 2$$

Figuur 6 Berekening van het Eulergetal χ van de schijf. $\chi(\text{schijf}) = 1$.

Het Eulergetal

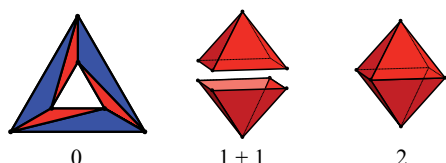
De kernvraag in de topologie is hoe je ruimten kunt classificeren en van elkaar kunt onderscheiden. Voor oppervlakken gaat dat heel goed met het zogenaamde *Eulergetal* (naar Leonhard Euler). Het Eulergetal χ (chi) van een oppervlak komt neer op het tellen van het aantal hoekpunten, zijden en driehoeken in een triangulatie van je oppervlak. Traditioneel geven we het aantal punten, lijnen en driehoeken aan met respectievelijk de letters V, E en F .

Definitie 3. Het *Eulergetal* χ van een oppervlak is $\chi = V - E + F$.

In Figuur 6 staat een simpel voorbeeld waarin we berekenen dat het Eulergetal van de schijf gelijk is aan 1 dus $\chi(\text{schijf}) = 1$. De aantallen punten, lijnen en driehoeken, V, E en F staan aangegeven en hun alternerende som is inderdaad 1.

We hadden het onszelf ook makkelijker kunnen maken door één enkele driehoek te nemen, dat is immers ook een topologische schijf. Er zijn nu evenveel lijnen als punten en maar één driehoek, dus nog steeds is $\chi = 3 - 3 + 1 = 1$.

In de twee bovenstaande voorbeelden zien we dat het Eulergetal niet af lijkt te hangen van de triangulatie van de schijf die we gebruiken. Dat is geen toeval want volgens Definitie 2 hebben twee triangulaties van hetzelfde oppervlak een gemeenschappelijke verfijning. Je kunt nagaan dat het Eulergetal niet verandert wanneer we een triangulatie verfijnen en daarom leveren beide triangulaties hetzelfde antwoord op.



Figuur 7 De Eulergetallen van de ring, twee schijven en de bol op een rijtje.

In het volgende voorbeeld berekenen we de Eulergetallen van de bol en de ring. In Figuur 7 links is een triangulatie van de ring gegeven met zes driehoeken. In de berekening $\chi = V - E + F$ valt het aantal driehoeken weg tegen de zes inwendige lijnen en de punten tegen de randlijnen. Het antwoord is dus $\chi(\text{ring}) = 0$.

Het Eulergetal van de bol berekenen we uit de octaëder (rechts) in Figuur 7. De octaëder is een triangulatie van de bol met acht driehoeken. In het middelste plaatje hebben we de octaëder langs de evenaar in twee piramidevormige schijven opgedeeld (de piramides hebben geen grondvlak!). We weten al dus samen hebben de twee dat $\chi(\text{schijf}) = 1$, schijven Eulergetal 2. Plakken we de schijven op elkaar dan verdwijnen er evenveel hoekpunten V als lijnen E en blijft F gelijk. Daarom blijft ook $\chi = V - E + F$ gelijk bij het plakken. Met andere woorden $\chi(\text{bol}) = 1 + 1 = 2$.

De laatste observatie is interessant omdat we hier het Eulergetal van een oppervlak (de bol) berekenden door de Eulergetallen van twee eenvoudigere oppervlakken op te tellen. Die twee eenvoudigere bouwstenen werden langs een van hun randcirkels aan elkaar geplakt. We zagen namelijk in dat het Eulergetal niet verandert wanneer we twee randcirkels van een oppervlak aan elkaar plakken. Andersom mag je dus ook het Eulergetal van je oppervlak berekenen door het langs cirkels in stukjes te snijden. Het Eulergetal van het geheel is niets anders dan de som van de Eulergetallen van de stukjes. Zo kun je bijvoorbeeld de torus uit Figuur 2 in cilindervormige plakjes snijden. Al die plakjes zijn ringen (met $\chi = 0$) dus het Eulergetal van de torus is ook 0.

Tot nu toe zijn alle Eulergetallen die we hebben gevonden positief of 0 maar dit is misleidend. Snij je namelijk een klein kapje af van de bol dan gaat het Eulergetal 1 omlaag. Dit volgt weer uit de redenering hierboven. Een bol met veel gaten (randcirkels) heeft dus een heel negatief Eulergetal.

Opgave. Zijn er ook oppervlakken zonder rand met negatief Eulergetal?

Classificatie van oppervlakken

Het Eulergetal is heel praktisch om oppervlakken te onderscheiden, maar kun je hiermee ook werkelijk alle oppervlakken beschrijven? August Möbius (van de band) gaf hierop in 1861 het volgende antwoord. Poincaré was toen 7 jaar oud.

Stelling 1 (Classificatiestelling van oppervlakken). *Een samenhangend oppervlak wordt geheel bepaald door drie parameters:*

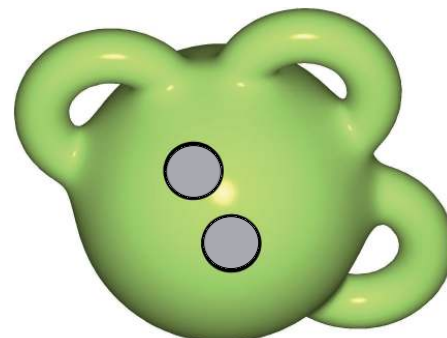
1. *Het Eulergetal χ .*
2. *Het aantal randcirkels r .*
3. *Of het oriënteerbaar is of niet.*

Met samenhangend bedoelen we alleen maar dat we ervan uitgaan dat het oppervlak niet uiteenvalt in losse stukken. Het begrip oriënteerbaarheid slaat op het verschil tussen de ring en de Möbiusband: op de eerste kun je consistent praten over links en rechts, op de tweede niet. Daarom noemen we de ring oriënteerbaar en de Möbiusband niet.

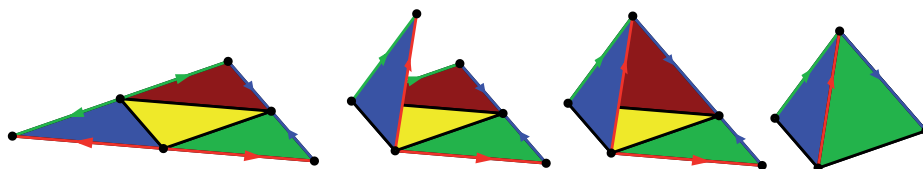
Möbius gaf ook een expliciete opsomming van alle mogelijke oppervlakken. Een oriënteerbaar oppervlak ziet eruit als een bol met handvatten en gaten als in Figuur 8. Met een gat bedoelen we dat er een schijf uit het boloppervlak is weggelaten, waarbij een cirkelvormige rand ontstaat. Is het oppervlak niet oriënteerbaar dan is aan een aantal van de randcirkels van de gaten een Möbiusband vastgeplakt. Hoe dit er precies uitziet laten we aan de fantasie van de lezer over.

Een bewijs van deze uitspraken zou te ver voeren, hoewel het niet erg moeilijk is en zeker de moeite waard. We verwijzen naar een mooi bewijs van John Conway [6]. Ook is er interessant Nederlands lesmateriaal over oppervlakken gemaakt door Jacobien Carstens en Sebas Eliëns [4].

Opgave. Teken een zo goed mogelijk plaatje van een Möbiusband die met zijn randcirkel aan de rand van een schijf vastzit. Stel je vervolgens een oppervlak voor met één handvat en twee gaten waarvan er aan één van de randcirkels een Möbiusband geplakt zit. Is dit de Kleinse fles? Zo nee, hoe kan die dan beschreven worden in termen van de standaardvorm van Möbius?



Figuur 8 Een bol met drie handvatten en twee gaten.



Figuur 9 We zetten een bouwplaat van een tetraëder in elkaar. Hierbij moeten de gekleurde pijltjes op elkaar komen. De bouwplaat uiterst links is intrinsiek, de tetraëder rechts extrinsiek.

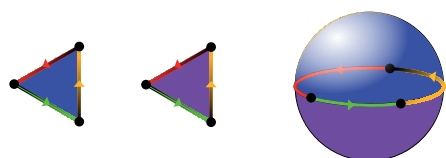
Intrinsieke oppervlakken

Voor we ons in hogere dimensies begeven kijken we nog even van een hoger standpunt naar onze oppervlakken. We stellen ons oppervlakken graag voor als ruimtelijke objecten in drie dimensies, maar logisch gezien zijn ze dat niet noodzakelijk. Als we terugkijken naar de definities staat er alleen iets over driehoeken waarvan de zijden aan elkaar zitten. Die driehoeken zelf zijn objecten uit het platte vlak dus in zekere zin zijn oppervlakken dat ook. We noemen oppervlakken dan ook wel tweedimensionale topologische ruimten.

Dit standpunt van waaruit we oppervlakken zien als opzichzelfstaande ruimten heet wel *intrinsiek*. We praten over oppervlakken zonder te refereren aan hoe (en of!) ze in de ruimte liggen. In zekere zin worden we gedwongen tot dit standpunt omdat sommige oppervlakken nu eenmaal niet in onze gewone \mathbb{R}^3 passen. De fles van Klein is hier een voorbeeld van. Iedere poging om hem toch als een ruimtelijk object te tekenen levert een schijnbare zelfdoorsnijding op, zie Figuur 2.

Vanuit het intrinsieke standpunt stellen we ons oppervlakken voor als *bouwplaten*. Van elke driehoek geven we aan waar hij aan vastzit maar zonder te vertellen hoe het geheel eruitziet. In het geval van de bol is dit een bekende procedure. Hier is bijvoorbeeld een bouwplaat van een triangulatie van de bol met vier driehoeken (tetraëder), zie Figuur 9. De zijden met dezelfde kleur moeten in de richting van de pijltjes aan elkaar geplakt worden.

In het bovenstaande geval kunnen we de bouwplaat van de tetraëder ook daadwerkelijk in elkaar zetten in onze ruimte. Voor de meeste bouwplaten lukt dat niet. Zelfs voor triangulaties van de bol kan het verwarrend zijn. Vergelijk bijvoorbeeld de volgende bouwplaat van een triangulatie van een bol in een noordelijke en zuidelijke driehoek (Figuur 10).



Figuur 10 Een bouwplaat van de bol met twee driehoeken, noordelijk en zuidelijk halfmond.

Ze passen netjes op elkaar als je de driehoeken flink wat buigt.

Een buitenissiger oppervlak is het *projectieve vlak*. Abstract (intrinsiek) kunnen we het projectieve vlak als volgt beschrijven. Het is de verzameling van alle lijnen door de oorsprong in \mathbb{R}^3 . Deze lijnen zijn als het ware de lichtstralen die ons oog in de oorsprong bereiken en zo kunnen we perspectivische constructies als verdwijnpunten eenvoudig beschrijven. Omdat iedere lijn de eenheidsbol in \mathbb{R}^3 in twee tegenoverliggende punten snijdt, kunnen we de punten van het projectieve vlak ook iets eenvoudiger beschrijven. Het projectieve vlak bestaat uit alle tegenoverliggende paren punten op de bol. Het is niet direct duidelijk hoe en of dit wel een oppervlak beschrijft, want we hebben nog geen bouwplaat bij het oppervlak gemaakt. We komen hier later (en in de opgave) op terug.

