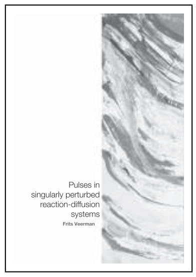
In de verdediging

In defence



Pulses in singularly pertubed reaction-diffusion systems
Frits Veerman

Op 25 september 2013 promoveerde Frits Veerman aan de Universiteit Leiden. Vlak na de verdediging van zijn proefschrift *Pulses in singularly perturbed reaction-diffusion systems* blikte hij terug op de afgelopen vier jaren. Die terugblik was vooral positief: hij heeft nooit echt vastgezeten met zijn onderzoek en de samenwerking met zijn begeleiders prof.dr. Arjen Doelman en dr. Vivi Rottschäfer was stimulerend en vruchtbaar. Hij noemt het zelfs hun verdienste dat zijn promotietijd zo soepel verliep. En niet alleen wiskundig-inhoudelijk ging het goed; hij denkt ook met veel plezier terug aan de tijd die hij doorbracht met zijn mede-aio's, vooral aan de keren dat ze samen op stap waren in het kader van conferenties of winter- of zomerscholen.

En plotseling ben je wiskunde aan het doen

Hoewel Veerman het voldoen aan de stellingen-eis van de Universiteit Leiden vooral als een procedurele kwestie heeft opgevat, is er toch een stelling die eruit springt: "Het feit dat toegepaste wiskunde de mogelijkheid biedt haar onderzoek op een toegankelijke manier uit te leggen, schept de verplichting dit ook te doen." Deze stelling sluit naadloos aan bij de introductie en samenvatting bij zijn proefschrift, waarin Veerman buitengewoon goed zijn best heeft gedaan om zijn werk aan een breder publiek uit te leggen. Voordat hij de titel van zijn proefschrift stap voor stap verklaart, besteedt hij zelfs aandacht aan de manier waarop wiskunde bedreven en beschreven wordt met behulp van symbolen en formules. "Als je symbolen en formules begint te gebruiken, en gaandeweg ervaren wordt in het lezen ervan, zul je merken dat de symbolen (en de ideeën die ze symboliseren) tastbaarder worden. Je krijgt meer en meer het gevoel waar het symbool eigenlijk voor staat, hoe het zich gedraagt, hoe het reageert op andere symbolen, wat het doet. Vervolgens kun je de symbolen heen en weer gaan schuiven, ze manipuleren, en ondertussen nieuwe symbolen introduceren omdat dat de handigste manier is om weer te geven wat je wil zeggen, en plotseling ben je wiskunde aan het doen."

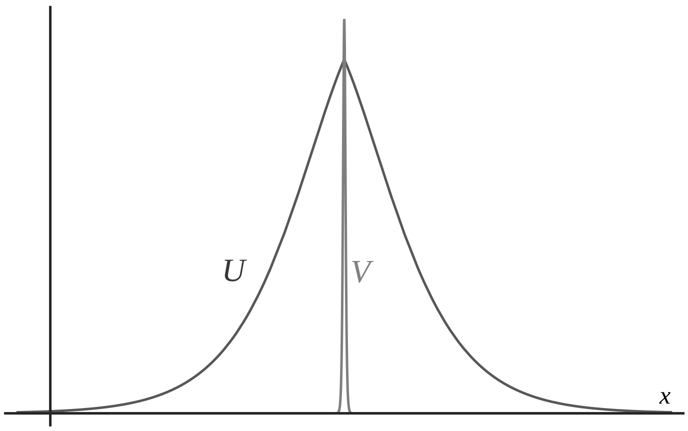
Pulsen als patronen

Binnen het onderzoeksgebied 'patroonvorming in natuurlijke systemen' worden (ruimtelijke) patronen onderzocht die kunnen ontstaan in modellen uit diverse natuurwetenschappen. Een pulsoplossing van zo'n model stelt een heel eenvoudig 'patroon' voor: bijvoorbeeld één hobbel en verder niks, of in twee dimensies één vlek op een dierenhuid, of één oase in de woestijn. Veermans onderzoek was gericht op de constructie en het gedrag van dergelijke pulsoplossingen in reactiediffusiesystemen.

