

Ferdinand Verhulst

Mathematisch instituut  
Universiteit Utrecht  
f.verhulst@uu.nl

Overzichtsartikel

# Chaos, uitgedoofde hype of gevestigde wetenschap?

Dit voorjaar werd Ferdinand Verhulst benaderd door Martin van Kalmthout, redacteur wetenschap van *De Volkskrant*, met de vraag hoe het toch stond met de chaostheorie. Dat was 25 jaar geleden een hype en nu hoor je er niets meer over. Was het achteraf allemaal niet zo belangrijk? Er volgde een interview, ook telefoongesprekken met andere wiskundigen. Op 22 juni 2013 resulteerde dit in een enthousiast artikel in *De Volkskrant* over de chaostheorie in de huidige wetenschap. Verhulst geeft hier een nadere reflectie over deze zaken.

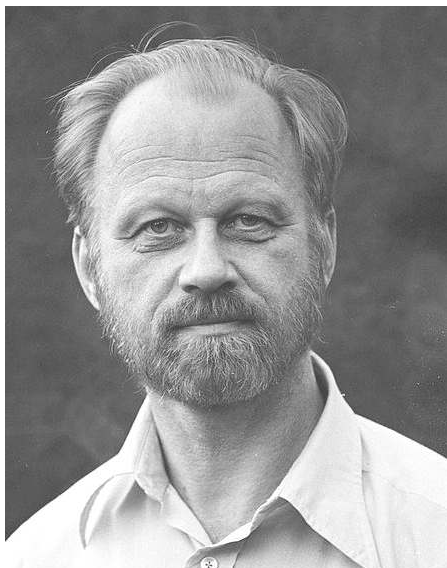
In de jaren tachtig ontstond rond chaos een hype waarbij veel populaire artikelen in kranten, lezingen en mogelijke toepassingen een rol speelden. De wetenschappelijke discussie speelde zich de eerste jaren af in de wiskunde, de meteorologie en de sterrenkunde. De belangstelling van natuurkundigen kwam wat later (dat wiskundigen en anderen iets fundamenteel nieuws in de klassieke mechanica

zouden produceren: te gek om los te lopen). Het begon in de toepassingen met de berekeningen voor opstijgende lucht in de atmosfeer door Edward Lorenz (1963) en voor de dynamica van melkwegstelsels door Hénon en Heiles (1964). Een verband tussen die drie vakgebieden werd toen door bijna niemand gezien. De numerieke berekeningen verbijsterden de wetenschappers tot men ontdekte dat Henri Poincaré deze chaotische dynamica al gedetailleerd had beschreven aan het eind van de negentiende eeuw. Die bewustwording was het begin van fundamenteel werk, een voortzetting van Poincarés theorie (eindelijk!) en vele toepassingen. Belangrijke resultaten van de wiskundigen Kolmogorov, Arnold, Moser en Smale in de zestiger en zeventiger jaren werden in dit verband geplaatst en kregen grote bekendheid in de wetenschap.

Hoe kan het dat een wereldomvattende hype in de jaren tachtig zo om zich heen greep, terwijl het nu lijkt of het onderwerp bij het grote publiek min of meer vergeten is? Andy Warhol 'voorspelde' in de jaren zeventig dat iedereen in de toekomst vijftien minuten wereldberoemd zou kunnen zijn. Dat kunnen we nu beter modifieren tot: niemand kan heden langer dan vijftien minuten beroemd zijn en

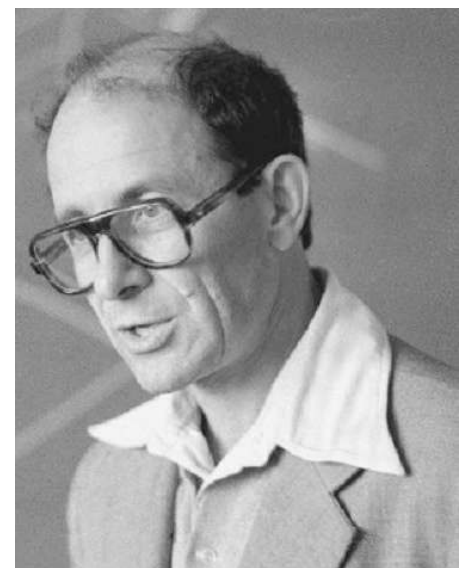
iets kan niet langer dan vijftien minuten de publieke aandacht gevangen houden.