Opgave. In Figuur 11 zeven uitslagen van zeven oppervlakken met twee driehoeken. Bereken van iedere uitslag het Eulergetal en het aantal randcirkels. Maak ook een zo goed mogelijk schets van het oppervlak. Hebben we nu alle oppervlakken die een triangulatie met maximaal twee driehoeken toestaan in kaart gebracht?

Driedimensionale ruimten

Gewapend met onze kennis over oppervlakken wagen we ons nu aan ingewikkeldere topologische ruimten: driedimensionale ruimten (of korter: *3-ruimten*). Dit zijn de ruimten waar Poincaré en Perelman zich het hoofd over braken. Nog steeds wordt er veel onderzoek gedaan naar deze ruimten. We kunnen helaas alleen een korte indruk geven zonder in al te veel details te treden.

Net zoals oppervlakken uit driehoeken zijn opgebouwd, zo zijn (massieve) tetraëders de bouwstenen voor de 3-ruimten. Volgens Poincaré is de eenvoudigste 3-ruimte de 3-bol. Net als de gewone bolschil (2-bol of kortweg ‘bol’) kunnen we die uit twee stukken samenstellen: een noordelijk en een zuidelijk ‘halfmond’, zie Figuur 12. Het verschil is dat deze twee stukken nu twee tetraëders zijn in plaats van twee driehoeken. Dat neemt niet weg dat de 3-bol wel degelijk ook als ronde bol te realise-

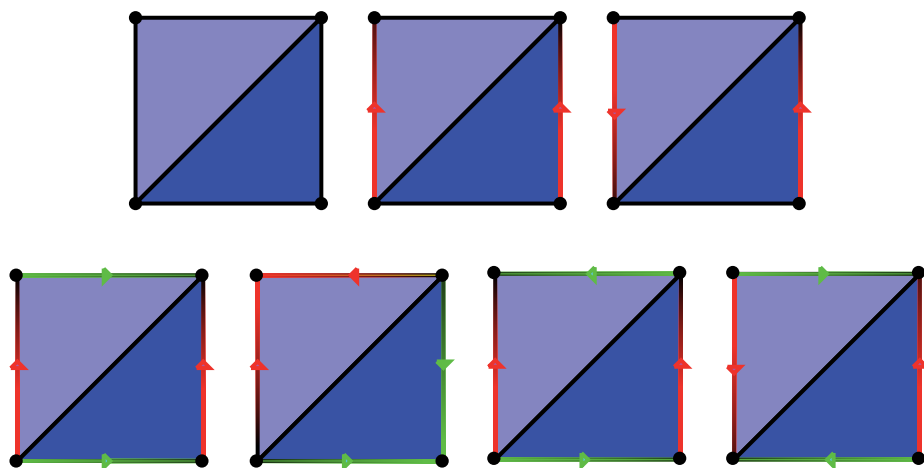
ren is, maar dan wel als de eenheidsbol in \mathbb{R}^4 . De intrinsieke bouwplaat van twee tetraëders is vaak praktischer.

Een nog eenvoudiger voorbeeld van een 3-ruimte is natuurlijk een enkele (massieve) tetraëder. Deze heeft een rand en dat is een (topologische) 2-bol. Je kunt nagaan dat de rand, hoe je de tetraëders ook plakt, altijd een oppervlak zal zijn. In Figuur 13 (boven) hebben we een driehoekig prisma aan elkaar geplakt uit drie tetraëders. Deze 3-ruimte is topologisch gezien volkomen gelijk aan de enkele tetraëder van net. Het wordt anders wanneer we de boven- en ondervlakken van het prisma aan elkaar plakken. Dan krijgen we een massieve torus. Dat is een 3-ruimte waarvan de rand een torusoppervlak is, zie Figuur 14 (rechts).

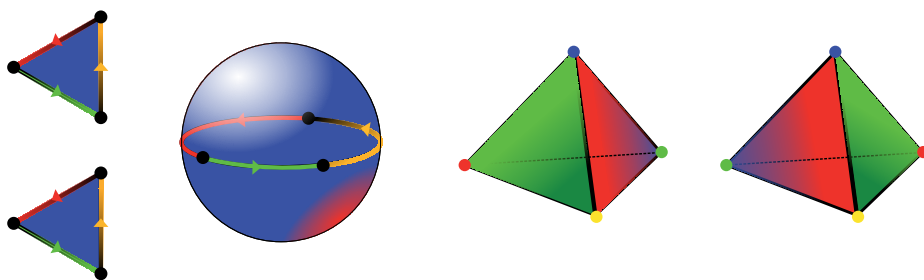
Met behulp van de prisma’s kunnen we onze kennis van oppervlakken gebruiken om ook 3-ruimten te maken. Dat gaat als volgt, zie Figuur 13. Begin met een bouwplaat van je favoriete oppervlak (in het voorbeeld is dat een bouwplaat van de torus met twee driehoeken). Op iedere driehoek in de bouwplaat zetten we nu een driehoekig prisma. Vervolgens plakken we de prisma’s met hun verticale vlakken aan elkaar volgens de instructies van de bouwplaat van het oppervlak. De 3-ruimte die we zo krijgen is een ‘verdikking’ van het oorspronkelijke oppervlak. Iedere horizontale doorsnede van de prisma’s vormt immers een bouwplaat van het oppervlak. De boven- en ondervlakken van de prisma’s worden verder nergens aan vastgeplakt en vormen dus de rand. Ze vormen een kopie van het oppervlak en de ondervlakken ook. De rand bestaat dus uit twee delen.

Tot slot kunnen we dan de horizontale boven- en ondervlakken van ieder prisma aan elkaar plakken. In het geval dat ons oppervlak de schijf was (een enkele driehoek) krijgen we zo de massieve torus. Heeft ons oppervlak geen rand dan krijgen we interessante voorbeelden van 3-ruimten zonder rand. In ons voorbeeld waarbij we beginnen met het torusoppervlak en na de prisma’s erop te zetten en aan elkaar te plakken krijgen we de zogenaamde *3-torus*.

Dit is nog maar een begin van de enorme rijkdom aan verschillende mogelijke 3-ruimten. De meesten zijn ingewikkelder dan die we met de oppervlak-constructie hierboven kunnen maken. Meer hierover is te lezen in het prachtige boek van Jeff Weeks [10]. Ook de paragraaf over het Poincaré-vermoeden in de bundel [3] gaat hier dieper op in.



Figuur 11 Bouwplaten voor oppervlakken met twee driehoeken. De gekleurde pijltjes moeten met de juiste richting tegen elkaar geplakt worden.



Figuur 12 Links: de bouwplaat voor de gewone bol uit twee stukken. Rechts: Een driedimensionale bouwplaat voor de 3-bol. De twee (massieve) tetraëders moeten met alle zijvlakken aan elkaar geplakt worden als een soort noordelijk en zuidelijk halfrond. De gekleurde punten komen dan op elkaar te liggen.

Een driedimensionaal Eulergetal. Ons geheime wapen bij het bestuderen van de oppervlakken (ook wel 2-ruimten) was het Eulergetal. Is er ook een Eulergetal voor 3-ruimten? Het Eulergetal $\chi = V - E + F$ was de alternerende som van de aantallen punten, lijnen en driehoeken. Voor de 3-ruimten speelt ook het aantal tetraëders T een rol. Het Eulergetal is daarom gedefinieerd als $\chi = V - E + F - T$.

Zo is het Eulergetal van de 3-bol bijvoorbeeld $4 - 6 + 4 - 2 = 0$, want we konden de 3-bol maken uit twee tetraëders door alle zijvlakken van de een aan alle zijvlakken van de ander te plakken. Dus $T = 2$ en de punten, lijnen en driehoeken worden in paren op elkaar geplakt zodat er nog maar 4 punten, 6 lijnen en 4 vlakken overblijven.

Een ander voorbeeld is de enkele tetraëder. Deze 3-ruimte met rand heeft Eulergetal $\chi = 4 - 6 + 4 - 1 = 1$. Omdat het prisma topologisch equivalent is, moet dit ook Eulergetal 1 hebben (dat klopt ook met de berekening). Plakken we de boven- en ondervlakken aan elkaar om de massieve torus te krijgen dan verliezen we drie punten, drie lijnen en één driehoek, dus neemt het Eulergetal 1 af. Het Eulergetal van de massieve torus is dus 0.

Met iets meer moeite kun je berekenen dat het Eulergetal nul is van alle 3-ruimten zonder rand die we hierboven met prisma's construeerden. Dat is geen toeval want het blijkt dat het Eulergetal van alle (behoorlijke) 3-ruimten zonder rand altijd gelijk is aan 0.

Om 3-ruimten toch te kunnen bestuderen bedacht Poincaré iets anders. Hij keek naar de mogelijke paden door de 3-ruimte. Met een pad bedoelen we een aantal lijntjes van de tetraëders die samen punt A met punt B verbinden. Er zijn een hoop mogelijke paden van A naar B maar de meeste lijken erg op elkaar. Poincaré noemde daarom twee paden equivalent als ze met kleine stapjes in elkaar over kunnen gaan, namelijk door het pad steeds maar in één enkele tetraëder te veranderen.

De eenvoudigste 3-ruimten zijn die waar alle paden van A naar B equivalent zijn (dit heet ook wel enkelvoudig samenhangend). Dat is bijvoorbeeld zo in de tetraëder en ook in de 3-bol, maar niet in de massieve torus en ook niet in de 3-torus. In de massieve torus is goed te zien dat er meerdere niet-equivalente paden tussen A en B mogelijk zijn. Je kunt namelijk van A naar B linksom het gat en rechtsom het gat, zie Figuur 14.

Poincaré vroeg zich nu af of de 3-bol de enige 3-ruimte was waar alle paden tussen twee punten equivalent zijn. Dit is het beroemde Poincaré-vermoeden.

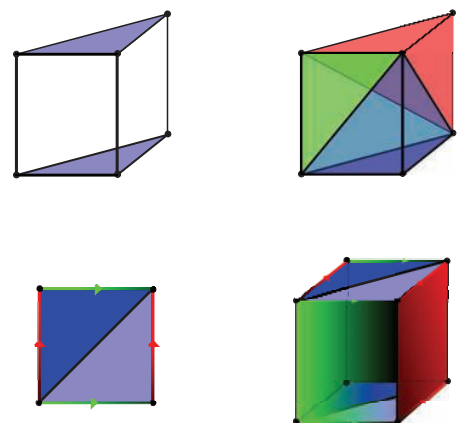
Poincaré-vermoeden. *De enige 3-ruimte zonder rand waar alle paden tussen twee punten equivalent zijn is de 3-bol.*

Opgave. Is de 2-bol ook het enige oppervlak zonder rand waar alle paden tussen twee punten equivalent zijn? Laat zien dat er op het projectieve vlak *precies twee* verschillende paden zijn tussen ieder tweetal punten.