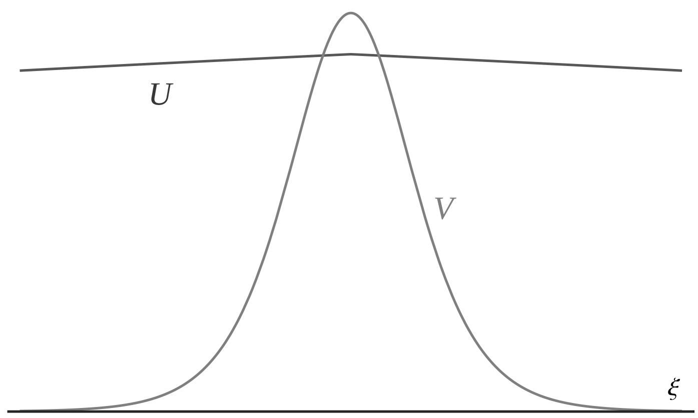
De reactie-diffusiesystemen waarin hij pulsoplossingen onderzocht vormen een klasse gekoppelde partiële differentiaalvergelijkingen. Veerman heeft zich beperkt tot twee gekoppelde vergelijkingen met een eendimensionale ruimtevariabele x, maar heeft de vorm van de

Pas gepromoveerden brengen hun werk onder de aandacht.
Heeft u tips voor deze rubriek of bent u zelf pas gepromoveerd?
Laat het weten aan onze redacteur.

Redacteur: Geertje Hek
la Voie-du-Coin 7
1218 Grand-Saconnex
Zwitserland
verdediging@nieuwarchief.nl



De U- en V-componenten van een typische één-pulsoplossing van (1) met $0 < \varepsilon \leq 1$. Het singuliere karakter van (1) leidt tot een zeer gelokaliseerde en steile puls voor V.



Een zoom van de linkerfiguur rond de puls in V. Het is duidelijk te zien dat de U-component nauwelijks varieert ten opzichte van de herschaalde ruimtelijke coördinaat $\xi = x/\varepsilon$.

vergelijkingen verder zo algemeen mogelijk gehouden. Dat is meteen een eerste bijzonder aspect aan zijn onderzoek: daar waar soortgelijk onderzoek tot nu toe bijna uitsluitend gedaan werd in de context van een vooraf gekozen (canoniek) modelprobleem, heeft Veerman laten zien dat het bestaan en het gedrag van pulsoplossingen expliciet kan worden geanalyseerd voor een grote algemene klasse reactie-diffusievergelijkingen van de vorm

$$\begin{cases} U_t = U_{xx} - [\mu U - \nu_1 F_1(U;\varepsilon)] + \dfrac{\nu_2}{\varepsilon} F_2(U,V;\varepsilon), \\ V_t = \varepsilon^2 V_{xx} - V + G(U,V;\varepsilon). \end{cases} \tag{1}$$

Hierin is ε een (asymptotisch) kleine parameter, stellen de subscripts afgeleiden naar t en x voor en zijn F_i en G vrij algemene niet-lineaire termen. Het onderzoek van Veerman richtte zich op pulsvormige oplossingen $(U(x,t), V(x,t))$ van deze vergelijkingen en hun afhankelijkheid van de parameters μ en ν_i.