Voor wetenschappers die in de bestendigheid van hun vakgebied geloven, is dat een ontvullende constatering. Echter, voor wiskundigen zou het optreden van zo'n hype en het daarna wegvallen van de aandacht een leerzaam verschijnsel moeten zijn. In het verleden waren we gewend aan voldoende geld voor onderzoek, nu moeten we nog steeds kwaliteit leveren maar tegelijk surfen op de golven van de publieke belangstelling. Wie dat niet kan, maakt weinig kans op onderzoeksgelden. Wiskundigen zijn hier meestal nog niet aan gewend. In Duitsland was Heinz-Otto Peitgen

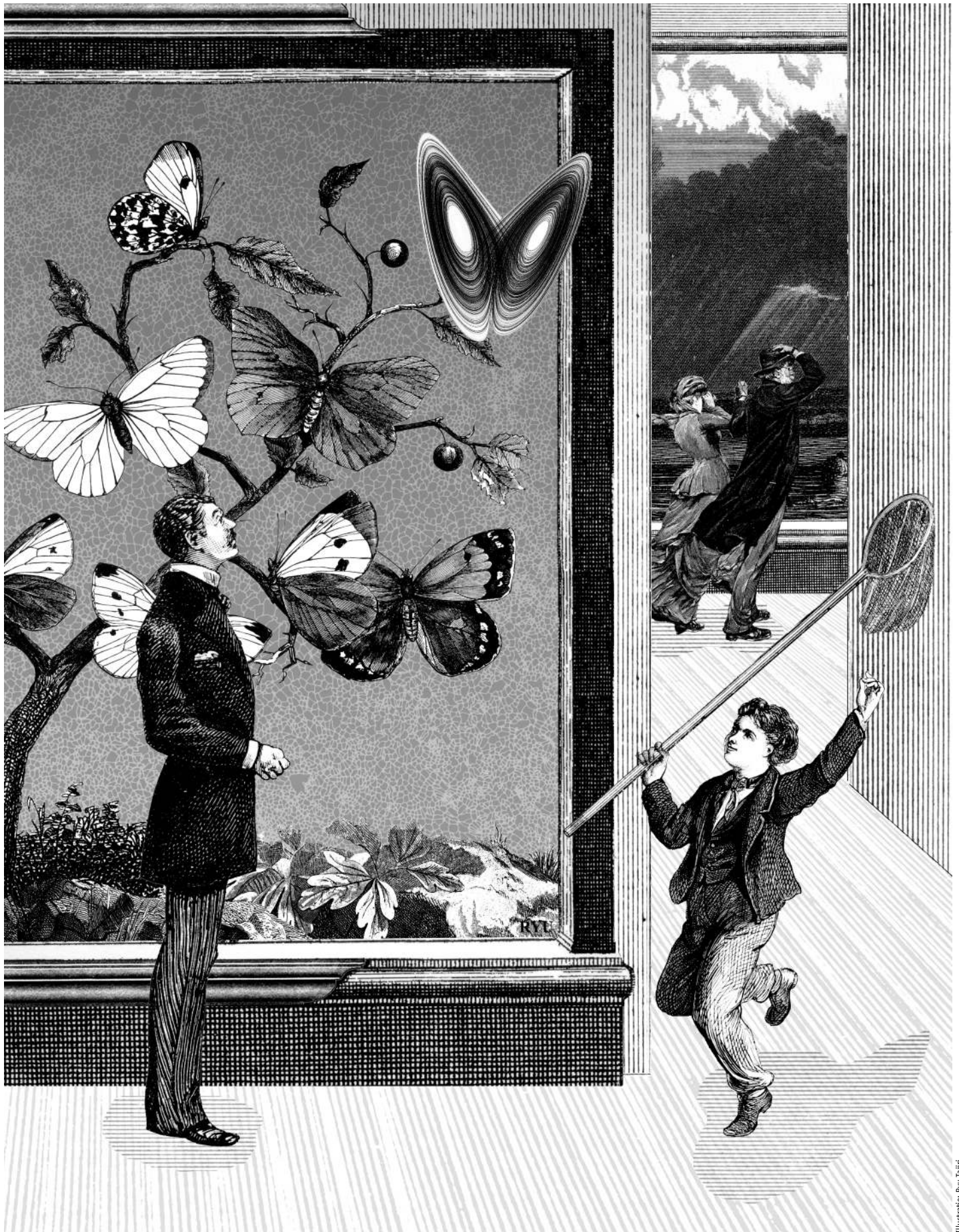


Jürgen Moser

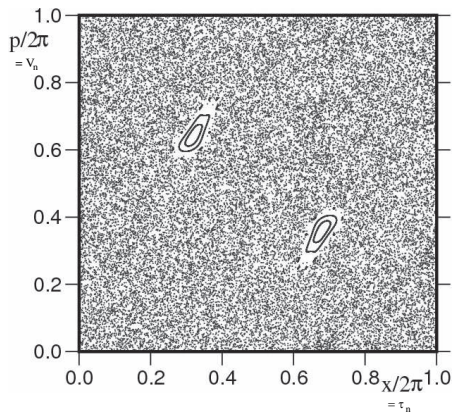
Foto: Kim Moser



Vladimir Arnold



Illustratie: Ryu Hijiiri



**Figuur 1** Dit is een afbeelding die ontstaan is uit een model voor een stuitende bal (zie bijvoorbeeld [5]). De puntenwolke is ontstaan uit één beginvoorwaarde.

een belangrijk vertolker en propagandist van de nieuwe theorie van dynamische systemen. Dat kwam hem op bijtende en nogal onredelijke kritiek in het blad van de Duitse vereniging van wiskundigen (DMV) te staan.

### Wat is chaos?

Bekijk eens een dynamisch systeem, bijvoorbeeld een dynamica beschreven door een differentiaalvergelijking, een differentievergelijking of afbeelding. Neem aan dat alle ontwikkelingen in het systeem (evoluties) begrensd zijn; denk aan voorbeelden als een door de lucht vliegende bal of de grootte van een populatie op een eiland. Zo'n dynamisch systeem heeft vaak een of meer instabiele toestanden, een balletje op de top van een heuvel, een potlood op zijn punt, enzovoorts. De ontwikkeling van het systeem in de tijd zal dan meestal in de richting van een stabiele toestand gaan. In een chaotisch systeem gebeurt