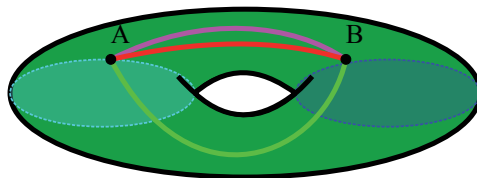
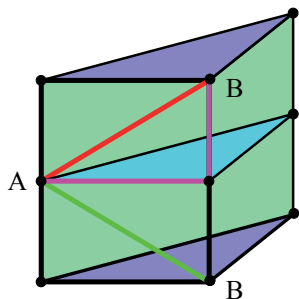
Meetkunde op oppervlakken

We hebben nu een hele diertuin aan topologische ruimten opgebouwd. Hoe kunnen we hier orde in aanbrengen? Voor de oppervlakken konden we het Eulergetal gebruiken om ze te classificeren, maar voor 3-ruimten lukte dat niet. De visie van Perelman was om het vormeloze vorm te geven. Tot nu toe zijn de ruimten opgebouwd uit driehoeken of tetraëders zonder specifieke vorm. Ze zijn van rubber want in de topologie maakt de precieze vorm niet uit. Dat was nu juist de kracht van de topologie: om de ingewikkelde vorm van figuren te negeren en alleen naar de hoofdzaak te kijken.

Perelman wilde de vormloze topologische ruimten vorm geven. Wij zullen dat doen door aan iedere zijde van de driehoeken een lengte toe te kennen. Dat heeft op de topologie geen enkel effect. Perelman liet echter zien dat je ruimten een heel speciale vorm kunt geven die uniek is en als het ware opgelegd wordt door de manier waarop de driehoeken aan elkaar zitten. Deze unieke standaardvorm van Perelman vertelt ons dan wel degelijk iets over de topologische ruimte



Figuur 13 Boven: Een driehoekig prisma is opgebouwd uit drie tetraëders (rood, blauw en groen). Onder: een bouwplaat van een oppervlak wordt een bouwplaat voor een 3-ruimte door op iedere driehoek een prisma te zetten.



Figuur 14 Twee aanzichten van de massieve torus met daarop drie paden van punt A naar punt B. Het rode pad is equivalent met het paarse pad, maar niet met het groene pad.

zelf. Het is een fantastisch classificerend principe.

Om de ingewikkelde machinerie van de Riemannse meetkunde te vermijden werken we met een *discrete* versie van de theorie van Perelman. Dat wil zeggen dat we geen punten toelaten die oneindig dicht bij elkaar liggen. In deze context zullen we precies zeggen wat we bedoelen met de optimale standaardvorm van een oppervlak. Dit doen we in termen van het meetkundige begrip *kromming*. Verrassend is dat het Eulergetal hier weer een belangrijke rol speelt. Het essentiële punt is dat deze methode van Perelman ook voor hogerdimensionale ruimten werkt.

Metrieken op een triangulatie

Om de vormloze topologische oppervlakken vorm te geven doen we het volgende. We kiezen een triangulatie en geven de zijden van iedere driehoek een specifieke lengte. Intuïtief zijn de driehoeken nu niet meer van rubber maar juist van kristal. Iedere driehoek is nu een specifieke vlakke euclidische driehoek die geheel is vastgelegd door de lengten van zijn drie zijden. De essentiële meetkundige informatie zit hem in het geven van een positief getal voor iedere zijde, we noemen dit wel een metriek. Om te zorgen dat een drietal zijden ook werkelijk een euclidische driehoek geeft, eisen we dat ze aan de zogenaamde *driehoeksongelijkheid* voldoen. De driehoeksongelijkheid stelt dat in iedere euclidische driehoek de langste zijde korter is dan de som van de lengtes van de overige twee zijden.

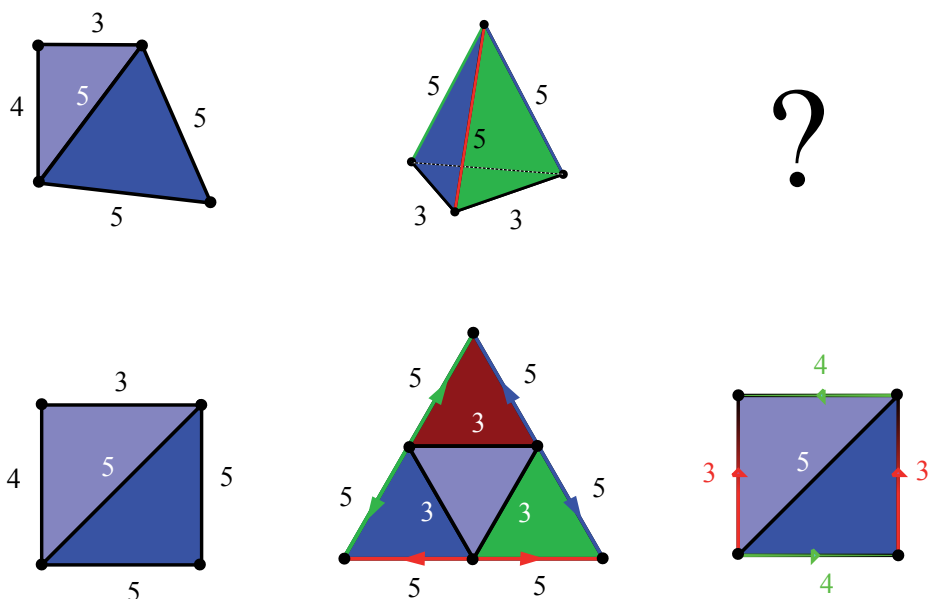
Definitie 4. Een (discrete) *metriek* op een getrianguleerd oppervlak is een functie die aan iedere zijde van de triangulatie een positief getal toekent (de lengte). Voor elke driehoek in de triangulatie moeten de lengten van de zijden bovendien aan de bovengenoemde driehoeksongelijkheid voldoen.

Het tekenen van een getrianguleerd oppervlak in \mathbb{R}^3 zoals het nijlpaard, de icosaeëder en het konijn in Figuur 4 geeft impliciet een me-

etriek aan. We kunnen dan namelijk de lengten van alle zijden meten. Aan de driehoeksongelijkheid is automatisch voldaan omdat de driehoeken er anders nooit recht uit zouden kunnen zien. Een metriek geven is echter niet hetzelfde als het oppervlak ruimtelijk realiseren in \mathbb{R}^3 . Het begrip metriek is namelijk *intrinsiek*, het is niets meer dan een functie *lengte* : $E \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ die aan een aantal ongelijkheden voldoet.

In Figuur 15 zijn drie bouwplaten van getrianguleerde oppervlakken getekend die de betekenis van de metriek duidelijk maken. Bij iedere lijn staat de lengte gegeven en boven de bouwplaat hebben we geprobeerd het meetkundige object natuurgetrouw te tekenen. Voor de schijf links lukt dat heel aardig. In het middelste plaatje staat de bouwplaat van de tetraëder uit Figuur 9. In de gekozen metriek is de top wat spitsder dan in het eerdere figuur.

Helemaal rechts staat een bouwplaat van de Kleinse fles maar hiervan hebben we niet geprobeerd om een correct plaatje te tekenen.



Figuur 15 Onder: Bouwplaten van de schijf, de bol en de Kleinse fles met metriek. Boven: Zo mogelijk een kloppende tekening van het bijbehorende meetkundige object.

Dat lukt niet in onze ruimte vanwege de zelfdoorsnijdingen. Dat neemt niet weg dat het een prima meetkundig oppervlak is waar we van alles over te weten kunnen komen.

Vergelijking met Riemannse metrieken. Een probleem met onze meetkunde op oppervlakken is dat we met een vaste triangulatie werken. Het is natuurlijker om, zoals in de *Riemannse meetkunde*, oppervlakken voor te stellen als gladde (differentieerbare) objecten. In dit geval wordt de metriek gegeven door inproduct op de raakruimte in elk punt. De lengte van een pad meten we dan door de lengte van de raakvector te integreren. Onze grovere (discrete) aanpak met platte driehoeken zien we als een benadering van de werkelijke gladde situatie die Perelman beschreef. Naarmate het aantal driehoeken groter en groter wordt beginnen onze resultaten heel goed te lijken op het gladde geval.

Opgave. Gegeven is een willekeurige metriek op de tetraëder-triangulatie van de bol. Dus zes positieve getallen, één voor elke zijde, die aan de driehoeksongelijkheden voldoen. Kunnen we altijd een euclidische tetraëder construeren in \mathbb{R}^3 waarvan de lengten van zijden overeenkomen met de metriek?

Kromming

In de Riemannse meetkunde beschrijven we gladde oppervlakken allereerst door hun raakvlakken. Zien we een oppervlak als de grafiek van een functie dan is het raakvlak niets anders dan de beste lineaire benadering

in het punt. We krijgen nog een beter beeld van het oppervlak door te kijken hoe het weg- buigt van zijn raakvlak. Dat kan in ieder punt p anders zijn en we noemen dit de (Gauss) kromming κ_p in punt p . Als we ons oppervlak weer zien als de grafiek van een functie dan beschrijft de kromming κ_p de beste kwadratische benadering van onze functie in het punt p .

Boven in Figuur 16 zien we een punt p en de drie kwalitatief verschillende mogelijkheden voor de kromming κ_p in het punt p . Het gaat alleen om hoe het er dichtbij p uitziet. Is de kromming positief dan is het oppervlak rondom p bolvormig, is κ_p negatief dan lijkt het juist op een zadel dichtbij p . Kromming 0 is heel speciaal, in dat geval is het platte raakvlak zelf juist de beste benadering.

In onze discrete context kunnen we het begrip kromming heel goed benaderen in termen van de hoeken van de driehoeken. Dit werkt alleen voor de hoekpunten van de driehoeken. Voor alle andere punten is de kromming 0, maar meestal zullen we alleen over de kromming in de hoekpunten praten. Gegeven een metriek op een getrianguleerd oppervlak is de kromming κ_p in een punt p als volgt gedefinieerd.

Definitie 5. De kromming κ_p in een punt p is gelijk aan 2π min de som van de hoeken van de driehoeken die samenkomen rondom p . Is p een randpunt dan gebruiken we π min hoeksom.

Onderin Figuur 16 staat de discrete kromming in een punt op een getrianguleerd schijfje getekend. Hoewel we hier maar vier driehoeken gebruiken in onze bouwplaten benadert het resultaat het gladde geval verrassend goed.

Kromming is een *intrinsiek* begrip. Het wordt namelijk bepaald door de hoeken van de driehoeken en die kun je met de cosinusregel berekenen. Alle lengten van de zijden zijn namelijk gegeven door de metriek. De driehoeksongelijkheid zorgt er bovendien voor dat de hoeken zich gedragen zoals we dat gewend zijn. Ter herinnering is hier de formule voor een driehoek met lengten a, b, c . De hoek α tegenover a wordt gegeven door:

$$\cos \alpha = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc}.$$

Het begrip kromming laat overigens goed zien waarom wereldkaarten nooit helemaal waarheidsgetrouw zijn. Het aardoppervlak is namelijk een bol en heeft dus positieve krom-

ming. We kunnen dit dus nooit correct afbeelden in het platte vlak. Dat heeft namelijk kromming 0.

Als een eenvoudig voorbeeld berekenen we de kromming in de punten van de tetraëder uit Figuur 15 (midden). We beginnen met de top. Hier komen drie identieke hoeken samen en volgens de cosinusregel is een zo'n hoek gelijk aan $\cos \frac{41}{50}$. De hoeksom is daarom ongeveer 1,83 radiaal en de kromming in het toppunt is dus ongeveer 4,46. De kromming in de drie andere punten is ongeveer 2,70. We zien, hoe scherper de punt, hoe groter de kromming. Daar komen we later nog op terug.