Algemenere analyse met onverwachte resultaten

Niet alleen heeft Veerman laten zien dat expliciete analyse van pulsoplossingen in een heel algemene klasse vergelijkingen mogelijk is, er bleek bovendien dat deze algemene klasse systemen een veel diversere verzameling pulsoplossingen toestaat dan de tot nu toe bestudeerde modelproblemen. Na de existentie-analyse is lineaire en niet-lineaire stabiliteitsanalyse een natuurlijke volgende stap: stabiele oplossingen kunnen 'in het echt' worden waargenomen en bifurcaties waarin een stabiele puls instabiel wordt, geven aanleiding tot (interessante) dynamica. Ook hierbij heeft Veerman laten zien dat zelfs een kleine uitbreiding van een canoniek model (het Gierer–Meinhardt-model) grote invloed heeft: pulsen gaan meteen heel ander, nieuw gedrag vertonen.

Singuliere verstoringen

Een eerste belangrijke eigenschap van (1) is dat de kleine parameter ε zich op een 'handige' plaats bevindt, waardoor de systemen *singulier verstoord* zijn. In tegenstelling tot reguliere verstoringen, kunnen (kleine) singuliere verstoringen in het model een grote invloed hebben op de grootheden die door het model worden beschreven. In het bijzonder verdwijnt in Veermans vergelijkingen de (cruciale) diffusieterm $\varepsilon^2 V_{xx}$ in de limiet $\varepsilon = 0$. Bovendien vraagt de vergelijking voor U om een herschaalde ruimtelijke variabele $\xi = x/\varepsilon$ om nog zinvol te zijn in diezelfde limiet (en reduceert de vergelijking dan tot $U_{\xi\xi} = 0$).

De niet-lineaire termen koppelen de vergelijkingen voor U en V zodat deze variabelen elkaar wederzijds beïnvloeden. Veerman legt enkele eisen op aan F_i en G, die ervoor zorgen dat er in de singuliere limiet $\varepsilon = 0$ sprake is van een familie van pulsoplossingen.

Vanwege deze eigenschappen kan de zogenaamde 'geometrische singuliere perturbatietheorie', een collectie technieken uit de theorie van dynamische systemen, worden gebruikt om het bestaan van pulsoplossingen in de algemene klasse systemen (1) te bewijzen. Het 'geometrische' zit hem hierbij in het definiëren van meetkundige objecten, zoals gladde variëteiten of hypervlakken. Het al dan niet snijden van deze objecten ligt aan de basis van de existentie- en stabiliteitsbewijzen. Op deze manier krijgt asymptotische analyse een stevige basis.

De onderzoeker kan er vaak zijn voordeel mee doen, dat belangrijke termen uit de vergelijkingen verdwijnen voor $\varepsilon = 0$. Veerman ziet dit als een soort compromis: in de singuliere limiet $\varepsilon = 0$ wordt het opeens mogelijk om vergelijkingen op te lossen omdat het aanvankelijk complexe systeem behoorlijk is versimpeld. Aan de andere kant is er ook een hoop informatie weggegooid en is het vaak onduidelijk hoe resultaten die behaald zijn in de singuliere limiet kunnen worden vertaald naar het geval dat ε niet nul is, maar wel heel klein.

In Veermans geval was de asymptotisch kleine parameter ε cruciaal. Zonder de structuur die deze parameter met zich mee bracht had hij het grootste deel van de analyse niet kunnen doen. Met behulp van deze parameter bleek het echter zelfs in de vrij complexe, algemene niet-lineaire gekoppelde systemen van de vorm (1) mogelijk om nauwkeurige uitspraken te doen over de existentie en de stabiliteit (en daarmee het tijdsafhankelijke gedrag) van een puls.

Verder in een toegepaste omgeving

Inmiddels is Veerman met een Rubicon-subsidie naar Oxford gegaan, om daar als postdoc twee jaar lang onderzoek te doen naar patronen op groeiende domeinen. Nog steeds onderzoek naar patroonvorming dus, maar nu in een meer biologische context. Hij hoopt dat hij zich daarbij niet alleen wiskundig verder kan ontwikkelen, maar dat zijn ervaring met niet-lineaire analyse ook tot nieuwe inzichten voor de biologen kan leiden.