er wat anders. Zo een systeem is namelijk bezaaid met instabiele toestanden, in elke omgeving van een toestandspunt zijn instabiele toestanden, er bestaat helemaal geen stabiele toestand terwijl de evoluties toch begrensd zijn. Als er oneindig veel instabiele toestanden zijn in een begrensd gebied, is het resultaat een dynamica die in hoge mate onvoorspelbaar is. De ontwikkeling kan zich nergens in een stabiele omgeving vestigen, de beweging blijft allerlei kanten op schieten. In Figuur 1 is een puntenwolke te zien die het resultaat is van de iteratie van een afbeelding waarbij één begintoestand gebruikt is.

Bij de toepassingen waren het in het begin meestal ik-ook-artikelen, dat wil zeggen beschrijvingen van chaotische effecten die nu opeens in chemische processen, mechanische modellen en allerlei andere problemen herkend werden. Een moeilijkheid is dat chaotisch gedrag wiskundig zeer gecompliceerd

is en diepgaande kennis van dynamische systemen vereist. Veel toepassingen in de jaren tachtig beperkten zich daarom tot numerieke berekeningen. Er ontstond soms een wat haastige wetenschap. Zo werd er nogal slordig omgesprongen met het begrip dimensie: Hausdorff-dimensie werd klakkeloos verward met limietcapaciteit, sommige auteurs bestonden het om te beweren dat het niet veel uitmaakte welk dimensiebegrip men gebruikte. Ondertussen ging het fundamentele onderzoek aan chaos met grote stappen verder, zodat er nu kan worden gesproken van een volwassen maar nog niet afgeronde chaostheorie. Er zijn daarbij in allerlei vakgebieden toepassingen die goed begrepen worden.

Een bijzonder mooie inleiding in de wiskunde van chaos is het boek van Peitgen, Jürgens en Saupe [4]. Een uitvoerige populaire inleiding is [1].