Opgave. Bereken de kromming in de hoekpunten van de regelmatige tetraëder, octaëder en de icosaeëder. Trianguleer ook een regelmatige kubus en bereken de kromming in de hoekpunten daar. Was het nodig om te trianguleren? Bereken voor ieder van deze voorbeelden en het voorbeeld hierboven ook de som van de krommingen in alle punten samen.

Kromming en het Eulergetal

In de vorige opgave zagen we al dat als we de kromming in alle punten van een bol optellen we altijd op 4π uit lijken te komen. Dit doet

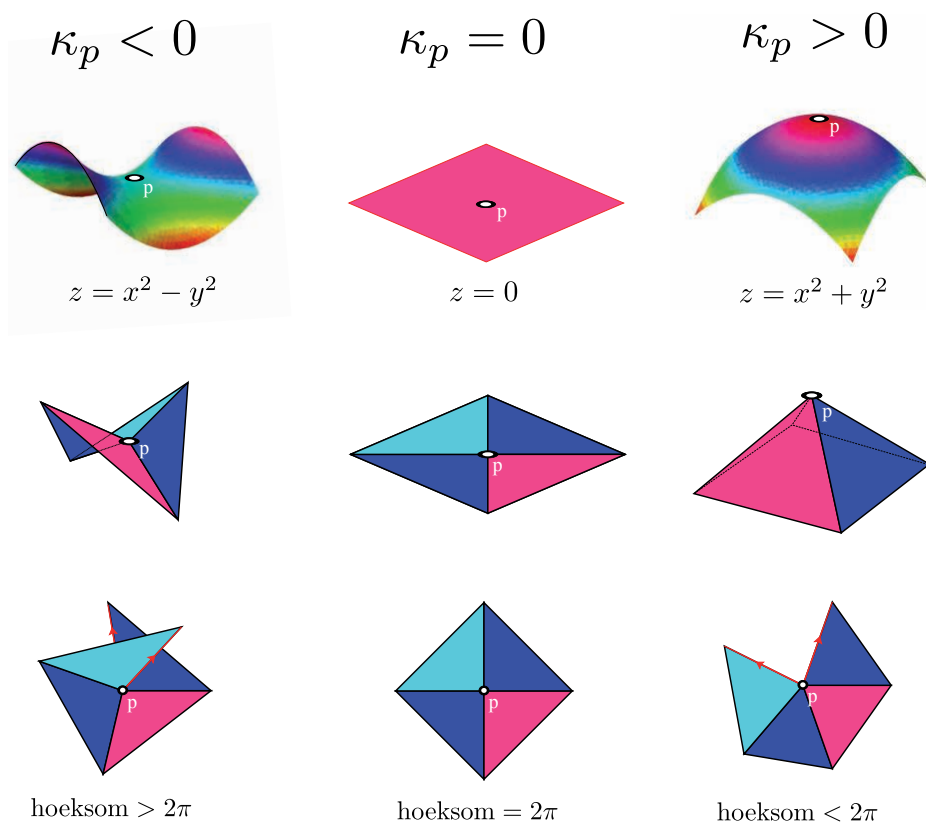
denken aan het Eulergetal uit de vorige paragraaf want dat was ook onafhankelijk van de gekozen triangulatie. Er kwam altijd 2 uit en hier komt altijd 4π uit. Inderdaad speelt het Eulergetal achter de schermen een heel belangrijke rol in de meetkunde. Volgens de beroemde stelling van Gauss–Bonnet is namelijk de totale kromming van het oppervlak gelijk aan 2π maal het Eulergetal. Met totale kromming bedoelen we de som van de kromming in ieder hoekpunt.

Stelling 2 (Gauss–Bonnet). *Voor ieder oppervlak geldt:*

$$\text{Totale kromming} = \sum_p \kappa_p = 2\pi\chi,$$

waarbij de som over alle punten van het oppervlak loopt.

Dit is een verbluffend resultaat. Het laat bijvoorbeeld zien dat de totale kromming niet verandert wanneer we de metriek veranderen. Zelfs niet wanneer we een totaal andere triangulatie gebruiken. De totale kromming is blijkbaar net als het Eulergetal een *topologisch* begrip. De stelling van Gauss–Bonnet is een speciaal geval van de belangrijke *index-*



Figuur 16 Het effect van het teken van de kromming κ_p in het punt p , op een glad en een getrianguleerd oppervlak en zijn uitslag. Hoeksom slaat op de som van de hoeken rond p .

stelling van Atiyah–Singer [7]. Gelukkig is de stelling van Gauss–Bonnet in onze getrianguleerde context veel eenvoudiger te bewijzen.

Bewijs van de Stelling van Gauss–Bonnet.

Voor het gemak zullen we de stelling bewijzen in het speciale geval dat het oppervlak geen rand heeft. We gaan op een handige manier de krommingen van alle punten optellen en zullen dan vanzelf het Eulergetal zien verschijnen. Onthoud dat de formule voor de kromming was: 2π min hoeksom.

Om te beginnen levert ieder punt een factor 2π op, dus krijgen we $2\pi V$ (V is het aantal punten). Verder wordt iedere hoek precies een keer afgetrokken. Verzamel de hoeken nu per driehoek waar ze bij horen, dan vinden we $-\pi F$. De som van de hoeken van een driehoek is immers π . Het linkerlid is dus gelijk aan $2\pi(V - F/2)$.

Om het bewijs af te maken hoeven we alleen nog te laten zien dat $V - F/2 = V - E + F = \chi$. Iedere driehoek heeft drie zijden en elke zijde wordt gedeeld door twee driehoeken, dus $3F = 2E$. We kunnen dit herschrijven tot $-F/2 = -E + F$, ofwel $V - F/2 = V - E + F$. □

Opgave. Kun je het bewijs uitbreiden naar het geval met rand? Let op de aangepaste definitie van kromming in de randpunten.

Constante kromming: de optimale meetkunde

Na deze inleiding in de meetkunde gaan we terug naar de vragen van Perelman. Gegeven een getrianguleerd oppervlak. Wat is dan de mooiste mogelijke meetkunde (metriek) die we hierop kunnen leggen? Wat is de eenvoudigste? Maar wat bedoelen we eigenlijk met eenvoudig en mooi?

Een goed criterium hiervoor is kromming. Dat bepaalt immers voor een groot deel hoe het oppervlak eruitziet. Als de kromming in een punt nul is, is het oppervlak daar in de buurt plat. Misschien kunnen we de kromming wel overal 0 maken zodat het oppervlak overal mooi plat is? Dit lijkt een goed idee maar de stelling van Gauss–Bonnet (Stelling 2) maakt dit onmogelijk. De totale kromming is immers altijd $2\pi\chi$ ongeacht de metriek. Als χ niet nul is zoals bij de bol dan moet er voor iedere metriek altijd een punt zijn met positieve kromming.

Wat we wel kunnen proberen is de kromming zo gelijkmatig mogelijk te verdelen. Dat past ook goed bij de intuïtie dat in de optimale meetkunde ieder punt er hetzelfde uitziet. Dat is waarom de ronde bol zo mooi is: perfecte symmetrie. Met driehoeken wordt het natuurlijk niet helemaal per-

fect rond maar met een paar miljoen driehoeken begint het er aardig op te lijken.

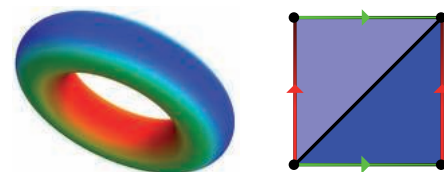
Hoe zit het met de andere oppervlakken die we hebben leren kennen? Hoe ziet hun optimale vorm eruit? Voor het gemak denken we hier aan een triangulatie met heel veel driehoeken, zodat we het oppervlak kunnen tekenen als een glad vlies. Neem bijvoorbeeld de torus. Het gebruikelijke plaatje is verre van optimaal: de punten in de binnenring hebben een negatieve kromming (het is daar net een zadel) terwijl aan de buitenring het meer lijkt op een bol, de kromming is hier positief (zie Figuur 17). Maar wat is dan wel de optimale torus? Het Eulergetal van de torus geeft ons een hint: het is 0 dus volgens Gauss–Bonnet is de totale kromming ook 0. Als we elk punt hetzelfde willen laten zijn dan moet de kromming dus overal 0 zijn. Kromming 0 betekent plat, dus we zoeken een volstrekt platte torus. Dat is moeilijk voor te stellen maar het dichtstbij komt de bouwplaat zelf: een vierkantje uit het platte vlak waarvan de tegenoverliggende zijden aan elkaar zouden moeten zitten. De kromming in de punten op de rand van het vierkant lijkt misschien meer dan 0, maar dat komt omdat hier juist twee (of vier) randpunten aan elkaar vastzitten. De hoeken moeten we dan optellen en zo komt de kromming overal netjes op 0.

Het in zijn geheel zien van de optimale meetkundige vorm van de meeste oppervlakken is helaas geen optie. Onze ruimte \mathbb{R}^3 is er te klein voor, ze passen er niet in. Wat we wel goed kunnen zien zijn de optimale bouwplaten. Als het oppervlak er toch overal hetzelfde uitziet is het misschien niet eens zo erg om het hier en daar open te snijden zodat we het beter kunnen zien. Zo kwamen we aan het platte vierkantje voor de torus.

De fles van Klein, de ring en de Möbiusband hebben ook allemaal Eulergetal 0, dus de al bekende platte bouwplaten zijn optimaal.

Voor de schijf en het projectieve vlak ligt de situatie een beetje subtieler: het Eulergetal is voor beide gelijk aan 1, dus volgens onze logica moeten we ze overal positief laten krommen, net als de bol. In het geval van de schijf zijn we dus op zoek naar een stukje bol. Alle inwendige punten hebben dan namelijk de goede kromming.

De vraag is alleen welk deel van de bol we het beste kunnen kiezen. Ook hier heeft Gauss–Bonnet een antwoord op. Het Eulergetal van de bol is precies de helft van het Eulergetal van de schijf (zie Figuur 7). Volgens Gauss–Bonnet is de totale kromming van de optimale schijf dus ook precies de helft van de totale kromming van de bol. Als de krom-



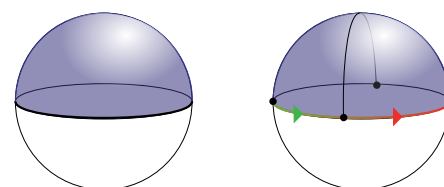
Figuur 17 Links de gebruikelijke, niet optimale torus. De kromming is aangegeven in kleur, blauw is positief, rood negatief. Rechts de optimale platte bouwplaat van de torus.

ming gelijk verdeeld is, moeten we dus wel de halve bol kiezen.

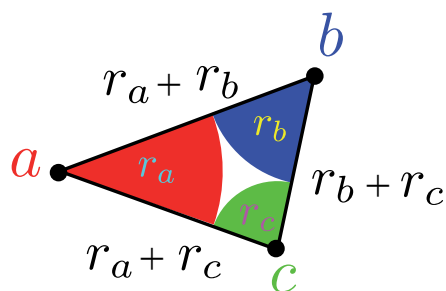
Er is alleen wel iets speciaals aan de hand met de randpunten van onze schijf. Daar is de kromming precies half zo groot als in de rest van de punten. De optimale kromming is dus overal constant maar net de helft op de rand. Dat klopt mooi met onze intuïtie dat de totale kromming van het geheel de som is van de totale krommingen van de delen.

Het projectieve vlak is wat lastiger om een optimale bouwplaat voor te vinden want tot nu toe hadden we er nog helemaal geen bouwplaat van. Het enige dat we wisten was dat de punten van het projectieve vlak uit paren tegenoverliggende punten op de bol bestaan. Kiezen we van ieder puntenpaar het punt op het noordelijk halfrond dan krijgen we een bouwplaat in de vorm van de optimale schijf. Alleen moeten we op de evenaar de tegenoverliggende punten nog aan elkaar plakken, zie Figuur 18 (rechts). Met rode pijlen hebben we aangegeven hoe het plakken moet gebeuren. We merken op dat de kromming in de punten op de evenaar aan de rand van de bouwplaat precies de helft is van de kromming van de andere punten. Gelukkig plakken we aan ieder randpunt een ander randpunt vast zodat de kromming inderdaad overal constant en dus optimaal wordt.

En hoe zit het met de oppervlakken met negatieve Eulergetallen? Bijvoorbeeld een bol met drie gaten. Die passen noch in het vlak noch op de bol, want in hun optimale meetkunde is de kromming steeds negatief. Is er wel een ruimte waar we bouwplaten mooi op neer kunnen leggen? Het antwoord is het *hyperbolische vlak*. Het is de tegenhanger van de bol en is juist op ieder punt negatief gekromd, als een zadel.



Figuur 18 Links de optimale schijf. Rechts de optimale bouwplaat voor het projectieve vlak.



Figuur 19 Een driehoek gevormd door de cirkelmetriek. De lengten van de zijden zijn r_a+r_b , r_b+r_c en r_c+r_a .

Zo krijgt ieder oppervlak, hoe ingewikkeld ook, zijn optimale vorm binnen een van de drie fundamentele meetkundes: Bolmeetkunde voor positieve Eulergetallen (positieve kromming), de vlakke meetkunde voor Eulergetal 0 en de wat minder bekende *hyperbolische meetkunde* voor $\chi < 0$. Dit resultaat staat wel bekend als de *Uniformisatiestelling*. Poincaré en Felix Klein (van de fles) bewezen hem onafhankelijk rond 1882, voordat Poincaré zich met driedimensionale ruimten bezighield en zijn beroemde vermoeden formuleerde.

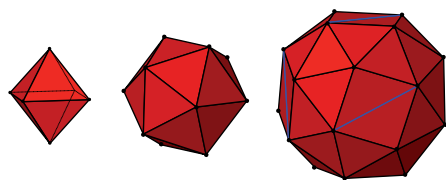
Het werk van Perelman draait om een driedimensionale versie van de uniformisatiestelling. Iedere 3-ruimte krijgt ook een optimale vorm. We komen daar straks op terug.

Opgave. Probeer een oppervlak in \mathbb{R}^3 te schetsen dat *overal* negatieve kromming heeft.

Cirkelmetrieken

Vanaf nu beperken we ons voor het gemak tot een speciaal soort metrieken, namelijk de zogenaamde *cirkelmetrieken* (ook wel *conforme metrieken*). Een gewone metriek is niets meer dan het geven van de lengte van iedere lijn van je triangulatie. Bij een cirkelmetriek kennen we juist aan ieder punt van de triangulatie een positief getal (de straal) toe. De lengte van de lijnen zelf is dan gegeven door de som van de stralen, zie Figuur 19.

Definitie 6. Een *cirkelmetriek* op een getrianguleerd oppervlak is een functie $r : V \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$. Dus aan ieder punt p kennen we een getal r_p toe. En de lengte van zijde pq wordt gegeven door $r_p + r_q$.



Figuur 20 Drie metrieken met constante kromming op de bol. De rechter is geen cirkelmetriek want de lengte van de blauwe zijden zijn onmogelijk.

Cirkelmetrieken zijn veel bijzonderder dan gewone metrieken. Voor cirkelmetrieken hoeven we bijvoorbeeld de driehoeksongelijkheden niet apart te controleren. Ze volgen automatisch uit de constructie. Dat maakt cirkelmetrieken makkelijker om mee te werken, want alle driehoeken zijn altijd automatisch nette rechte euclidische driehoeken.

Ons hele verhaal draait om de volgende discrete versie van de uniformisatiestelling die we in de vorige paragraaf tegenkwamen. De stelling laat zien dat er optimale cirkelmetrieken bestaan.

Stelling 3 (Discrete uniformisatiestelling). *Voor iedere triangulatie van een oppervlak is er een (op schaling na) unieke cirkelmetriek met constante kromming.*

Met schaling bedoelen we dat we alle stralen met dezelfde factor mogen vermenigvuldigen. Er verandert dan immers niets aan de hoeken en dus aan de kromming. Heeft ons oppervlak een rand, dan bedoelen we met de term constante kromming dat de kromming in de randpunten half zo groot is als de kromming in de inwendige punten.

De regelmatige veelvlakken geven eenvoudige voorbeelden van de stelling in het geval van de bol. Ze hebben duidelijk constante kromming door hun symmetrie. De regelmatige octaëder en de icosäëder in Figuur 20 zijn inderdaad de cirkelmetrieken, waarbij alle stralen even groot zijn. De afgeknotte kubus rechts is daarentegen wel een voorbeeld van een metriek met constante kromming (weer door symmetrie), maar geen cirkelmetriek. Dat komt omdat we de vierkante vlakken met blauwe lijnen in tweeën moesten verdelen om er een triangulatie van te maken. De lengten van de blauwe lijnen kunnen echter niet komen van een cirkelmetriek. Omdat alle andere zijden dezelfde lengte hebben moeten alle stralen namelijk gelijk zijn, maar dan moeten de blauwe lijnen even lang zijn als de zwarte en dat is niet zo.

Op de torus heet de cirkelmetriek met constante kromming ook vaak een *circle packing*, zie Figuur 21. Als we rond punt p de cirkel met straal r_p tekenen raken de cirkels elkaar namelijk precies. Het patroon waarin de cirkels elkaar raken wordt gegeven door de triangulatie. Merk op dat er in beide triangulaties maar twee punten zijn. De vier hoekpunten van het vierkant stellen namelijk hetzelfde punt op de torus voor. Daarom zijn de cirkels in deze vier punten ook even groot. We zouden ze eigenlijk als kwartcirkels moeten tekenen want samen vormen ze een grote cirkel op de torus.

Iets ingewikkelder is het voorbeeld in Figuur 22, op de computer berekend met de Ricci-flow uit de volgende paragraaf.

In de volgende paragraaf zullen we een bewijs van Stelling 3 schetsen. Deze paragraaf sluiten we af met een korte blik in de driedimensionale meetkunde.

Opgave. Zijn er tetraëders in \mathbb{R}^3 waarvan de lengten van de zijden nooit van een cirkelmetriek kunnen komen? Wat is de relatie met vier elkaar paarsgewijs rakende bollen? Bereken de optimale cirkelmetriek voor de triangulatie van de schijf met één inwendig punt, drie punten op de rand en drie driehoeken (een tetraëder zonder grondvlak).

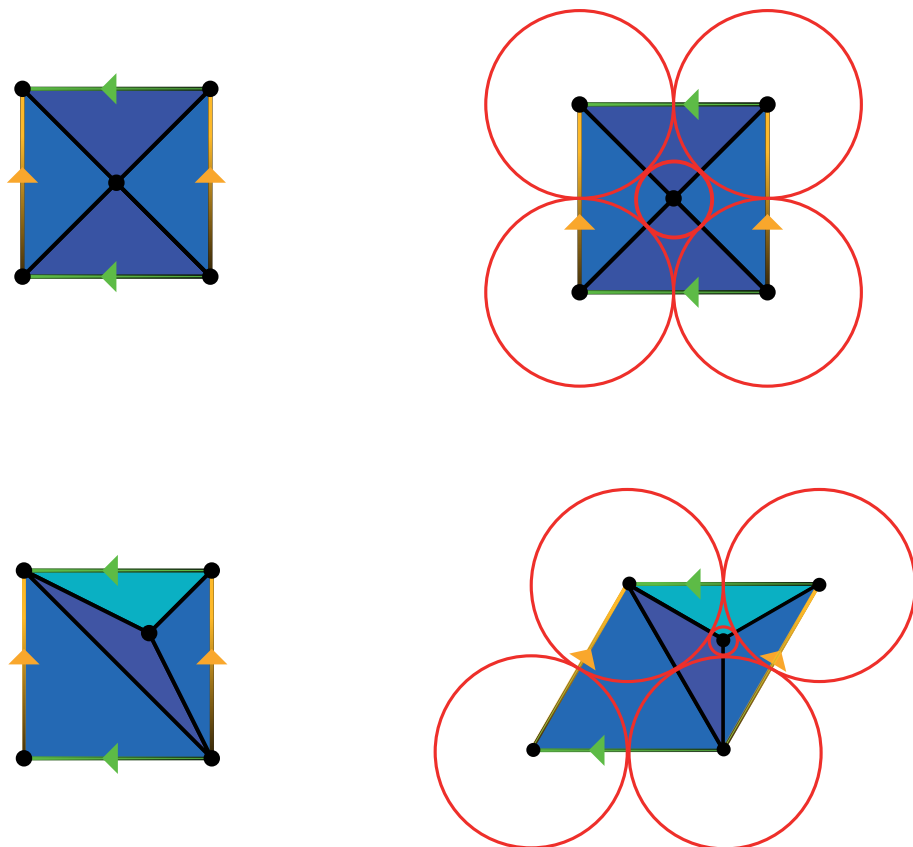
Meetkunde in drie dimensies

Ook voor 3-ruimten kunnen we metrieken invoeren, weer door de lengten van de zijden van de tetraëders vast te leggen. Het begrip kromming is hier alleen veel subtieler. Er zijn namelijk veel meer manieren om krom te zijn. Hoe hoger de dimensie, hoe meer getallen er nodig zijn om de kromming in een enkel punt weer te geven. Een manier om de kromming van een 3-ruimte te onderzoeken in een punt p is als volgt. We bekijken alle mogelijke deeloppervlakken die door zijvlakken van de tetraëders rond p gevormd worden. Ieder oppervlak heeft een kromming die we kunnen berekenen. Al deze krommingen samen geven een idee van de driedimensionale kromming in het punt p .

De uniformisatiestelling voor oppervlakken zegt dat we van ieder oppervlak een bouwplaat maken die constante kromming heeft. Afhankelijk van het Eulergetal χ moeten we hiervoor de bolmeetkunde gebruiken ($\chi > 0$), de vlakke euclidische meetkunde ($\chi = 0$) of de hyperbolische meetkunde ($\chi < 0$).

Rond 1980 formuleerde de Amerikaanse wiskundige William Thurston een equivalente stelling voor 3-ruimten, het zogenaamde *geometrisatievermoeden*. Naast de driedimensionale bolmeetkunde, euclidische en hyperbolische meetkunde had Thurston nog vijf andere soorten meetkunde nodig.