### Een revolutie in de wetenschap?

Beoefenaars van de geschiedenis en de grondslagen van de wetenschap hanteren het begrip 'revolutie in de wetenschap'. Kenmerkend voor zo'n revolutie is het optreden van een crisis in een deel van de wetenschap, gevolgd door een doorbraak in het denken, een kennis-discontinuïteit ('epistemic rupture' [3]), die een geheel nieuwe kijk op het vak levert met allerlei consequenties, vaak ook maatschappelijke. Een bekend voorbeeld is de klassieke mechanica van Newton en anderen, die niet blijkt te gelden bij hoge relatieve snelheden. Dat leidde tot de relativiteitstheorie met een wezenlijk andere visie op het begrip tijd en beweging. De maatschappelijke gevolgen zijn kernenergie, de atombom en filosofische discussies; ook kunstenaars hebben zich hier door laten inspireren.

Een beschrijving van wetenschappelijke revoluties is gegeven in het bekende boek van Kuhn [2]. Merkwaardig genoeg worden in dit boek geen wiskundige ontdekkingen als wetenschappelijke revoluties herkend, het boek beperkt zich in zijn voorbeelden vooral tot natuur- en scheikunde. Het ligt voor de hand om bijvoorbeeld de axiomatisering van de meetkunde, de opkomst van de algebra en het ontstaan van de functionaalanalyse als wetenschappelijke revoluties te zien. Die axiomatisering van de meetkunde bijvoorbeeld heeft eeuwenlang via de euclidische meetkunde mede de vorming van het denken in het onderwijs bepaald.

Conceptueel betekent het verschijnsel chaos een revolutie in de wetenschap en in ons denken. Het gaat namelijk om onvoorspelbaarheid in deterministische dynamische

systemen waarbij we de wetten die het systeem regeren per definitie precies kennen. Verschijnselen als gekoppelde slingers, het zonnestelsel, zijn misschien wiskundig lastig te beschrijven, maar de evolutie van zulke systemen is volkomen gedetermineerd door de gegeven natuurwetten. Niemand, behalve Poincaré, had aan de mogelijkheid gedacht dat het gedetermineerd vastleggen van de toekomst onvoorspelbare verschijnselen zou kunnen opleveren. Inderdaad, chaos. Dat juist ook de klassieke mechanica deze verschijnselen herbergt was een grote verrassing.

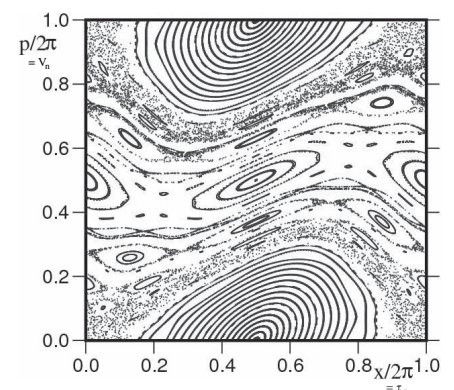
Het concept chaos is een duidelijk voorbeeld van een revolutie in het wetenschappelijk denken door de geheel nieuwe kijk die het op bepaalde wiskundige en natuurwetenschappelijke processen levert. Het heeft maatschappelijke aspecten omdat allerlei onvoorspelbaarheden in het weer en de economie hier deels een verklaring vinden.

### Huidig onderzoek in theorie en toepassingen

Het onderwerp chaos is een vast bestanddeel geworden van boeken en cursussen over dynamische systemen, mathematische biologie en mechanica. We noemen enkele tijdschriften die geheel of gedeeltelijk aan het onderwerp gewijd zijn:

- *Chaos* (American Institute of Physics);
- *International Journal of Bifurcation and Chaos*;
- Het onderwerp komt verder veelvuldig voor in de tijdschriften *Nonlinearity*, *Physica D*, *Journal of Sound and Vibration*, *Nonlinear Dynamics*, *Journal of Nonlinear Science* en andere.

Chaos is dan wel een gevestigd onderdeel geworden van de dynamische systeemtheorie, maar in de theorie is het 'laaghangend fruit' nu wel geplukt, zodat er vooral veel moeilij-



**Figuur 2** Dit is ook een afbeelding die ontstaan is uit een model voor een stuitende bal, zoals in Figuur 1, echter met andere fysische parameters. Er is nog steeds chaos, maar minder prominent.

ke problemen over zijn. Bijvoorbeeld de vraag hoe prominent chaos in een systeem is. Chaos is er niet altijd en overal (zie Figuur 2). In zeer veel toepassingen wordt zowel energie toegevoerd als energie afgestaan, in het algemeen kun je dan chaos verwachten. Hoe dat uitpakt in een concreet geval kun je alleen door gedetailleerd onderzoek achterhalen. Voor het zonnestelsel blijkt chaos pas over miljarden jaren een rol te spelen (gelukkig maar). Ook zijn er in het zonnestelsel gebieden waar de chaotische verschijnselen verwaarloosbaar zijn. In de aardatmosfeer speelt het elke dag een rol, hetgeen beperkingen oplegt aan de weersvoorspelling. De invloed van chaos op oceaanstromingen en economie is nog weinig bekend.