De laatste vijf zijn nodig omdat het niet meer altijd mogelijk is om de driedimensionale kromming overal constant te krijgen. Thurstons oplossing was om in die gevallen een voorkeursrichting te kiezen en te eisen dat de kromming van alle oppervlakken loodrecht daarop constant was. Dit fenomeen komt bijvoorbeeld voor bij de 3-ruimten die we maakten uit oppervlakken door prisma's op de driehoeken te leggen. Die prisma's ge-



Figuur 21 Twee triangulaties van de torus met eraanst de unieke cirkelmetriek met constante kromming 0. De rode cirkels geven de stralen aan.

ven zo'n voorkeursrichting en loodrecht daarop bepaalt het oorspronkelijke oppervlak de kromming.

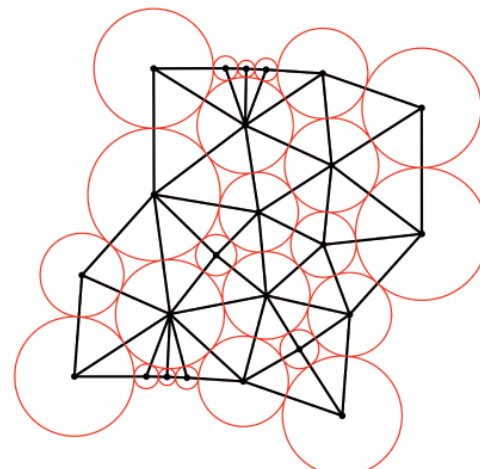
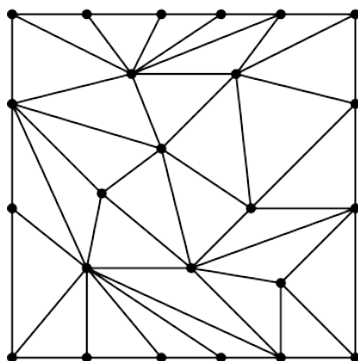
Thurston's geometrisatievermoeden was dat iedere 3-ruimte een bouwplaat heeft die precies zo kromt als een van de acht optimale soorten meetkunde voorschrijft. Deze bouwplaat stelt dan de optimale standaardvorm van de 3-ruimte voor, zijn blauwdruk. Net als de uniformisatiestelling geeft het een ruwe classificatie van alle 3-ruimten in termen van meetkunde. Het grote voordeel is dat we nu met meetkunde kunnen onderzoeken wat de mogelijkheden zijn voor de bouwplaten.

Uit het geometrisatievermoeden volgt dat het Poincaré-vermoeden waar is. Hoe dat precies gaat voert te ver, maar het komt erop neer dat we ruimten die sterk lijken op de 3-bol volgens het geometrisatievermoeden ook een bouwplaat in de bolmeetkunde moeten hebben. Omdat bolmeetkunde relatief eenvoudig is, zijn er dan geen andere mogelijkheden meer dan de 3-bol zelf.

De grote doorbraak van Perelman was om Thurston's geometrisatievermoeden in zijn geheel te bewijzen. Zijn bewijs is erg gecompliceerd, maar in de volgende paragraaf zullen we de hoofdpunten van zijn techniek aan de hand van oppervlakken illustreren.

Opgave. De 3-torus kunnen we maken met de optimale meetkunde door de tegenoverliggende zijden van een kubusvormige kamer aan elkaar te plakken. De optimale meetkunde op de 3-bol komt van de eenheidsbol in \mathbb{R}^4 .

Om wat meer gevoel te krijgen voor de meetkunde van de 3-bol en de 3-torus stel je voor dat je in een ruimteschip binnenin een van deze ruimten zou rondvliegen. Als we aannemen dat licht de kortste weg



Figuur 22 Een triangulatie van de torus met de bijbehorende kromming 0 cirkelmetriek. Tegenoverliggende cirkels aan de rand van het vierkant zijn even groot.

neemt, wat zou je dan zien? Kun je jezelf zien? En zo ja, hoe dan?

Perelmans Ricci-flow

In deze paragraaf geven we een inleiding op de Ricci-flow. Dit is de techniek waarmee Perelman het geometrisatievermoeden en daarmee het Poincaré-vermoeden de baas kon. Het woord *flow* slaat op een stroming, een proces waarin we de metriek op onze ruimte geleidelijk laten veranderen. Ricci is de naam van een Italiaanse tijdgenoot van Poincaré die onderzoek deed naar kromming.

Zoals in de vorige paragrafen, concentreren we ons hier op oppervlakken en in het bijzonder cirkelmetrieken. Met behulp van de Ricci-flow zullen we laten zien hoe je een willekeurige cirkelmetriek kunt laten veranderen in de unieke cirkelmetriek van constante kromming. Dit geeft een bewijs van de discrete uniformisatiestelling (Stelling 3)

Tot slot zullen we wat opmerkingen maken over problemen die in het driedimensionale geval een rol spelen en noemen we een aantal onverwachte toepassingen van Ricci-flow.

Ricci-flow op oppervlakken

Het basisidee van Ricci-flow is heel eenvoudig. Stel we hebben een getrianguleerd oppervlak en we zoeken er de cirkelmetriek bij die een zo constant mogelijke kromming heeft. Om te beginnen kiezen we een *willekeurige* cirkelmetriek² en passen die dan stapje voor stapje aan zo dat de kromming steeds beter verdeeld raakt.

Om de kromming overal gelijk te maken aan het gemiddelde gaan we als volgt te werk. Is de kromming in een punt p te groot? Dan passen we de straal r_p in het punt p wat aan. Maken we de straal groter, dan wordt ook de kromming κ_p groter en maken we de straal

kleiner dan neemt juist de kromming ook af in p . Intuïtief volgt dit al uit Figuur 16. Een scherpe punt heeft een grote kromming en lange zijden. Maken we de zijden wat korter dan neemt de kromming af.

Omdat dit het fundament van de Ricci-flow is gaan we nog wat preciezer na waarom dit zo werkt. De kromming is 2π min de som van de omliggende hoeken. In Figuur 23 zien we waarom vergroten van de straal in een punt p juist de hoeken rond p verkleint en zo de kromming vergroot. We kunnen deze observatie ook nagaan door met de cosinusregel de hoek α in de figuur uit te rekenen in termen van de stralen. Differentiëren naar r_p geeft dan inderdaad iets negatiefs.

Helaas heeft het veranderen van de straal in p niet alleen effect op de kromming in p maar ook op de kromming in de naburige punten. Wat gebeurt er met die krommingen? Zij gedragen zich precies tegengesteld. Dat moet ook want anders zou de totale kromming niet behouden kunnen blijven onder deze verandering van metriek (Gauss–Bonnet). Ook dit kunnen we vinden door stug door te rekenen met de cosinusregel.

Samenvattend zien we de kromming in een punt p nu als een functie $\kappa_p(r_p, r_q, r_s, \dots)$ van de stralen r_p, r_q, r_s, \dots van p en de omliggende punten q, s, \dots . Uit de figuur blijkt dat de kromming heel eenvoudig reageert op veranderingen van de stralen. Dit kunnen we samenvatten in de volgende ongelijkheden:

$$\frac{\partial \kappa_p}{\partial r_p} > 0 \text{ en } \frac{\partial \kappa_q}{\partial r_p} < 0. \tag{1}$$

Uit het behoud van de totale kromming (Gauss–Bonnet) volgt dat er precies evenveel kromming bij de buurpunten komt als er afgaat in het punt p als we r_p verkleinen.

Hoewel dit een goed begin is, is het nog niet direct duidelijk dat we zo de kromming ook daadwerkelijk gelijk kunnen verdelen. Neem bijvoorbeeld een tetraëder met twee heel scherpe punten p en q van gelijke kromming. Verkleinen we de kromming in p door de straal r_p te verkleinen, dan vergroten we de kromming κ_q juist. Natuurlijk wordt de kromming in de stompe punten ook iets groter. In dit eenvoudige geval kunnen we dit oplossen door dan gewoon de κ_q weer kleiner te maken, zo klein als hij eerst was. Dit heeft tot gevolg dat κ_p weer groter wordt maar niet zo groot als hij was, want er is wat kromming ‘weggelekt’ naar de andere twee punten.

Toch is het nog steeds niet helemaal duidelijk dat we de kromming ook overal exact

gelijk kunnen krijgen op deze manier. Waarom blijft het bijvoorbeeld niet eindeloos op en neer gaan? In de volgende paragraaf geven we daarom een wat gestructureerdere versie van dit proces waarbij we dit wel kunnen bewijzen.

Opgave. Vereenvoudig het voorbeeld van de tetraëder hierboven zo dat de stralen in twee punten gelijk zijn aan x en de stralen in de twee andere punten gelijk zijn aan y . Bereken hoe we in dit geval stap voor stap x en y dichter bij elkaar krijgen zo dat de kromming constant wordt.

Differentiaalvergelijkingen

Om meer greep te krijgen op het veranderen van de stralen en de verschillende krommingen schreef Perelman de cirkelmetriek als een functie van de tijd. Voor ieder punt p hebben we dus een bijbehorende straal $r_p(t)$ op tijdstip t . De kromming in p berekenen we steeds uit de stralen, dus die wordt zo ook een functie van t . We schrijven $\kappa_p(t)$. In termen van deze functies kon Perelman heel precies voorschrijven hoe de functies moesten veranderen. Deze regels zijn te schrijven in de vorm van een stelsel differentiaalvergelijkingen dat de Ricci-flow heet.

We beginnen met een eenvoudig voorbeeld, de triangulatie van de torus met twee punten uit Figuur 21.

Voor het gemak stellen we de straal van het punt q gelijk aan 1. Dat kan, want alles is

toch bepaald op schalen na. De straal r_p in het inwendige punt p noemen we in de figuur voor het gemak r . Zoals blijkt uit Figuur 24 is de kromming in het punt p gelijk aan

$$\kappa_p(t) = 2\pi - 4 \arccos \left(1 - \frac{2}{(1 + r_p(t))^2} \right).$$

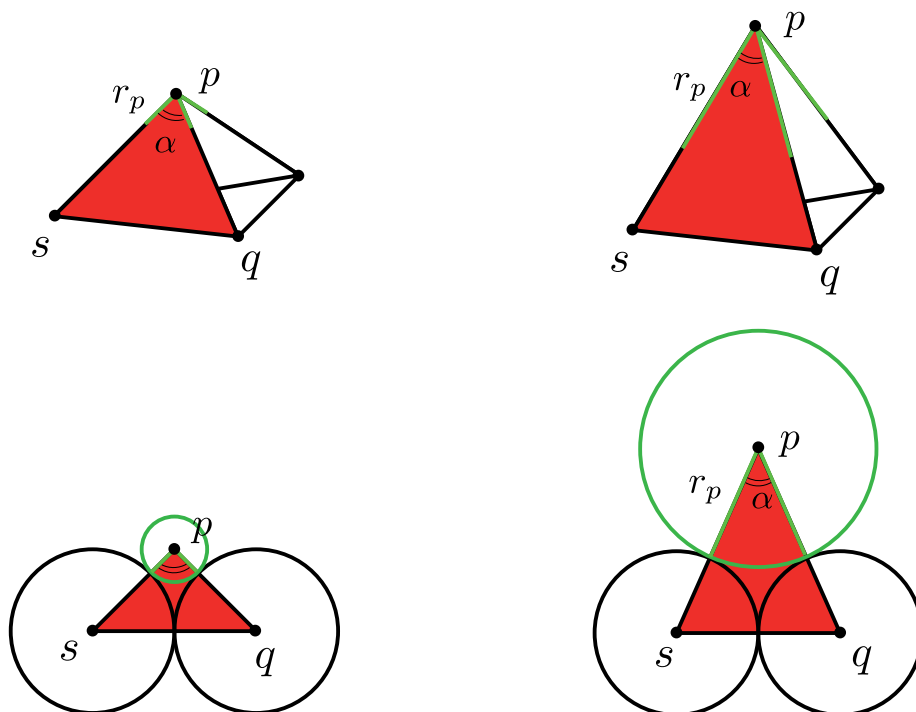
De hoeken rond p zijn namelijk alle vier gelijk aan α en die vinden we uit de cosinusregel.

Begin nu met een willekeurige cirkelmetriek op tijdstip $t = 0$. In ons voorbeeld is $r_p(0) \approx 0,8$, getekend als de gele cirkel. Het Ricci-flowproces houdt nu steeds bij hoe ver de kromming op tijdstip t weg is van de gewenste constante kromming κ_G . Het verschil geven we aan met $\bar{\kappa}_p(t) = \kappa_p(t) - \kappa_G$. In ons voorbeeld van de torus is $\kappa_G = 0$, dus $\bar{\kappa}_p(t) = \kappa_p(t)$.

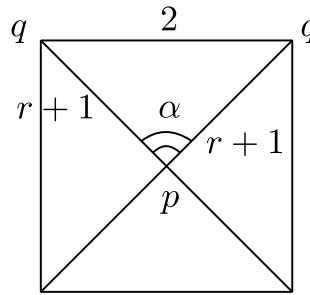
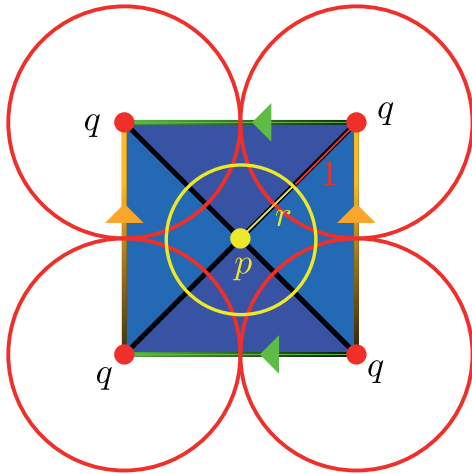
We passen de stralen $r_p(t)$ aan zo dat $\bar{\kappa}_p(t)$ steeds kleiner wordt en hopelijk naar 0 gaat voor t naar oneindig. Dat doen we zoals eerder: als $\bar{\kappa}_p(t)$ positief is dan moet $r_p(t)$ afnemen, dus $\frac{dr_p(t)}{dt} < 0$. Is $\bar{\kappa}_p(t)$ negatief, dan moet de afgeleide juist positief zijn. Dit drukken we uit met behulp van de volgende differentiaalvergelijking (discrete Ricci-flow):

$$\frac{dr_p(t)}{dt} = -r_p(t)\bar{\kappa}_p(t). \tag{2}$$

De Ricci-flow is niets anders dan een precisering van onze eerdere wensen. Om be-



Figuur 23 Vergroten van de straal r_p in punt p verkleint de hoek α en vergroot dus de kromming κ_p in p .



Figuur 24 Ricci-flow op de torus. De straal van het middelste punt p (geel) noemen we r , de straal van het andere punt q (rood) zetten we stil op 1.

ter te zien hoe dit werkt laten we de tijd in stapjes Δt lopen. Dan kunnen we de afgeleide benaderen met het differentiequotient $\frac{r_p(t+\Delta t) - r_p(t)}{\Delta t}$ en krijgen we:

$$r_p(t + \Delta t) = r_p(t)(1 - \bar{\kappa}_p(t)\Delta t).$$

Dus de straal een tijdje later, $r_p(t + \Delta t)$ is de straal nu, $r_p(t)$ vermenigvuldigd met $1 - \bar{\kappa}_p(t)\Delta t$. De factor $1 - \bar{\kappa}_p(t)\Delta t$ reguleert of de nieuwe straal groter of kleiner zal worden. Is $\bar{\kappa}_p(t)$ positief, dan is de kromming te groot en weten we dat r_p kleiner moet worden. Dat klopt want dan is de factor juist kleiner dan 1. Anders is de factor juist groter dan 1.

Anders dan in ons intuïtieve voorbeeld met de tetraëder veranderen we volgens de Ricci-flow alle stralen tegelijk. Voor ieder punt p hebben we dezelfde vergelijking (2) (de precieze formule voor de kromming is voor iedere p net anders). De Ricci-flow zorgt er op deze manier voor dat we een straal nooit te veel tegelijk aanpassen. We gaan dus recht op ons doel (constante kromming) af zoals inderdaad blijkt uit de volgende stelling.

Stelling 4. Voor iedere cirkelmetriek ρ is er een unieke oplossing $r(t)$ van de Ricci-flowvergelijkingen met $r(0) = \rho$. Deze oplossing convergeert naar de unieke cirkelmetriek met constante kromming.

Aan de hand van ons eenvoudigste geval op de torus schetsen we het bewijs van deze stelling.

Hiervoor gebruiken we de volgende substitutie. We gaan over op de variabele $u = \ln r_p$, dus $\frac{1}{r_p} \frac{dr_p}{dt} = \frac{du}{dt}$. Als we de notatie $k(u) = \kappa_p(e^u)$ gebruiken gaat de Ricci-flowvergelijking (2) over in:

$$\frac{du}{dt} = -k(u).$$

Hier kunnen we al veel aan zien, maar we maken het nog wat mooier door een primitieve $K(u) = \int_0^u k(v)dv$ in te voeren, dus $K' = k$. De Ricci-flow ziet er dan uit als:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{dK}{du}. \tag{3}$$

Dit lijkt een nietszeggende verandering, maar de vorm van deze vergelijking is heel bijzonder. Het is een zogenaamde *gradiënt-stroming*. Dat betekent dat we de vergelijking als volgt kunnen lezen. We stellen ons $u(t)$ voor als de projectie op de horizontale as van een balletje dat over de grafiek van $K(u)$ rolt, zoals in Figuur 25. De positie van het balletje is dus $(u, K(u))$ en u verandert in de tijd volgens de differentiaalvergelijking (3). In het linkerlid staat namelijk dat de horizontale snelheid van het balletje $\frac{du}{dt}$ gegeven wordt door de helling $-\frac{dK}{du}$ van de grafiek van K op dat punt. Het minteken zorgt ervoor dat het balletje daadwerkelijk omlaag rolt.

Maar als het balletje dan omlaag rolt, waar rolt het dan heen? We weten dat $K' = k$ en $k(u) = \kappa(e^u)$. Bovendien was de afgeleide van $\kappa(r)$ naar r positief, zie vergelijking (1). Volgens de kettingregel is $K''(u)$ daarom altijd groter dan 0. Dat betekent dat de grafiek dalvormig is met een uniek minimum bij $u = u_{\min}$. Volgen we het balletje dus maar lang genoeg, dan ligt het uiteindelijk op het minimum en daar blijft het stabiel liggen. Zo weten we dus zeker dat $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = u_{\min}$.

Vertalen we dit terug naar de gewone straal $r = e^u$, dan komen we tot de volgen-

de conclusie: ongeacht de beginstraal $r(0)$ convergeert de Ricci-flow $r(t)$ naar de waarde $r_{\min} = e^{u_{\min}}$. r_{\min} is bovendien de optimale cirkelmetriek, dus met $\bar{\kappa}(r_{\min}) = 0$. Dat komt omdat als we de definities teruglezen, we zien dat:

$$\kappa(r_{\min}) = k(u_{\min}) = K'(u_{\min}) = 0.$$

De laatste formule is 0 omdat u_{\min} het minimum van K is. In dit voorbeeld is $r_{\min} = \sqrt{2} - 1$.

Precies dezelfde redenering werkt ook als we meer punten (en dus variabelen) hebben. Voor ieder punt p gaan we dan over op de nieuwe variabele $u_p = \ln r_p$. Net als eerder stellen we $k_p(u_p) = \bar{\kappa}_p(e^{u_p})$ en gaat de Ricci-flowvergelijking over in:

$$\frac{du_p}{dt} = -k_p(u_p).$$

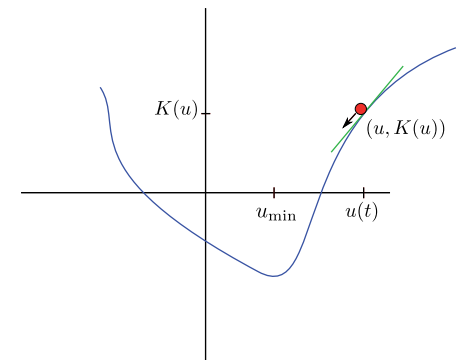
Nu gaat de truc van de primitieve werkelijk een rol spelen. We kiezen namelijk één enkele functie $K(u_p, u_q, \dots)$ die afhangt van alle variabelen u_p, u_q, \dots zo dat $\frac{\partial K}{\partial u_p} = k_p$. Net als eerder kunnen we K weer schrijven als een (wat ingewikkelder) integraal.³

De Ricci-flow gaat nu over in de vergelijking

$$\frac{du_p}{dt} = -\frac{dK}{du_p}.$$

Hier staat weer de gradiënt-stroomvergelijking, maar nu in meerdere variabelen. We kunnen deze vergelijking nog steeds interpreteren als het rollen van een balletje over de grafiek van de functie $K(u_p, u_q, \dots)$. De functies $u_p(t)$ geven dan de coördinaten aan van de horizontale positie van het balletje.

Door te differentiëren kunnen we weer inzien dat de grafiek van K een dalvorm heeft.



Figuur 25 De grafiek van K gezien als functie van u . Het balletje rolt langs de grafiek naar beneden met snelheid $-K'(u)$.

Zo concluderen we dat het balletje weer naar het unieke minimum van K rolt en is de stelling bewezen. De Ricci-flow convergeert dus naar de unieke cirkelmetriek waar $\bar{\kappa}_p = 0$ ofwel $\kappa_p = \kappa_G$, de kromming is constant.

Hier en daar hebben we wat details weggelaten maar de hoofdlijn van het bewijs is hopelijk duidelijk geworden. Het volledige bewijs is te vinden in [5, Stelling 1.2].

Opgave. Teken een triangulatie op de torus met drie punten en vind hier de optimale cirkelmetriek bij met behulp van de Ricci-flow. Stel een van de stralen in de cirkelmetriek gelijk aan 1. De twee andere stralen zijn variabelen r en s . Schrijf de kromming in de twee punten in termen van r en s . Ga over op de variabelen $u = \ln r$ en $v = \ln s$ en vind een 'primitieve' K voor de krommingsfuncties.