In de theorie van dynamische systemen zijn een aantal scenario's ontwikkeld die tot chaotisch gedrag leiden, maar bij een toepassing moet je dan nog langdurig aan het werk om te zien of zo'n scenario geïdentificeerd kan worden in het model dat bestudeerd wordt.

In het algemeen kun je zeggen dat in systemen die onder controle zijn, denk aan een wasmachine of een brugconstructie, chaos kan en moet worden vermeden. Zo zijn er

mensen die denken dat door gebrek aan onderhoud duizenden bruggen in de Verenigde Staten op instorten staan. Dit is geen chaosprobleem, maar wel een dynamisch systeemprobleem (en natuurlijk een groot politiek probleem). In veel ingenieursproblemen loop je dus om chaostheorie heen, je vermijdt zulke verschijnselen zoveel mogelijk, maar het negeren van chaostheorie in ingenieurswerk is niet altijd terecht. Bij geheel nieuwe ontwerpen kunnen onverwacht chaosproblemen optreden, denk aan een nieuw ontwerp van een grote brug waarbij een wisselend windveld zich kan laten gelden of een stormvloedkering in sterk wisselende getijdestroming.


Chaos is niet te vermijden in systemen waar je weinig controle over hebt: het weer, gravitatie-theorie, astrofysica, economie. Het laatste is een relatief verwaarloosd gebied, er wordt wel gecontroleerd (economische en monetaire maatregelen), maar vaak zonder goede resultaten. Het ontbreekt hier, met name in crisistijd waar bifurcaties een rol zullen spelen, aan een redelijk samenhangende theorie.

#### Tijdelijke hype of nieuwe wetenschap?

Chaos-theorie is ongetwijfeld een integraal en

belangrijk onderdeel van de theorie van dynamische systemen geworden. Het is het nieuwste voorbeeld van een wetenschappelijke revolutie in en door de wiskunde doordat we zijn gaan inzien dat er een grens is aan de voorspelbaarheid in een aantal systemen die we toch goed dachten te begrijpen, bijvoorbeeld het zonnestelsel of de beweging van vloeistoffen.

Verhelderend is de vergelijking met een andere kortlopende hype, de catastrofetheorie van Christopher Zeeman in de jaren zeventig. Zeeman beging de fout om allerlei toepassingen te melden zoals gevangenisoproer en territoriumdrift bij dieren. De catastrofe- of singulariteitentheorie doet echter geen voorspellingen, deze bevat geen dynamica. Het geeft wel een idee van mogelijke uitkomsten van dynamische processen. Singulariteitentheorie is een gevestigd onderdeel van de theorie van dynamische systemen, maar geen wetenschappelijke revolutie. Het is jammer dat Zeeman met het noemen van mogelijke toepassingen een verkeerde indruk heeft gewekt.

Chaos-theorie is van blijvend belang voor het begrip van voorspelbaarheid van dynamische processen. 

#### Referenties

- 1 Henk Broer, Jan van de Craats en Ferdinand Verhulst, *Chaos-theorie, het einde van de voorspelbaarheid?*, Epsilon-reeks, deel 35, Epsilon Uitgaven, 3de druk, 2008.
- 2 Thomas S. Kuhn, *The Structure of Scientific Revolutions*, International Encyclopedia of Unified Science, The University of Chicago Press, 1962 (6de druk 1975).
- 3 Ladislav Kvasz, *Pattern of Change, Linguistic Innovations in the Development of Classical Mechanics*, Birkhäuser, 2008.
- 4 H-O. Peitgen, H. Jürgens en D. Saupe, *Chaos and Fractals, New Frontiers of Science*, Springer, 2004.
- 5 Ferdinand Verhulst, *Chaos en Orde*, Zebra-reeks, deel 16, Epsilon Uitgaven, 2de druk, 2007.