Drie dimensies

In drie dimensies is het nog steeds mogelijk om de vergelijkingen van de Ricci-flow op te schrijven, maar er werkelijk iets over zeggen vereist heel veel nieuwe wiskundige techniek. Een groot probleem is dat er geen equivalent van het Eulergetal is die ons vertelt welke kromming we precies kunnen verwachten. Het was van groot belang om in de vergelijkingen van de vorige paragraaf te werken met de afwijking van de kromming van de gemiddelde kromming $\bar{\kappa}_p = \kappa_p - \kappa_G$. Maar wat als we niet weten wat κ_G is? Probeer bijvoorbeeld de Ricci-flow met de verkeerde κ_G op de tetraëder. Nemen we $\kappa_G = 0$, dan proberen we de positief gekromde tetraëder plat te maken maar volgens Gauss–Bonnet kan dat nooit. De tetraëder zal dus terugvechten en zorgen dat de Ricci-flow spaak loopt. Als je het probeert zul je zien dat alle stralen gelijk aan 0 worden. Positieve kromming geeft namelijk kleinere stralen.

In drie dimensies is het zelfs nog erger, verschillende delen van de 3-ruimte kunnen neigen naar een verschillende meetkunde. De optimale bouwplaat bestaat dan uit een aantal losse stukken. Dat openbaart zich dan als het opblazen van de Ricci-flow langs een bepaald oppervlak in de 3-ruimte. Daarlangs moet de 3-ruimte vervolgens worden opengesneden om de Ricci-flow op ieder afzonderlijk stuk opnieuw te starten.

Perelman bewees onder andere dat de Ricci-flow maar eindig vaak opblaast zodat we eindig veel meetkundige stukken overhouden.

Toepassingen

Tot slot bespreken we kort een aantal eenvoudigere toepassingen van Perelmans Ricci-flow. Belangrijk hierbij is dat onze discrete Ricci-flow niet alleen convergeert naar de optimale metriek, maar dat de convergentie ook uitzonderlijk snel gaat. Daardoor is de techniek populair geworden in de numerieke wiskunde en computergraphics.

Zelfs voor de schijf, het eenvoudigste oppervlak, zijn er interessante toepassingen mogelijk. Zo zegt de stelling van Fáry bijvoorbeeld dat als een graaf in het vlak getekend kan worden, we dit kunnen doen met alleen maar rechte lijnen. Met Ricci-flow kunnen we zo'n tekening eenvoudig vinden. Hieronder beschrijven we kort hoe dat in zijn werk gaat.

Door wat lijntjes toe te voegen maken we van de graaf een triangulatie van de schijf. Op deze triangulatie laten we Ricci-flow los en zo vinden we de cirkelmetriek met constante (positieve) kromming. De driehoeken kunnen we in \mathbb{R}^3 tekenen als rechte euclidische driehoeken en vormen een mooie benadering van het zuidelijk halfrond van een ronde bol. Projecteren vanuit de noordpool zoals in Figuur 26

geeft de gezochte triangulatie met rechte lijnen in het vlak. De oorspronkelijke graaf is daar onderdeel van.

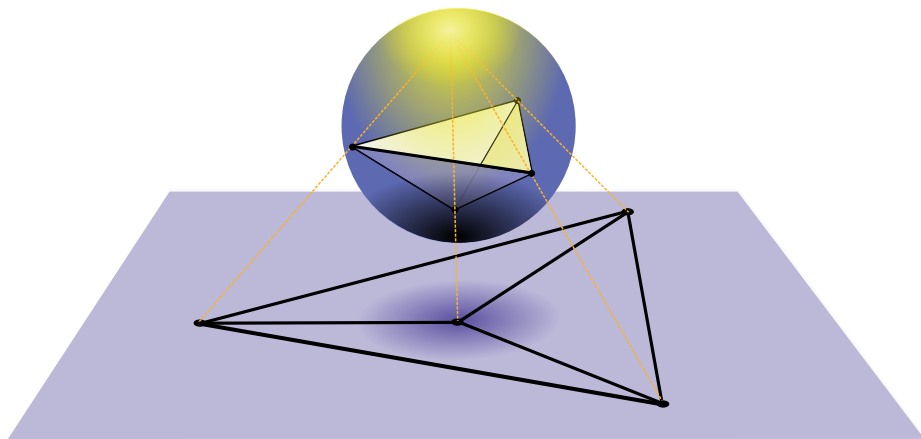
Een ingewikkelder stelling langs dezelfde lijnen is de *afbeeldingsstelling van Riemann*. Deze beroemde stelling uit de complexe functietheorie zegt dat ieder gebied in het vlak hoekbehoudend op de eenheidsschijf kan worden afgebeeld. Met andere woorden, we kunnen een een-op-een-verband vinden tussen de punten in het gebied en alle punten in de cirkelschijf. Met hoekbehoudend bedoelen we dat de hoek tussen twee lijnen in het gebied gelijk is aan de hoek tussen de corresponderende kromme lijnen in de schijf. Weer geeft de Ricci-flow een snelle benadering voor deze stelling. Dat gaat als volgt.

Kies een gebied en betegel het vlak erin en eromheen met kleine gelijkzijdige driehoekjes van dezelfde grootte in regelmatig honingraatpatroon. Alle driehoekjes die binnen het gebied vallen vormen samen een oppervlak dat ons gebied benadert. Topologisch gezien is dit oppervlak natuurlijk al een schijf, maar met Ricci-flow kunnen we die schijf in optimale vorm brengen zoals hierboven. De halve bol die we zo krijgen projecteren we weer vanuit de noordpool op het vlak zoals in Figuur 26. Zo krijgen we een goede benadering van de ronde schijf.

Wat we hiermee bereikt hebben is een een-op-eenverband tussen de gelijkzijdige driehoekjes in het gebied en de driehoekjes in de ronde schijf. Hoe kleiner de driehoekjes waar je mee begint, hoe beter dit gaat lijken op Riemanns afbeelding. Een bewijs van de convergentie en de hoekbehoudendheid heeft wat meer voeten in de aarde. Een goed leesbaar bewijs hiervan is te vinden in het project van Joran van Apeldoorn en Nastasha Wijers, tweedejaars wiskunde aan de Universiteit van Amsterdam [1].

Soortgelijke resultaten kunnen natuurlijk ook voor andere oppervlakken worden gevonden en steeds leveren de cirkelmetrieken prachtige cirkelpatronen. De theorie staat daarom ook wel bekend onder de naam *circle packings*. Zie bijvoorbeeld [9] en ook de bijbehorende website (met software) www.circlepack.com.

Een andere erg mooie toepassing is het vinden van discrete minimale oppervlakken [8]. Hierbij speelt de Ricci-flow voor de bol een grote rol in de vorm van de discrete Gauss-afbeelding. Voor de theorie van discrete differentiaalmeetkunde verwijzen we tot slot naar [2].



Figuur 26 Met de stereografische projectie wordt de graaf op het zuidelijk halfrond van de bol geprojecteerd op het vlak.

Samenvatting

We hebben een overzicht gegeven van hoe topologie, meetkunde en differentiaalvergelijkingen nauw verweven zijn. De topologie vraagt naar de classificatie van alle mogelijke ruimten. Voor de eenvoudige oppervlakken hebben we gezien hoe dit in zijn werk gaat. Hier is een mooie classificatiestelling mogelijk, voornamelijk in termen van het Eulergetal. Voor de iets ingewikkeldere 3-ruimten is de classificatie meteen een ontzettend moeilijk probleem. Het Poincaré-vermoeden is hier een klein onderdeel van.


De doorbraak van Grigori Perelman was niet zo zeer alleen het bewijzen van het Poincaré-vermoeden als wel het veel omvangrijkere geometrisatievermoeden. Dit vermoeden hebben we aan de hand van oppervlakken leren kennen als de uniformisatiestelling: ieder oppervlak heeft een optimale vorm (bouwplaat). Dat wil zeggen een bouwplaat met con-

stante kromming. Perelman bewees dat voor 3-ruimten iets dergelijks geldt. Dit geeft een gedeeltelijke oplossing van het classificatieprobleem voor 3-ruimten, want als we weten dat ze een optimale meetkundige vorm dragen, hoeven we alleen nog maar de mogelijke meetkundige vormen in kaart te brengen. Dit is aanmerkelijk makkelijker en leverde meteen de bevestiging van Poincarés vermoeden.

De brug tussen topologie en meetkunde wordt voor oppervlakken geslagen door de stelling van Gauss–Bonnet. Het centrale meetkundige begrip (kromming) en het centrale topologische begrip (Eulergetal) worden hier direct aan elkaar gerelateerd. De totale kromming van het oppervlak is gelijk aan het Eulergetal. Ook in drie dimensies staan topologie en meetkunde alerminst los van elkaar, maar het verband is moeilijker precies te maken. Het in kaart brengen van de precieze relatie tussen to-

pologie en meetkunde van 3-ruimten blijft ook na Perelmans bewijs een actief en veelzijdig onderzoeksgebied.

In de laatste paragraaf hebben we een indruk gegeven van de werkelijke bewijstechniek van Perelman: de Ricci-flow. Met dit stelsel differentiaalvergelijkingen geeft hij letterlijk de ruimte vorm en brengt hij hem in zijn optimale gedaante. Voor oppervlakken konden we dit mooi illustreren met de volgende stelling: Iedere cirkelmetriek convergeert met de (discrete) Ricci-flow naar de optimale metriek van constante kromming. Hoewel de theorie van Perelman technisch gezien veel moeilijker is, zijn zo toch alle hoofdzaken aan bod gekomen.

Als bonus vonden we dat Ricci-flow en discrete meetkunde ook voor oppervlakken onverwachte toepassingen en inzichten oplevert. De mooie cirkelpatronen en veelvlakken geven zo een hint van hoe bijzonder de theorie in drie dimensies is. 

Noten

1 Dit konijn is de beroemde *Stanford bunny*. Een van de eerste ingescande 3D-modellen. Het is nog steeds een veel gebruikt voorbeeld in de

computergraphicswereld.

2 Bijvoorbeeld alle stralen gelijk aan 1.

3 K kan worden geïnterpreteerd als de inhoud van een prisma in de zin van de driedimensionale hyperbolische meetkunde.

Referenties

- J. van Apeldoorn en N. Wijers, Cirkels naar cirkels: discrete functietheorie en cirkelpakkingen, project 2e jaar wiskunde Universiteit van Amsterdam, 2013, <http://www.rolandvdv.nl/Files/Cirkels.pdf>.
- A. Bobenko en Y. Suris, Discrete Differential Geometry, *GSM* 98, American Mathematical Society, 2008.
- A. van den Brandhof, R. van der Veen, J. van de Craats en B. Koren, *De zeven grootste raadsels van de wiskunde*, Bert Bakker, 2012.
- J. Carstens en S. Eliens, TopWIS Poincaré, de Praktijk 2010, <http://www.praktijk.nu/lesmateriaal/42/topwis-poincare.html>.

- B. Chow en F. Luo, Combinatorial Ricci flows on Surfaces, *Journal of Differential Geometry* 63 (2003), 97–129.
- G. Francis en J. Weeks Conway's ZIP Proof, *American Mathematical Monthly* 106(5) (1999), 393–399.
- K. Landsman, De indexstelling van Atiyah en Singer, *Nieuw Archief voor de Wiskunde* 5/3 (2004), 207–211.
- S. Sechelmann, Discrete Minimal Surfaces, Koebe Polyhedra, and Alexandrov's Theorem. Variational Principles, Algorithms, and Implementation, <http://page.math.tu-berlin.de/~sechel/DiplomaThesis.pdf>.

- K. Stephenson, *Introduction to Circle Packing*, Cambridge University Press, 2005.
- J. Weeks, *The Shape of Space*, Chapman & Hall, 2e druk, 2001.